Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 3

(Correction)

Exercice 1 On définit deux relations sur les entiers :

- $\mathcal{R} = \{(n,\ n+6) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{S} = \{(n,\ 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Calculer :

1. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$
2. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$
3. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$
4. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Correction : On fera remarquer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des fonctions (c'est utile surtout pour 3. et 4).

1. $\{(n,\ n+6);\ (n,\ 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (pas mieux)
2. $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = n+6 \text{ et } m = 2n\}\ =\ \{(6,12)\}$
3. $\{(n,\ 2n+6) \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{(n,\ 2(n+6)) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2 Indiquer si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques et/ou transitives.

1. $\mathcal{R}_1\ =\ \{(n,n),\ n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathcal{R}_2\ =\ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \leq m\}$
3. $\mathcal{R}_3\ =\ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \neq m\}$
4. $\mathcal{R}_4 = \{(42,n),\ n \in \mathbb{N}\}$

Correction :

1. Réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.
   On notera que la relation d'égalité — car c'est elle ! — est la seule relation de l'univers à être à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence.
2. Réflexive, transitive et anti-symétrique : c'est une relation d'ordre.
3. Symétrique. Pas transitive, car $1 \neq 2$, $2 \neq 1\ldots$ mais on ne peut pas en déduire que $1 \neq 1$!
4. Transitive et anti-symétrique.

Exercice 3 Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et bijectives.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ =\ n \mapsto 2n$
2. $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ =\ x \mapsto x * x$
3. $g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\ =\ x \mapsto x * x$
4. $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\ =\ x \mapsto x * x$
5. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ =\ n \mapsto n$
6. $g_3 \circ h \circ f$

Correction :

1. Injective.
2. Rien.
3. Bijective.
4. Surjective.
5. Injective.
6. Injective.

Exercice 4 Soient $\leq_1$ et $\leq_2$ les relations définies par

1. $\leq_1 \;=\; \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \leq m\}$
2. $\leq_2 \;=\; \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } m \leq n\}$

Ordonner

1. la suite $1; 2; 3$ suivant chacun des deux ordres $\leq_1$ et $\leq_2$.
2. la suite $(1,2); (2,2); (1,3); (2,4); (2,6)$ suivant l'ordre produit $\leq_{1,2} = \leq_1 \times \leq_2$ et l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}_{1,2}}$.

Correction :

1. $1; 2; 3$ et $3; 2; 1$.
2. Les solutions sont
$$\begin{array}{ccccc} (2,6) & < & (2,4) & & \\ & & & < & (2,2) \\ (1,3) & < & (1,2) & & \end{array}$$
et $(1,3) < (1,2) < (2,6) < (2,4) < (2,2)$.
On remarque que l'ordre lexicographique (qui est total) contient l'ordre produit (qui est partiel).

Exercice 5 On considère l'ensemble S des suites finies d'entiers naturels. À toute suite $s = (s_i)$, on associe $p(s)$ le nombre d'éléments pairs de la suite et $i(s)$ le nombre d'éléments impairs. On définit sur S la relation $\preccurlyeq \;=\; \{(s,t) \;\mid\; p(s) < p(t) \;\vee\; (p(s) = p(t) \wedge i(s) \geqslant i(t))\}$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est un préordre sur S. Est-ce un ordre ?
2. Quelle est la relation d'équivalence induite par ce préordre ? Comment représenter les classes d'équivalence ?
3. Quel est l'ordre induit par le préordre sur les classes d'équivalence ?

Correction :

1. La relation $\preccurlyeq$ est un préordre :
   - (*Réflexivité*) Il s'agit de vérifier que pour toute suite s, on a :
     ou bien $p(s) < p(s)$, ou bien $p(s) = p(t)$ et $i(s) \geqslant i(s)$.
     La deuxième alternative est toujours vraie.
   - (*Transitivité*) Supposons s_1, s_2 et s_3 telles que $s_1 \preccurlyeq s_2$ (H1) et $s_2 \preccurlyeq s_3$ (H2). On cherche à montrer que $s_1 \preccurlyeq s_3$. Les hypothèses H1 et H2 donnent lieu chacune à deux cas possibles :
     - H1 : ou bien $p(s_1) < p(s_2)$ (H1a), ou bien $p(s_1) = p(s_2)$ et $i(s_1) \geqslant i(s_2)$ (H1b).
     - H2 : ou bien $p(s_2) < p(s_3)$ (H2a), ou bien $p(s_2) = p(s_3)$ et $i(s_2) \geqslant i(s_3)$ (H2b).

     On a donc 4 cas (i.e. 4 combinaisons d'un H1$*$ avec un H2$*$) à analyser :
     - H1a et H2a, c'est-à-dire : $p(s_1) < p(s_2)$ et $p(s_2) < p(s_3)$.
       Dans ce cas on a $p(s_1) < p(s_3)$, d'où $s_1 \preccurlyeq s_3$.

- H1a et H2b, c'est-à-dire : $p(s_1) < p(s_2)$, $p(s_2) = p(s_3)$ et $i(s_2) \geqslant i(s_3)$.
  Dans ce cas on a $p(s_1) < p(s_3)$, d'où $s_1 \preccurlyeq s_3$.
- H1b et H2a, c'est-à-dire : $p(s_1) = p(s_2)$, $i(s_1) \geqslant i(s_2)$ et $p(s_2) < p(s_3)$.
  Dans ce cas on a $p(s_1) < p(s_3)$, d'où $s_1 \preccurlyeq s_3$.
- H1b et H2b, c'est-à-dire : $p(s_1) = p(s_2)$, $i(s_1) \geqslant i(s_2)$, $p(s_2) = p(s_3)$ et $i(s_2) \geqslant i(s_3)$.
  Dans ce cas, on a $p(s_1) = p(s_3)$ et $i(s_1) \geqslant i(s_3)$, c'est-à-dire $s_1 \preccurlyeq s_3$.

Cette relation n'est pas un ordre car elle n'est pas anti-symétrique : il suffit par exemple de considérer deux suites s et t ayant le même nombre d'éléments pairs et impairs, comme par exemple $s = [1; 2; 4]$ et $t = [0; 9; 8]$.

2. Deux suites sont équivalentes si et seulement si elles ont le même nombre d'éléments pairs et impairs. Chaque classe peut donc être représentée par un couple de naturels.
3. L'ordre induit sur les classes est l'ordre $\leq_{\mathrm{lex}_{1,2}}$ de l'exercice précédent.