Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TD de *Logique et Circuits* n° 9

Induction sur les entiers

Exercice 1 Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Posons

$$R^0 = id, R^{i+1} = R \circ R^i.$$

Montrer que $\forall i, j \geq 0, R^{i+j} = R^i \circ R^j$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les mots sur un alphabet A donné. Montrer que pour tous mots u, v dans $\mathcal{M}$, on a :

$$u \cdot v = v \cdot u \Longleftrightarrow \exists w \in \mathcal{M}, \exists p, q \in \mathbb{N} \mid u = w^p \text{ et } v = w^q.$$

Exercice 3 Une fonction récursive f peut être exprimée sous la forme d'une équation récursive de la forme :

$$f(x) = g(x, f(h(x)))$$

Où h et g sont des fonctions telles que $h(x) < x$. Déterminer la fonction f dans les cas suivants :

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(0) = 1$, $h(x) = x - 1$ et $g(x, y) = 2y$,
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, $h(x) = x - 1$ et $g(x, y) = y + 2x - 1$,
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, $h(x) = [x/2]$ et

$$g(x, y) = \begin{cases} 4y & : \text{ si } x \text{ pair} \\ 4y + 9(2x - 1) & : \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 On appelle F_n le n-ième nombre de Fibonacci : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire une fonction `let rec fibo n` qui calcule F_n.
2. Soit r_n le nombre d'appels de `fibo` pour le calcul de F_n. Montrer que $r_n = 2F_{n+1} - 1$.
3. Donner des arguments intuitifs au fait que le temps d'exécution de la fonction `fibo` est exponentiel.
4. Écrire une fonction `let rec iter n f x` qui calcule $f^n(x)$ $(f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), \ldots, f^{i+1}(x) = f\big(f^i(x)\big))$.
5. On remarque que $(F_{n+2}, F_{n+1}) = s(F_{n+1}, F_n)$, où s est une fonction qui à une paire (x, y) associe la paire $(x+y, x)$. Montrer que $(F_n, F_{n-1}) = s^{n-1}\big((F_1, F_0)\big)$ pour $n \geq 1$. En déduire une fonction `let fibp n` qui calcule F_n en un temps linéaire.
6. Soit la fonction $fib(n) = (F_n, F_{n-1})$. Exprimer $fib(n)$ sous la forme d'une équation récursive.

Exercice 5 Soit `mod_m` la fonction définie comme suit :

```
let rec mod_m(n)= if m=0 then failwith''erreur''
                        else if n<m then n else mod_m(n-m);;
```

1. Que calcule cette fonction ?
2. Exprimer `mod_m` sous la forme d'une équation récursive.
3. Montrer que cette fonction termine.