Université Paris 7 - DEUG-MIAS Année 2004-2005

TP de *Logique et Circuits* n° 6

Arbres et induction

Exercice 1 On cherche à calculer l'ensemble des sous-arbres d'un arbre binaire.

1. Écrire un type `arbre` représentant les arbres binaires dont les feuilles sont des entiers.
2. Définir un arbre `a1` dont les feuilles sont $3, 4, 6$.
3. Écrire une fonction `sous_arbres_im` prenant un arbre `a` et renvoyant la liste composée de `a` et de ses deux sous-arbres immédiats.
4. Écrire une fonction `sous_arbres` prenant un arbre `a` et renvoyant la liste composée de `a` et de ses sous-arbres (la composition des listes `liste1` et `liste2` s'écrit `liste1 @ liste2`).

Exercice 2 On se propose de peigner des arbres.

1. Définir le type `arbre` des arbres binaires dont les noeuds sont étiquetés par des entiers.
2. Définir un arbre `a1` dont les noeuds sont étiquetés par $3, 4, 6$.
3. Un arbre peigne est un arbre dont tous les fils droits des noeuds internes sont des feuilles. Écrire une fonction `est_peigne` testant si un arbre est un arbre peigne.
4. Écrire une fonction `peigne` prenant un arbre et renvoyant un arbre peigne ayant les mêmes étiquettes. Tester sur `a1`.

Exercice 3 *Suite de Fibonacci.*
La suite de Fibonacci (F_n) est définie par récurrence par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire une fonction récursive `fibo` telle que `fibo n` calcule F_n.
2. Tester pour sur $1, 2, 10, 20, 30, 50, 60 \dots$
3. La n-ième itérée d'une fonction f est la fonction f^n définie par $f^0(x) = x$ et $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Écrire une fonction récursive `iter` à trois arguments telle que `iter n f x` calcule la `n`-ième itération de `f` en `x`.
4. On remarque que la suite (F_n) peut être définie par $(F_{n+2}, F_{n+1}) = s(F_{n+1}, F_n)$, où s la fonction qui à une paire (x, y) associe la paire $(x + y, x)$. Montrer que pour tout n on a $(F_n, F_{n-1}) = s^n(1, 0)$. En déduire une fonction `fibo2` qui calcule F_n en un temps linéaire.

Exercice 4 Pour tous entiers n et k avec $k \leq n$, on note C_n^k le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

1. Montrer que $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
2. Écrire une fonction `parmi` telle que `parmi n k` calcule C_n^k.
3. On veut maintenant connaître le nombre d'appels récurifs de la fonction `parmi` durant l'évaluation de `parmi n k`. Modifier votre fonction de manière à ce qu'elle renvoie une paire (v, c), où v est la valeur de `parmi n k` et c est le nombre d'appels récursifs de la fonction durant l'évaluation de `parmi n k`.

Exercice 5 Pour une entier positif n, on note $V(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture de n en binaire. Par exemple $V(0) = 0$, $V(4) = 1$ car $4 = (100)_2$ et $V(13) = 3$ car $13 = (1101)_2$.

1. Montrer que pour tout n on a $V(2n) = V(n)$ et $V(2n+1) = V(n) + 1$.
2. Écrire une fonction qui calcule $V(n)$.