

TD de *Logique et Circuits* n° 3

Exercice 1 On définit deux relations sur les entiers :

- $\mathcal{R} = \{(n, n + 6) \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $\mathcal{S} = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Calculer:

1. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$

2. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$

3. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$

4. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Exercice 2 Indiquer si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques et/ou transitives.

1. $\mathcal{R}_1 = \{(n, n), n \in \mathbb{N}\}$

2. $\mathcal{R}_2 = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2, \text{ tels que } n \leq m\}$

3. $\mathcal{R}_3 = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2, \text{ tels que } n \neq m\}$

4. $\mathcal{R}_4 = \{(42, n), n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3 Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et bijectives.

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} = n \mapsto 2n$

2. $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = x \mapsto x * x$

3. $g_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ = x \mapsto x * x$

4. $g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = x \mapsto x * x$

5. $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} = n \mapsto n$

6. $g_3 \circ h \circ f$

Exercice 4 Soient \leq_1 et \leq_2 les relations définies par

1. $\leq_1 = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2, \text{ tels que } n \leq m\}$

2. $\leq_2 = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2, \text{ tels que } m \leq n\}$

Ordonner

1. la suite 1; 2; 3 suivant chacun des deux ordres \leq_1 et \leq_2 .

2. la suite $(1, 2); (2, 2); (1, 3); (2, 4); (2, 6)$ suivant l'ordre produit $\leq_{1,2} = \leq_1 \times \leq_2$ et l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}_{1,2}}$.

Exercice 5 On considère l'ensemble S des suites finies d'entiers naturels. À toute suite $s = (s_i)$, on associe $p(s)$ le nombre d'éléments pairs de la suite et $i(s)$ le nombre d'éléments impairs. On définit sur S la relation $\preceq = \{(s, t) \mid p(s) < p(t) \vee (p(s) = p(t) \wedge i(s) \geq i(t))\}$.

1. Montrer que \preceq est un préordre sur S . Est-ce un ordre?
2. Quelle est la relation d'équivalence induite par ce préordre? Comment représenter les classes d'équivalence?
3. Quel est l'ordre induit par le préordre sur les classes d'équivalence?