Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 4

Ordres et définitions inductives

Exercice 1 On définit un ordre sur les multi-ensembles finis d'entiers naturels par la fermeture transitive de : $X \cup \{n\} \succ X \cup \{m_1, \ldots, m_k\}$ si $\forall i. m_i < n$ où $<$ est l'ordre standard sur les entiers.

1. Les suites suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?
   (a) $\{42\}; \{21, 21, 24, 30\}; \{12, 12, 12, 12, 21\}; \{2\}$
   (b) $\{\}; \{5\}; \{4, 3, 2, 1, 0\}$
2. Donner une suite strictement décroissante de longueur 421 partant de $\{2\}$.
3. Donner une suite strictement décroissante de longueur 12345641564 partant de $\{2\}$.
4. Existe-t-il un maximum et un minimum des multi-ensembles finis d'entiers naturels ?
5. Montrer qu'il n'y a pas de suite strictement décroissante infinie.

Exercice 2 Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *bien fondée* si il n'existe pas de suite infinie $(a_i)_{i \in \mathbb{B}}$ d'éléments de E telle que $(a_i, a_{i+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout i. Montrer que la fermeture transitive d'une relation bien fondée est bien fondée.

Exercice 3 Calculer la clôture inductive de $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ par

1. la fonction $plus_2$ telle que $plus_2(n) = n + 2$.
2. les fonctions f et g telles que : $f(n) = n + 10$ et $g(n) = -n$.

Exercice 4 Donner une définition inductive

1. des mots de longueur paire sur un alphabet A à partir de l'ensemble composé du mot vide $\{\varepsilon\}$.
2. des palindromes (les mots qui se lisent de la même manière dans les deux sens).
3. des arbres filiformes (un arbre est filiforme si chaque noeud a au plus un fils).
4. des expressions bien parenthésées (comme "()((()))").