

TD de *Logique et Circuits* n° 7  
(Correction)

## Calcul propositionnel

**Exercice 1** Soient  $A, B, C$  trois formules propositionnelles. Considérons les équivalences suivantes :

1.  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
2.  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
3.  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
4.  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

– Construire les tables de vérité associées à toutes les formules propositionnelles.

**Correction :** Les tables de vérité sont de la forme :

1.

$A$	$B$	$C$	$A$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	(1)
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$							
$V$	$V$	$F$							
$F$	$F$	$V$							
$V$	$F$	$V$							
$F$	$V$	$V$							
$V$	$V$	$V$							

2. Etc

– Quel est le lien entre les opérateurs ensemblistes et les connecteurs logiques ?

**Correction :** Soient  $A, B, C$  trois ensembles. Considérons les équations suivantes :

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4.  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

On remarque que  $\wedge$  est  $\cap$ ,  $\vee$  est  $\cup$  et  $\neg$  est  $\overline{\phantom{x}}$ .

**Exercice 2** Donner les interprétations des différentes lettres propositionnelles telles que :

1.  $p \rightarrow p$  est satisfaite.

**Correction :** N'importe quelle interprétation.

2.  $p \rightarrow (p \rightarrow p)$  est satisfaite.

**Correction :** N'importe quelle interprétation.

3.  $(\neg p) \rightarrow (q \rightarrow r)$  est satisfaite.

**Correction :**  $\{I | I(p) = V\}$  ou  $\{I | I(p) = F, I(q) = F\}$  ou  $(I(p) = F, I(q) = V, I(r) = V)$

4.  $p \vee q$  est satisfaite.

**Correction :**  $\{I|I(p) = V\}$  ou  $\{I|I(q) = V\}$ .

5.  $(\neg p) \vee q$  n'est pas satisfaite.

**Correction :**  $I(p) = V, I(q) = F$ .

6.  $p \vee (q \wedge r)$  est satisfaite.

**Correction :**  $\{I|I(p) = V\}$  ou  $(I(p) = F, I(q) = V, I(r) = V)$ .

7.  $p \vee (q \wedge r)$  n'est pas satisfaite.

**Correction :**  $I_1(p) = F, I_1(q) = F, I_1(r) = V$  ou  $I_2(p) = F, I_2(q) = V, I_2(r) = F$  ou  $I_3(p) = F, I_3(q) = F, I_3(r) = F$ .

8.  $p \wedge (q \rightarrow (r \wedge (s \wedge \neg s)))$  est satisfaite.

**Correction :**  $I_1(p) = V, I_1(q) = F$ .

Quelles sont les formules valides parmi les formules précédentes?

**Correction :** 1 et 2.

**Exercice 3** On définit une substitution dans les arbres représentant les formules propositionnelles.

1. Définir un type pour représenter les formules

**Correction :**

```
type formule = Lettre of char
             | Et of formule * formule
             | Ou of formule * formule
             | Neg of formule;;
```

2. On représente une position dans l'arbre d'une formule par une liste de déplacements gauche ou droite. Définir un type pour représenter un déplacement.

**Correction :**

```
type deplacement=Gauche|Droite;;
```

3. Comment représente-t-on une position?

**Correction :** Une liste de déplacements.

4. Écrire une fonction `echange arbre` échangeant les occurrences de `Et` et `Ou` dans la formule représentée par `arbre`.

**Correction :**

```
let rec echange=function
  Lettre a-> Lettre a
  | Neg(a)  -> Neg(echange a)
  | Et(a,b) -> Ou(echange a,echange b)
  | Ou(a,b) -> Et(echange a,echange b);;
```

5. Écrire une fonction `sous_arbre arbre position` renvoyant le sous-arbre de `arbre` à la position `position`. Si la position n'est pas atteignable, la fonction renvoie une erreur.

**Correction :**

```
let rec sous_arbre arbre position=
  match position with
  []-> arbre
  | Gauche::position->
    (match arbre with
     Et(a,_) -> sous_arbre a position
```

```

    | Ou(a,_) -> sous_arbre a position
    | Neg(a) -> sous_arbre a position
    | _->failwith "erreur"
  | Droite::position->
    (match arbre with
     Et(_,a) -> sous_arbre a position
    | Ou(_,a) -> sous_arbre a position
    | _->failwith "erreur");;

```

6. Écrire une fonction `substitue arbre1 position arbre2` renvoyant l'arbre `arbre1` dont le sous-arbre à la position `position` est substitué par `arbre2`.

**Correction :**

```

let rec substitue arbre1 position arbre2=
  match position with
  []-> arbre2
  | Gauche::position->
    (match arbre1 with
     Et(a,b)->Et(substitue a position arbre2,b)
    | Ou(a,b)->Ou(substitue a position arbre2,b)
    | Neg(a) ->Neg(substitue a position arbre2)
    | _->failwith "erreur")
  | Droite::position->
    (match arbre1 with
     Et(a,b)->Et(a,substitue b position arbre2)
    | Ou(a,b)->Ou(a,substitue b position arbre2)
    | _->failwith "erreur");;

```

**Exercice 4** On sait d'après le cours que la famille  $\vee, \wedge, \neg$  forme un système complet de connecteurs.

1. Montrer que la famille  $\vee, \neg$  forme un système complet.

**Correction :** On exprime  $\wedge$  avec  $\vee$  et  $\neg$ :

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

2. Montrer que la famille  $\wedge, \neg$  forme un système complet.

**Correction :**

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

**Exercice 5** On suppose une interprétation dans laquelle les affirmations suivantes sont vraies:

- A = Les huitres sont dépressives.
- B = Les oursins jouent de la contrebasse.
- C = Les arbres ne perdent jamais leurs feuilles.

Est-ce que les phrases suivantes sont vraies ou fausses?

1. Il est faux que ou bien les huitres soient dépressives, ou bien les oursins jouent de la contrebasse.

**Correction :**

$$\neg(A \vee B)$$

fausse

On peut aussi modeliser avec le ou exclusif. Dans ce cas la phrase est vraie.

2. Les huitres sont dépressives et il est faux que les arbres ne perdent jamais leurs feuilles.

**Correction :**

$$A \wedge (\neg C)$$

fausse

3. S'il est faux que les huitres soient dépressives, alors il est faux que les arbres ne perdent jamais leurs feuilles.

**Correction :**

$$(\neg A) \rightarrow (\neg C)$$

vraie

4. Les oursins jouent de la contrebasse si et seulement s'il est faux que les arbres ne perdent jamais leurs feuilles ou que les huitres ne sont pas dépressives.

**Correction :**

$$B \leftrightarrow (\neg C \vee \neg A)$$

fausse

Ambiguïté dans la phrase en français, donc discuter de toutes les possibilités.