Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 11

Induction sur les arbres

I) Schéma d'induction

Exercice 1 On considère les arbres binaires de type I étiquetés sur les entiers, définis par :

```
type arbre = F | N of int * arbre * arbre;;
```

Le schéma de définition inductive sur ces arbres vu en cours est :

$$f(a) = g(a, f(\texttt{fils\_gauche}(a)), f(\texttt{fils\_droit}(a)))$$

Pour chaque fonction Ocaml de la liste suivante, donner l'équation correspondante :

1.
```
let rec taille a=
   match a with
     F -> 0
   |N(n,g,d)-> 1 + taille g + taille d;;
```
2.
```
let rec hauteur a =
   match a with
     F  -> 0
   |N(n,g,d)-> 1 + max (hauteur g) (hauteur d);;
```
3.
```
let rec chemins a =
   let rec ajoute x l = match l with
     []-> []
   |h::k-> (x::h):: (ajoute x k) in
   match a with
     F -> [[]]
   |N(n,g,d)->
       let a_gauche = ajoute 'g' (chemins g)
       and a_droite = ajoute 'd' (chemins d) in
       a_gauche @ a_droite;;
```
   (commencer par executer à la main la fonction `chemins`, par exemple sur `N(N(F,F),F)`).

II) Arbres binaires de recherche

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un élément du type `arbre`, a, tel que, pour tout noeud $Arb(n, g, d)$ de a, toutes les étiquettes de g sont plus petites ou égales à n et toutes celles de d, sont plus grandes que n.

L'intéret principal de cette définition est que la complexité du problème de la recherche d'une étiquette dans un ABR a de taille n est $O(log_2 n)$, à condition que a soit *équilibré*. Intuitivement, un ABR est d'autant plus equilibré que le rapport entre sa taille et sa hauteur est grand. Il existe plusieurs définitions non équivalentes d'arbre équilibré. Dans la suite on s'intéresse aux 3 définitions suivantes. Un arbre binaire a est équilibré si :

1. Pour toute paire c_1, c_2 de chemins dans a, `longueur` $c_1 \leq 2$ `longueur` c_2.
2. Pour tout noeud $Arb(e, a_1, a_2)$ de a, $|$`hauteur` a_1-`hauteur` $a_2| \leq 1$.
3. Pour tout chemin c dans a, `longueur` $c =$ `hauteur` a ou `longueur` $c =$ `hauteur` $a - 1$.

Pour $i = 1, 2, 3$ on dit qu'un arbre est i-équilibré s'il satisfait la contrainte i ci-dessus. Le but de cet exercice est de montrer que tout arbre $(i + 1)$-équilibré est aussi i-équilibré, et que ces trois notions donnent, dans un ABR, la même complexité.

Exercice 2

Montrer que les trois notions sont distinctes, c'est-à-dire, pour $i = 1, 2$, donner un exemple d'arbre binaire i-équilibré mais pas $(i + 1)$-equilibré.

Exercice 3 Montrer par induction que si un arbre 2-équilibré a est de hauteur h, alors pour tout chemin c dans a on a `longueur` $c \geq h/2$. En déduire que si un arbre est 2-équilibré, alors il est 1-équilibré.

Indication. Pour $a = N(e, g, d)$, on pourra sans perte de généralité supposer $c =$ `'g'` $\cdot\, c'$, et considérer les deux cas `hauteur`$(g) = h - 1$ et `hauteur`$(g) = h - 2$.

Exercice 4 Montrer que si un arbre a est 3-équilibré, alors il est 2-équilibré. Raisonner par l'absurde, en supposant qu'un noeud de a contredit la propriété 2.

Exercice 5 Montrer que si tous les chemins d'un arbre ont même longueur h, alors cet arbre est de taille $2^h - 1$. En déduire que si un arbre 3-équilibré est de hauteur h, alors sa taille n est comprise entre les bornes suivantes :

$$2^{h-1} \leq n < 2^h$$

En déduire que la complexité de la recherche dans un ABR 3-équilibré de taille n est en $O(log_2 n)$.

Exercice 6 Déduire de l'exercice précédent et de la définition 1 que si un arbre a 1-équilibré est de hauteur h, alors sa taille n est comprise entre les bornes suivantes :

$$2^{h/2} - 1 + h/2 \leq n < 2^h$$

En déduire que la complexité de la recherche dans un ABR 1-équilibré de taille n est en $O(log_2 n)$. Conclure.