
Notions mathématiques préliminaires

Ensembles

Définition : Le **produit cartésien** de n ensembles $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est l'ensemble de n -uplets $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{A}_i\}$. Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i , on note simplement par \mathcal{A}^n le produit $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soient deux ensembles t.q. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$.

- L'**intersection** de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \in \mathcal{B}\}$
- L'**union** de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ ou } e \in \mathcal{B}\}$
- La **différence** \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \notin \mathcal{B}\}$
- Le **complémentaire** de \mathcal{A} est $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{A} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \notin \mathcal{A}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble qui contient toutes les **parties** de l'ensemble \mathcal{A} .

2

Relations

Définition : Une **relation n-aire** sur $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ une relation **binaire**.

- R est **réflexive** ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \in R$. R est **irréflexive** ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \notin R$.
- R est **symétrique** si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$. R est **anti-symétrique** si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ implique $x = y$.
- R est **transitive** si pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$.

3

Relations d'équivalence

Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique et transitive.

La **classe d'équivalence** d'un élément $a \in \mathcal{A}$ par rapport à une relation d'équivalence \mathcal{R} est l'ensemble $[a] = \{b \in \mathcal{A} \mid a \mathcal{R} b\}$.

4

Congruences

Une relation d'équivalence \mathcal{R} est une **congruence** par rapport à une fonction n -aire f ssi pour tout $n \geq 0$, pour tout a_1, \dots, a_n et pour tout b_1, \dots, b_n

$a_1 \mathcal{R} b_1$ et ... et $a_n \mathcal{R} b_n$ implique $f(a_1, \dots, a_n) \mathcal{R} f(b_1, \dots, b_n)$

5

Composition de relations

Définition : Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors la **composition** de \mathcal{S} avec \mathcal{R} est une relation dans $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ t.q.

$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \exists z \in \mathcal{B} (x, z) \in \mathcal{R} \text{ et } (z, y) \in \mathcal{S}\}$.

6

Fonctions

Définition : Une **fonction** f entre deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} , notée $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, est une relation sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ t.q. pour tout x, y, z si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$.

Notation : On écrit $f(x)$ pour dénoter l'**unique** élément y t.q. $(x, y) \in f$ et $f(\mathcal{C}) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{C}, f(x) = y\}$.

On note $id_{\mathcal{A}}$ la fonction **identité** sur \mathcal{A} donnée par $id_{\mathcal{A}}(x) = x$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction.

- Le **domaine** de f est $Dom(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists y \in \mathcal{B}, (x, y) \in f\}$
- L'**image** de f est $Im(f) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{A}, (x, y) \in f\}$
- L'**inverse** de f est $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A} \mid (x, y) \in f\}$

7

Composition de fonctions

Définition :

- La **composition** de $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ avec $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est la fonction $f \circ g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, où $f \circ g(x) = f(g(x))$.
- La **n -composition** de f avec **elle-même**, notée f^n , est défini par récurrence sur n :
 - Si $n = 0$, alors $f^0 = id$
 - Si $n > 0$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$

Exercice : Soit $n > 0$. Montrer que $f^n = f^{n-1} \circ f$.

8

Propriétés des fonctions

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **injective** ssi pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **surjective** ssi pour tout $y \in \mathcal{B}$ il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Une fonction est **bijective** ssi elle est injective et surjective.

9

L'ordre produit

On considère le **produit cartésien** de n ensembles $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$.

Si chaque \mathcal{A}_i est muni d'un ordre strict \succ_i , alors l'**ordre produit** est défini par

$(a_1, \dots, a_n) \succ_{\times} (b_1, \dots, b_n)$ ssi $a_i \succ_i b_i$ pour tout $i = 1 \dots n$

Lemme : La relation \succ_{\times} est bien fondée ssi chaque relation \succ_i est bien fondée.

11

Préordres, ordres

Définition :

- Un **préordre** est une relation réflexive et transitive.
- Un **ordre** ou **ordre partiel** est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.

Notation : \geq

Définition : Un **ordre strict** est une relation irréflexive et transitive.

Notation : $>$

Définition : Un ordre strict sur \mathcal{A} est **bien fondé** ssi il n'existe aucune chaîne de la forme $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$, où tout $a_i \in \mathcal{A}$.

10

L'ordre lexicographique

Soit $>_{A_i}$ un ordre strict sur l'ensemble \mathcal{A}_i .

Ordre lexicographique sur le produit de 2 ensembles :

$(x, y) >_{lex} (x', y')$ ssi $(x >_{A_1} x')$ ou $(x = x' \text{ et } y >_{A_2} y')$

Exemple :

$(4, "abc") >_{lex} (3, "abc") >_{lex} (2, "abcde") >_{lex} (2, "bcde") >_{lex} (2, "e") >_{lex} (1, "e") >_{lex} (0, \epsilon)$

12

Ordre lexicographique (cas général)

Si chaque $>_{A_i}$ est un ordre strict sur l'ensemble \mathcal{A}_i , alors $>_{lex}$ est un ordre strict qui permet de comparer deux n -uplets de la manière suivante :

$$(x_1, \dots, x_n) >_{lex} (x'_1, \dots, x'_n) \text{ ssi } \exists 1 \leq j \leq n \\ (x_j >_{A_j} x'_j \text{ and } \forall 1 \leq i < j \ x_i = x'_i)$$

Théorème : Si chaque $>_{A_i}$ est un ordre strict bien fondé sur \mathcal{A}_i , alors l'ordre lexicographique $>_{lex}$ sur le produit de $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ est un ordre strict bien fondé sur $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

13

Avertissement : $\succ_{A_1 \times \dots \times A_n}^{lex}$ n'est pas l'ordre du dictionnaire !!

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Ackerman}(0, n) &= n+1 \\ \text{Ackerman}(m+1, 0) &= \text{Ackerman}(m, 1) \\ \text{Ackerman}(m+1, n+1) &= \text{Ackerman}(m, \text{Ackerman}(m+1, n)) \end{aligned}$$

14

Ordres multi-ensembles

Soit \mathcal{A} un ensemble. Un **multi-ensemble** de base \mathcal{A} est une fonction $\mathcal{M} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$.

Le multi-ensemble \mathcal{M} est **fini** si $\mathcal{M}(x) > 0$ seulement pour un nombre fini d'éléments de \mathcal{A} .

Notation : $\{\{a, a, b\}\}$.

Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux multi-ensembles. Le **multi-ensemble union** est définie par $\mathcal{M} \uplus \mathcal{N}(a) = \mathcal{M}(a) + \mathcal{N}(a)$.

15

Ordres multi-ensembles

Soit \succ un ordre strict. La relation \succ_{mul} associée est donnée par la **fermeture transitive** de la relation \succ_{mul}^1 :

$$\mathcal{M} \uplus \{\{x\}\} \succ_{mul}^1 \mathcal{M} \uplus \{\{y_1, \dots, y_n\}\}, \text{ où } n \geq 0 \text{ et } \forall i, x \succ y_i.$$

Exemple : $\{\{5, 3, 1, 1\}\} \succ_{mul} \{\{4, 3, 3, 1\}\}$.

Exercice : Si \succ est un ordre strict, alors \succ_{mul} est un ordre strict.

Théorème : Soit \succ un ordre strict sur \mathcal{A} , alors \succ est bien fondé ssi \succ_{mul} est bien fondé.

16

Exercice : Un homme possède une somme d'argent en euros.

Chaque jour il procède de la façon suivante :

- soit il jette une pièce de monnaie dans une fontaine,
- ou bien il change l'un de ses billets à la banque.

Montrer que ce processus termine, c'est à dire, que dans un temps fini l'homme reste sans argent.

17

Majorants/minorants et bornes supérieures/inférieures

Soit \mathcal{E} un ensemble muni d'un ordre \leq . Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

Définition :

Un **majorant** de \mathcal{A} est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $y \leq x$.

Un **minorant** de \mathcal{A} est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \leq y$.

La **borne supérieure** de \mathcal{A} , notée $sup(\mathcal{A})$, est le plus petit des majorants de \mathcal{A} (si z est un majorant de \mathcal{A} alors $sup(\mathcal{A}) \leq z$).

La **borne inférieure** de \mathcal{A} , notée $inf(\mathcal{A})$, est le plus grand des minorants de \mathcal{A} (si z est un minorant de \mathcal{A} alors $z \leq inf(\mathcal{A})$).

18

Fonctions monotones et points fixes

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction et soient $\leq_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{B}}$ deux ordres sur \mathcal{A} et \mathcal{B} respectivement.

La fonction f est **monotone** ssi $x \leq_{\mathcal{A}} y$ implique $f(x) \leq_{\mathcal{B}} f(y)$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une fonction.

Un **point fixe** de f est un élément $x \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) = x$.

Le **plus petit point fixe** de f est $inf(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Le **plus grand point fixe** de f est $sup(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

19