Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 4
(Correction)

Ordres et définitions inductives

Exercice 1 On définit un ordre sur les multi-ensembles finis d'entiers naturels par la fermeture transitive de : $X \cup \{n\} \succ X \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ si $\forall i.m_i < n$ où $<$ est l'ordre standard sur les entiers.

1. Les suites suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?
   (a) $\{42\}; \{21, 21, 24, 30\}; \{12, 12, 12, 12, 21\}; \{2\}$
   (b) $\{\}; \{5\}; \{4, 3, 2, 1, 0\}$
2. Donner une suite strictement décroissante de longueur 421 partant de $\{2\}$.
3. Donner une suite strictement décroissante de longueur 12345641564 partant de $\{2\}$.
4. Existe-t-il un maximum et un minimum des multi-ensembles finis d'entiers naturels ?
5. Montrer qu'il n'y a pas de suite strictement décroissante infinie.

Correction :

1. (a) Décroissante.
   (b) Rien.
2. $\{2\}; \{1^{420}\}; \{1^{419}\}; \ldots$.
3. $\{2\}; \{1^{12345641564}\}; \ldots$.
4. Un minimum $\{\}$ mais pas de maximum.
5. Juste quelques indications très intuitives (les élèves n'ont pas les outils pour la faire formellement). Par récurrence sur le plus grand entier puis sur le nombre d'occurrences de ce plus grand entier. Si n est utilisé alors on se retrouve dans une configuration plus petite (le nombre d'occurrences de n est plus petit) sinon, on peut enlever ce n de la configuration de départ et la suite a la même longueur.

Exercice 2 Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *bien fondée* si il n'existe pas de suite infinie $(a_i)_{i\in\mathbb{B}}$ d'éléments de E telle que $(a_i, a_{i+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout i. Montrer que la fermeture transitive d'une relation bien fondée est bien fondée.

Correction : Par l'absurde. Si la fermeture transitive $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}$ n'est pas bien fondée, il existe une suite infinie $(b_i)_{i\in\mathbb{B}}$ d'éléments de E telle que $(b_i, b_{i+1}) \in \mathcal{T}$, donc il existe des éléments $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, .., a_{k_i}^{(i)}$, tels que $(a_j^{(i)}, a_{j+1}^{(i)}) \in \mathcal{R}$, $(b_i, a_1^{(i)}) \in \mathcal{R}$ et $(a_{k_i}^{(i)}, b_{i+1}) \in \mathcal{R}$. Donc $b_0, a_1^{(0)}, ..., a_{k_0}^{(0)}, b_1, a_1^{(1)}, ...$ est une chaîne infinie pour $\mathcal{R}$ qui n'est donc pas bien fondée.

Exercice 3 Calculer la clôture inductive de $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ par

1. la fonction $plus_2$ telle que $plus_2(n) = n + 2$.
2. les fonctions f et g telles que : $f(n) = n + 10$ et $g(n) = -n$.

Correction :

1. $\mathbb{N}$
2. $\dots, -11, -10, -9, -1, 0, 1, 9, 10, 11, \dots$

Exercice 4 Donner une définition inductive

1. des mots de longueur paire sur un alphabet A à partir de l'ensemble composé du mot vide $\{\varepsilon\}$.
2. des palindromes (les mots qui se lisent de la même manière dans les deux sens).
3. des arbres filiformes (un arbre est filiforme si chaque noeud a au plus un fils).
4. des expressions bien parenthésées (comme "()((()()))").

Correction :

1. On peut prendre comme ensemble de fonctions $\{f_{a,b},\ f_{a,b}(\omega) = a.b.\omega$ lorsque $a, b \in A\}$.
2. On peut prendre comme ensemble de fonctions $\{f_a,\ f_a(\omega) = a.\omega.a$ lorsque $a \in A\}$ sur l'ensemble composé du mot vide et de l'ensemble des mots à une lettre.
3. $T := F|Noeud(F,T)|Noeud(T,F)$. Donc $\{g, d\}$ où $g(T) = Noeud(T,F)$ et $d(T) = Noeud(F,T)$ sur l'ensemble $\{F\}$.
4. $E := \varepsilon|EE|(E)$. Donc on prend $\{f, g\}$ où $f(e_1, e_2) = e_1e_2$ et $g(e) = (e)$ sur $\{\varepsilon\}$.