TD de *Logique et Circuits* n° 12
(Correction)

Formules et preuves

Terminologie et notations

- p, q, p_1, p', etc.: lettres propositionnelles
- A, B, A_1, A', etc.: formules du calcul propositionnel
- Γ, Δ, Π, Γ_1, Γ', etc.: multi-ensembles de formules. L'union de Γ et Δ est notée Γ,Δ, et le multi-ensemble qui ne contient qu'une occurrence d'une unique formule A est noté A.
- $\Gamma \triangleright \Delta$: séquent
- $\Gamma,A \triangleright \Delta,A$: axiome (= séquent où une même formule figure à gauche et à droite)
- Un séquent est *prouvable* s'il existe un arbre de preuve dont la racine est ce séquent et dont toutes les feuilles sont des axiomes. Une formule A est prouvable si le séquent $\triangleright A$ l'est.
- Règles d'inférence:

$$\frac{\Gamma \triangleright A,\Delta}{\Gamma,\neg A \triangleright \Delta}\ (\neg\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma,A \triangleright \Delta}{\Gamma \triangleright \neg A,\Delta}\ (\neg\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright A,\Delta \quad \Gamma,B \triangleright \Delta}{\Gamma,A \rightarrow B \triangleright \Delta}\ (\rightarrow\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma,A \triangleright B,\Delta}{\Gamma \triangleright A \rightarrow B,\Delta}\ (\rightarrow\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma,A \triangleright \Delta \quad \Gamma,B \triangleright \Delta}{\Gamma,A \vee B \triangleright \Delta}\ (\vee\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright A,B,\Delta}{\Gamma \triangleright A \vee B,\Delta}\ (\vee\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma,A,B \triangleright \Delta}{\Gamma,A \wedge B \triangleright \Delta}\ (\wedge\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright A,\Delta \quad \Gamma \triangleright B,\Delta}{\Gamma \triangleright A \wedge B,\Delta}\ (\wedge\mathrm{d})$$

Exercice 1 (Prouvabilité) Prouver les formules:
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- $(p \wedge q) \vee (p \rightarrow \neg q)$

Montrer que la formule suivante n'est pas prouvable:
- $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$

Correction : Pour les formules prouvables, on exhibe la preuve... On insistera sur le fait que dans le système $\mathcal{G}$, la construction de preuve est quasi-mécanique, modulo l'ordre d'application des règles. En pratique, on aura toujours intérêt à privilégier l'application des règles à une prémisse ($\wedge$g, $\vee$d et $\rightarrow$d) à l'application des règles à deux prémisses ($\wedge$d, $\vee$g et $\rightarrow$g) afin de retarder le branchement de la preuve. Pour montrer que la dernière formule n'est *pas* prouvable, on utilise la contraposée du théorème de correction (prouvable $\Rightarrow$ vrai) en exhibant une interprétation qui falsifie la formule. Ici: $p = q = \mathbf{F}$.

Exercice 2 (Preuves et tables de vérité) Soient des lettres propositionnelles $p_1,\dots,p_n,q$, où $n \geq 0$ est un entier positif fixé. Construire un arbre de preuve de la formule:

$$[(\cdots(p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_n) \to q] \ \to \ [p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to q)\cdots)]$$

Quelle est, en fonction de n, la hauteur de l'arbre de preuve ainsi construit? Si on devait calculer la table de vérité de la formule ci-dessus, quel serait le nombre de lignes?

Correction : L'arbre se construit en trois temps (du bas vers le haut): $n+1$ applications de $\to$d, puis 1 application de $\to$g, et enfin $n-1$ applications de $\wedge$d, ce qui donne

$$\dfrac{\dfrac{q,\, p_1,\, \dots,\, p_n \rhd q \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, p_1 \qquad p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, p_2}{p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, p_1 \wedge p_2} \\ \vdots \\ p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, (p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_{n-1}\end{array} \qquad p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, p_n}{p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q,\, \cdots(p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_n}}{\begin{array}{c}(\cdots(p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_n) \to q,\, p_1,\,\dots,\,p_n \rhd q \\ \vdots \\ (\cdots(p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_n) \to q \rhd p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to q)\cdots)\end{array}}}{\rhd [(\cdots(p_1 \wedge p_2)\cdots \wedge p_n) \to q] \ \to \ [p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to q)\cdots)]}$$

soit $2n+1$ inférences (ou $2n+2$ lignes de preuve). La table de vérité de la même formule comporterait 2^{n+1} lignes!

Exercice 3 (Simplification de l'axiome) On cherche à montrer qu'il est possible de restreindre la notion d'axiome au seul cas atomique (en n'autorisant dans les feuilles des arbres de preuve que des axiomes de la forme $\Gamma,p \rhd p,\Delta$, où p est une lettre propositionnelle) sans pour autant réduire la classe des séquents prouvables. Pour cela on procède en deux temps:

1. Montrer que tout séquent de la forme $\Gamma,A \vdash A,\Delta$ admet un arbre de preuve dans lequel les feuilles sont des axiomes portant sur une formule atomique.
2. En déduire que tout séquent prouvable admet un arbre de preuve qui n'a pour feuilles que des axiomes portant sur des formules atomiques.

Correction : L'intérêt de l'exercice est de combiner deux types d'induction:

1. Par induction sur la formule A;
2. Par récurrence sur la hauteur de la preuve.

Exercice 4 (Affaiblissement) Montrer que pour tous Γ, Γ', Δ, et Δ', si le séquent $\Gamma \rhd \Delta$ est prouvable, alors le séquent $\Gamma,\Gamma' \rhd \Delta,\Delta'$ est dérivable également.

Indication: On pourra raisonner par récurrence sur la hauteur des arbres de preuve.

Correction : Tout est dit dans l'indication!

Exercice 5 (Formes normales conjonctive et disjonctive)

- Un *littéral* est soit une lettre propositionnelle, soit la négation d'une lettre propositionnelle.
- Une *clause disjonctive* est une disjonction de littéraux.
- Une *forme normale conjonctive* est une conjonction de clauses disjonctives.

Symétriquement, on définit:

- Une *clause conjonctive* est une conjonction de littéraux.
- Une *forme normale disjonctive* est une disjonction de clauses conjonctives.

(la notion de littéral est la même). Exemple de forme normale conjonctive: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Prouver que pour toute formule A, il existe une forme normale conjonctive $A^{\wedge}$ et une forme normale disjonctive $A^{\vee}$ telle que les trois formules A, $A^{\wedge}$ et $A^{\vee}$ sont équivalentes.

Correction : Avant de commencer l'induction, on remarque que la négation d'une f.n.c. est équivalente a une f.n.d. et vice-versa, par de Morgan.

Si A est un atome, $A = A^{\wedge} = A^{\vee}$.
Si $A = \neg B$, on construit $A^{\wedge}$,$A^{\vee}$ á partir de $B^{\vee}$,$B^{\wedge}$ et de la rémarque ci-dessus.
Si $A = A_1 \vee A_2$, $A^{\vee} = A_1^{\vee} \vee A_2^{\vee}$.
$A^{\wedge}$ se construit á partir de $A_1^{\wedge}$ et $A_2^{\wedge}$, par distributivité:
soit $A_1^{\wedge} = d_1 \wedge ... \wedge d_k$ $A_2^{\wedge} = d'_1 \wedge ... \wedge d'_n$.
$(A_1 \vee A_2)^{\wedge} = \bigwedge_{i=1..k,j=1..n} d_i \vee d'_j$
Si $A = A_1 \wedge A_2$, pareil.
Si $A = A_1 \rightarrow A_2$ on considère la formule équivalente $\neg A_1 \vee A_2$.

Exercice 6 Soit $A_0 = p \rightarrow q$ et, pour tout $n \leq 0$, $A_{n+1} = A_n \rightarrow q$.
Montrer que le séquent $\triangleright A_n,p$ est prouvable si et seulement si n est pair.

Correction :

On vérifie que $\triangleright A_0,p$ est prouvable. Par ailleurs, on voit que si $\triangleright A_n,p,q$ est prouvable, alors $\triangleright A_{n+2},p$ est prouvable. On applique l'exo. precedente et on a fini pour le "si".

Pour le "seulement si", remarquer que l'arbre de $\triangleright A_1,p$ a une feuille $\triangleright p,q,p$, donc il n'est pas prouvable, et l'arbre de $\triangleright A_{n+2},p$ a un noued $\triangleright A_n,p,q$, donc pour $n = 2k+1$, l'arbre de $\triangleright A_n,p$ a une feuille $\triangleright p,q^{k+1},p$, donc $\triangleright A_n,p$ n'est pas prouvable.

Exercice 7 Écrire en Caml les fonctions qui calculent des formes normales conjonctive et disjonctive (définies à l'exercice 5) pour chaque formule donnée.