TD de *Logique et Circuits* n° 12

Formules et preuves

Terminologie et notations

- p, q, p_1, p', etc. : lettres propositionnelles
- A, B, A_1, A', etc. : formules du calcul propositionnel
- Γ, Δ, Π, Γ_1, Γ', etc. : multi-ensembles de formules. L'union de Γ et Δ est notée Γ, Δ, et le multi-ensemble qui ne contient qu'une occurrence d'une unique formule A est noté A.
- $\Gamma \triangleright \Delta$: séquent
- $\Gamma, A \triangleright \Delta, A$: axiome (= séquent où une même formule figure à gauche et à droite)
- Un séquent est ***prouvable*** s'il existe un arbre de preuve dont la racine est ce séquent et dont toutes les feuilles sont des axiomes. Une formule A est prouvable si le séquent $\triangleright A$ l'est.
- Règles d'inférence :

$$\frac{\Gamma \triangleright A, \Delta}{\Gamma, \neg A \triangleright \Delta}\ (\neg\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma, A \triangleright \Delta}{\Gamma \triangleright \neg A, \Delta}\ (\neg\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright A, \Delta \quad \Gamma, B \triangleright \Delta}{\Gamma, A \to B \triangleright \Delta}\ (\to\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma, A \triangleright B, \Delta}{\Gamma \triangleright A \to B, \Delta}\ (\to\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, A \triangleright \Delta \quad \Gamma, B \triangleright \Delta}{\Gamma, A \vee B \triangleright \Delta}\ (\vee\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright A, B, \Delta}{\Gamma \triangleright A \vee B, \Delta}\ (\vee\mathrm{d})$$

$$\frac{\Gamma, A, B \triangleright \Delta}{\Gamma, A \wedge B \triangleright \Delta}\ (\wedge\mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright A, \Delta \quad \Gamma \triangleright B, \Delta}{\Gamma \triangleright A \wedge B, \Delta}\ (\wedge\mathrm{d})$$

Exercice 1 (Prouvabilité) Prouver les formules :
- $p \to (q \to p)$
- $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
- $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$
- $(p \wedge q) \vee (p \to \neg q)$

Montrer que la formule suivante n'est pas prouvable :
- $(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$

Exercice 2 (Preuves et tables de vérité) Soient des lettres propositionnelles $p_1, \ldots, p_n, q$, où $n \geq 0$ est un entier positif fixé. Construire un arbre de preuve de la formule :

$$[(\cdots(p_1 \wedge p_2) \cdots \wedge p_n) \to q] \ \to\ [p_1 \to (p_2 \to \cdots (p_n \to q) \cdots)]$$

Quelle est, en fonction de n, la hauteur de l'arbre de preuve ainsi construit ? Si on devait calculer la table de vérité de la formule ci-dessus, quel serait le nombre de lignes ?

Exercice 3 (Simplification de l'axiome) On cherche à montrer qu'il est possible de restreindre la notion d'axiome au seul cas atomique (en n'autorisant dans les feuilles des arbres de preuve que des axiomes de la forme $\Gamma, p \triangleright p, \Delta$, où p est une lettre propositionnelle) sans pour autant réduire la classe des séquents prouvables. Pour cela on procède en deux temps :

1. Montrer que tout séquent de la forme $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ admet un arbre de preuve dans lequel les feuilles sont des axiomes portant sur une formule atomique.
2. En déduire que tout séquent prouvable admet un arbre de preuve qui n'a pour feuilles que des axiomes portant sur des formules atomiques.

Exercice 4 (Affaiblissement) Montrer que pour tous Γ, Γ', Δ, et Δ', si le séquent $\Gamma \rhd \Delta$ est prouvable, alors le séquent $\Gamma, \Gamma' \rhd \Delta, \Delta'$ est dérivable également.

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur la hauteur des arbres de preuve.

Exercice 5 (Formes normales conjonctive et disjonctive)

- Un *littéral* est soit une lettre propositionnelle, soit la négation d'une lettre propositionnelle.
- Une *clause disjonctive* est une disjonction de littéraux.
- Une *forme normale conjonctive* est une conjonction de clauses disjonctives.

Symétriquement, on définit :

- Une *clause conjonctive* est une conjonction de littéraux.
- Une *forme normale disjonctive* est une disjonction de clauses conjonctives.

(la notion de littéral est la même). Exemple de forme normale conjonctive : $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Prouver que pour toute formule A, il existe une forme normale conjonctive $A^{\wedge}$ et une forme normale disjonctive $A^{\vee}$ telle que les trois formules A, $A^{\wedge}$ et $A^{\vee}$ sont équivalentes.

Exercice 6 Soit $A_0 = p \rightarrow q$ et, pour tout $n \leq 0$, $A_{n+1} = A_n \rightarrow q$.
Montrer que le séquent $\rhd A_n, p$ est prouvable si et seulement si n est pair.

Exercice 7 Écrire en Caml les fonctions qui calculent des formes normales conjonctive et disjonctive (définies à l'exercice 5) pour chaque formule donnée.