Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 3

Exercice 1 On définit deux relations sur les entiers :

- $\mathcal{R} = \{(n,\ n+6) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{S} = \{(n,\ 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Calculer:

1. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$
2. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$
3. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$
4. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Exercice 2 Indiquer si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques et/ou transitives.

1. $\mathcal{R}_1 \ = \ \{(n,n),\ n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathcal{R}_2 \ = \ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \leq m\}$
3. $\mathcal{R}_3 \ = \ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \neq m\}$
4. $\mathcal{R}_4 = \{(42,n),\ n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3 Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et bijectives.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ = \ n \mapsto 2n$
2. $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ = \ x \mapsto x * x$
3. $g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ = \ x \mapsto x * x$
4. $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ = \ x \mapsto x * x$
5. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ = \ n \mapsto n$
6. $g_3 \circ h \circ f$

Exercice 4 Soient $\leq_1$ et $\leq_2$ les relations définies par

1. $\leq_1 \ = \ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } n \leq m\}$
2. $\leq_2 \ = \ \{(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tels que } m \leq n\}$

Ordonner

1. la suite $1; 2; 3$ suivant chacun des deux ordres $\leq_1$ et $\leq_2$.

2. la suite $(1,2);(2,2);(1,3);(2,4);(2,6)$ suivant l'ordre produit $\leq_{1,2}=\leq_1 \times \leq_2$ et l'ordre lexicographique $\leq_{\mathrm{lex}_{1,2}}$.

Exercice 5 On considère l'ensemble S des suites finies d'entiers naturels. À toute suite $s=(s_i)$, on associe $p(s)$ le nombre d'éléments pairs de la suite et $i(s)$ le nombre d'éléments impairs. On définit sur S la relation $\preccurlyeq \; = \; \{(s,t) \;\mid\; p(s)<p(t) \;\vee\; (p(s)=p(t) \wedge i(s) \geqslant i(t))\}$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est un préordre sur S. Est-ce un ordre?

2. Quelle est la relation d'équivalence induite par ce préordre? Comment représenter les classes d'équivalence?

3. Quel est l'ordre induit par le préordre sur les classes d'équivalence?