TD de *Logique et Circuits* n° 11
(Correction)

Induction sur les arbres

I) Schéma d'induction

Exercice 1 On considère les arbres binaires de type I étiquetés sur les entiers, définis par :
`type arbre = F | N of int * arbre * arbre;;`
Le schéma de définition inductive sur ces arbres vu en cours est :

$$f(a) = g(a, f(\texttt{fils\_gauche}(a)), f(\texttt{fils\_droit}(a)))$$

Pour chaque fonction Ocaml de la liste suivante, donner l'équation correspondante:

1. ```
   let rec taille a=
     match a with
       F -> 0
     |N(n,g,d)-> 1 + taille g + taille d;;
   ```
2. ```
   let rec hauteur a =
     match a with
       F  -> 0
     |N(n,g,d)-> 1 + max (hauteur g) (hauteur d);;
   ```
3. ```
   let rec chemins a =
     let rec ajoute x l = match l with
       []-> []
     |h::k-> (x::h):: (ajoute x k) in
     match a with
       F -> [[]]
     |N(n,g,d)->
         let a_gauche = ajoute 'g' (chemins g)
         and a_droite = ajoute 'd' (chemins d) in
         a_gauche @ a_droite;;
   ```
   (commencer par executer à la main la fonction `chemins`, par exemple sur `N(N(F,F),F)`).

Correction :

1. $g(a,n,m) = 1 + n + m$
   $f(F) = 0$
2. $g(a,n,m) = 1 + max(n,m)$
   $f(F) = 0$
3. $g(a,l_1,l_2) = f_1(l_1)@f_2(l_2)$
   $f_1(l) = g_1(l, f_1(h_1(l)))$
   $g_1(h :: l', l'') = ('\mathrm{g}' :: h) :: l''$
   $h_1(h :: l) = l$
   $f_1([]) = []$
   (idem pour f_2)
   $f(F) = [[]]$
   ```

II) Arbres binaires de recherche

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un élément du type `arbre`, a, tel que, pour tout noeud $Arb(n,g,d)$ de a, toutes les étiquettes de g sont plus petites ou égales à n et toutes celles de d, sont plus grandes que n.

L'intéret principal de cette définition est que la complexité du problème de la recherche d'une étiquette dans un ABR a de taille n est $O(log_2 n)$, à condition que a soit *équilibré*. Intuitivement, un ABR est d'autant plus equilibré que le rapport entre sa taille et sa hauteur est grand. Il existe plusieurs définitions non équivalentes d'arbre équilibré. Dans la suite on s'intéresse aux 3 définitions suivantes. Un arbre binaire a est équilibré si:

1. Pour toute paire c_1,c_2 de chemins dans a, `longueur` $c_1 \leq 2$ `longueur` c_2.
2. Pour tout noeud $Arb(e,a_1,a_2)$ de a, $|$`hauteur` $a_1 -$ `hauteur` $a_2| \leq 1$.
3. Pour tout chemin c dans a, `longueur` $c =$ `hauteur` a ou `longueur` $c =$ `hauteur` $a - 1$.

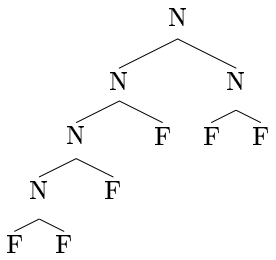
Pour $i = 1,2,3$ on dit qu'un arbre est i-équilibré s'il satisfait la contrainte i ci-dessus. Le but de cet exercice est de montrer que tout arbre $(i+1)$-équilibré est aussi i-équilibré, et que ces trois notions donnent, dans un ABR, la même complexité.

Exercice 2

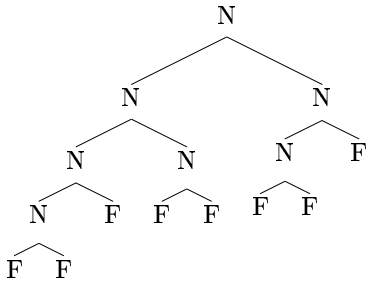
Montrer que les trois notions sont distinctes, c'est-à-dire, pour $i = 1,2$, donner un exemple d'arbre binaire i-équilibré mais pas $(i+1)$-equilibré.

Correction :

1 et non 2 :



2 et non 3:



Correction :

Exercice 3 Montrer par induction que si un arbre 2-équilibré a est de hauteur h, alors pour tout chemin c dans a on a `longueur` $c \geq h/2$. En déduire que si un arbre est 2-équilibré, alors il est 1-équilibré.

Indication. Pour $a = N(e,g,d)$, on pourra sans perte de généralité supposer $c =$ `'g'` $\cdot\, c'$, et considérer les deux cas `hauteur`$(g) = h - 1$ et `hauteur`$(g) = h - 2$.

Correction : Soit a 2-éq., s'il est F ok. S'il est $N(i,g,d)$, g et d sont 2-éq., et donc pour tout chemin c dans g $long(c) \geq h(g)/2$.

Soit `'g'`c un chemin dans a, avec c chemin dans g. Vu que a est 2-éq., $h(g) = h-1$ ou $h(g) = h-2$.

Si $h(g) = h-1$ alors, alors

$long('\mathtt{g}'c) = long(c) + 1 \geq (h-1)/2 + 1 \geq h/2$

Si $h(g) = h-2$ alors, alors

$long('\mathtt{g}'c) = long(c) + 1 \geq (h-2)/2 + 1 = h/2$

Donc si a est 2-éq. et c,c' sont deux chemins dans a, alors $h(a)/2 \leq long(c)$,$long(c') \leq h(a)$, donc $long(c) \leq 2long(c')$, i.e. a est 1-éq.

Exercice 4 Montrer que si un arbre a est 3-équilibré, alors il est 2-équilibré. Raisonner par l'absurde, en supposant qu'un noeud de a contredit la propriété 2.

Correction : Supposons que a soit 3-éq. et qu'il existe un noeud $a' = N(i,g,d)$ de a tel que $|h(g)-h(d)| > 1$. Sans perte de généralité, supposons $h(g) < h(d) - 1$. Soit c le chemin de a' dans a, c' un chemin quelquonque dans g et c'' un chemin dans d tel que $long(c'') = h(d)$. On a $long(cc') \leq long(c) + h(g) < long(c) + h(d) - 1 = long(cc'') - 1$, i.e. $|long(cc') - long(cc'')| > 1$.

Exercice 5 Montrer que si tous les chemins d'un arbre ont même longueur h, alors cet arbre est de taille $2^h - 1$. En déduire que si un arbre 3-équilibré est de hauteur h, alors sa taille n est comprise entre les bornes suivantes :

$$2^{h-1} \leq n < 2^h$$

En déduire que la complexité de la recherche dans un ABR 3-équilibré de taille n est en $O(log_2 n)$.

Correction : 1. On prouve par induction sur h que l'arbre complet de hauteur h a 2^h feuilles et $2^h - 1$ noeud.

2. On remarque que un arbre 3-équilibré de hauteur h est complet jusqu'a $h-1$, et a au moins un noeud supplementaire a hauteur $h-1$.

3. On a $h - 1 \leq log_2 n \leq h$, donc $h \leq log_2 n + 1$. Comme la recherche dans un ABR coute au plus h, on en deduit la complexité $O(log_2 n)$.

Exercice 6 Déduire de l'exercice précédent et de la définition 1 que si un arbre a 1-équilibré est de hauteur h, alors sa taille n est comprise entre les bornes suivantes :

$$2^{h/2} - 1 + h/2 \leq n < 2^h$$

En déduire que la complexité de la recherche dans un ABR 1-équilibré de taille n est en $O(log_2 n)$. Conclure.

Correction :

Vu que a est 1-éq., tous ses chemins ont longueur au moins $h/2$, donc a est complet jusqu'au niveau $h/2$, et il a au moins un chemins de longueur h. Au total, $2^{h/2} - 1 + h/2 \leq \mathtt{taille}\ a$.

On prouve que $hauteur(a) \leq 2log_2(taille(a) + 1)$. Suppose $hauteur(a) > 2log_2(taille(a) + 1)$ alors $taille(a) \geq 2^{hauteur(a)/2} - 1 + hauteur(a)/2 > 2^{log_2(taille(a)+1)} - 1 + log_2(taille(a) + 1) = taille(a) + log_2(taille(a) + 1) \geq taille(a)$

Le nombre de comparaisons nécessaires pour vérifier si un entier appartient à l'ensemble des étiquettes d'un ABR 1-éq de taille n est au plus $hauteur(a) \leq 2log_2(n + 1)$, la complexité de la recherche est donc $O(log_2(n))$.

Conclusion: Les trois criteres sont équivalents du point de vue de la complexité de la recherche (donc il faudrait preferer 1 qui est plus faible).