Le calcul des prédicats
Sémantique

La notion d'interprétation

Définition : L'interprétation $\mathcal{I}$ d'une signature $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$ est un couple $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q.

- Le domaine $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide.
- I est une fonction.
- I associe à chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n une fonction totale $I(f) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$.

  Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $I(f)$ est une fonction constante (*i.e.* un élément du domaine $\mathcal{D}$).
- I associe à chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n une relation (*i.e.* un prédicat) $I(p) \subseteq \mathcal{D}^n$. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléene totale $I(p) : \mathcal{D}^n \to \mathbf{BOOL}$.

  Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $I(p)$ est une fonction booléene constante, donc **V** ou **F**.

Premier Exemple

Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \{b/0, c/1\}$ et $\Sigma_P = \{s/0, q/1, r/2, p/3\}$.
Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$, où $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et I est l'interprétation donnée par:

Les fonctions:

- $I(b) = 2$ (*i.e.* $I(b)$ est un élément du domaine),
- $I(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$ (*i.e.* $I(c)$ est une fonction unaire sur $\mathcal{D}$, donc *e.g.* $I(c)(3) = 4$).

Les prédicats:

- $I(s) = \mathbf{F}$ (*i.e.* $I(s)$ est une valeur booléene).
- $I(q) = D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (un prédicat unaire sur $\mathcal{D}$), Donc *e.g.* $I(q)(4) = \mathbf{V}$.
- $I(r) = \{(2, 2)\}$ (un prédicat binaire sur $\mathcal{D}$), Donc *e.g.* $I(r)(2, 2) = \mathbf{V}$ et $I(r)(2, 4) = \mathbf{F}$.
- $I(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$ (un prédicat ternaire sur $\mathcal{D}$), Donc *e.g.* $I(p)(1, 2, 5) = \mathbf{V}$ et $I(p)(2, 2, 2) = \mathbf{F}$.

Les valuations

Définition : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation pour la signature Σ et soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans $\mathcal{I}$ est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Valeur d'un terme

Définition : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation pour la signature Σ et soit σ une assignation dans $\mathcal{I}$. Alors la valeur d'un terme de l'ensemble $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{I}$ pour σ est une fonction $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto \mathcal{D}$ définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = I(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Des opérations sur l'ensemble **BOOL**

On définit sur l'ensemble **BOOL** $= \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ les opérations de somme et de produit suivantes:

$$\begin{array}{llcll}
\mathbf{V} + \mathbf{V} & := \mathbf{V} & \quad & \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} & := \mathbf{V} \\
\mathbf{V} + \mathbf{F} & := \mathbf{V} & & \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{V} & := \mathbf{V} & & \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{F} & := \mathbf{F} & & \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} & := \mathbf{F}
\end{array}$$

- On écrit $\Sigma_{j \in J} v_j$ l'expression qui représente la somme potentiellement infinie de tous les v_j $(j \in J)$.
  Dans le cas vide $J = \emptyset$, on a $\Sigma_{j \in J} v_j = \mathbf{F}$.
- On écrit $\Pi_{j \in J} v_j$ l'expression qui représente le produit potentiellement infini de tous les v_j $(j \in J)$.
  Dans le cas vide $J = \emptyset$, on a $\Pi_{j \in J} v_j = \mathbf{V}$.

Valeur d'une formule

Définition : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation pour la signature Σ et soit σ une assignation dans $\mathcal{I}$. La valeur d'une formule de l'ensemble $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{I}$ pour σ est une opération $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto$ **BOOL** définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = I(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_\neg([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{FB}_\#([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Sigma_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$
- $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$

Le cas du quantificateur existentiel

- Le calcul de $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma}$ est en général infini:

$$[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d_1]} + [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d_2]} + \ldots \ldots (d_i \in \mathcal{D})$$

- Il suffit d'une seule valeur **V** pour que le résultat final soit **V**, *i.e.*

$$\ldots + \mathbf{V} + \ldots = \mathbf{V}$$

- Mais il faut que toutes les valeurs soient **F** pour que le résultat final soit **F**, *i.e.*

$$\mathbf{F} \ldots + \mathbf{F} + \ldots \mathbf{F} = \mathbf{F}$$

- Comme $[A \vee B]_{\mathcal{I},\sigma} = [A]_{\mathcal{I},\sigma} + [B]_{\mathcal{I},\sigma}$, on dit que la disjonction $\vee$ est la version finie du quantificateur existentiel $\exists$.

Le cas du quantificateur universel

- Le calcul de $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma}$ est en général infini:

$$[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d_1]} \cdot [A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d_2]} \cdot \ldots \ldots (d_i \in \mathcal{D})$$

- Il suffit d'une seule valeur **F** pour que le résultat final soit **F**, *i.e.*

$$\ldots \cdot \mathbf{F} \cdot \ldots = \mathbf{F}$$

- Mais il faut que toutes les valeurs soient **V** pour que le résultat final soit **V**, *i.e.*

$$\mathbf{V} \ldots \cdot \mathbf{V} \cdot \ldots \mathbf{V} = \mathbf{V}$$

- Comme $[A \wedge B]_{\mathcal{I},\sigma} = [A]_{\mathcal{I},\sigma} \cdot [B]_{\mathcal{I},\sigma}$, on dit que la conjonction $\wedge$ est la version finie du quantificateur universel $\forall$.

Suite Premier Exemple

Soit $\Sigma_F = \{b/0, c/1\}$ et $\Sigma_P = \{s/0, q/1, r/2, p/3\}$.
Soit $\mathcal{D} = \{1,2,3,4,5\}$, et I l'interprétation donnée par:

- $I(b) = 2$,
- $I(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$,
- $I(s) = \mathbf{F}$,
- $I(q) = \{1,2,3,4,5\}$,
- $I(r) = \{(2,2)\}$.
- $I(p) = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$,

Soit σ n'importe quelle valuation. Alors

- $[r(x,x)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=1]} = I(r)(1,1) = \mathbf{F}$.
- $[r(c(x),c(x))]_{\mathcal{I},\sigma[x:=1]} = I(r)(I(c)(1), I(c)(1)) = I(r)(2,2) = \mathbf{V}$.
- $[q(y)]_{\mathcal{I},\sigma[y:=3]} = I(q)(3) = \mathbf{V}$.
- $[p(x,y,z)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=2][y:=2][z:=4]} = I(p)(2,2,4) = \mathbf{F}$.

- $$\begin{aligned}&[\forall x\ r(x,x)]_{\mathcal{I},\sigma} =\\ &\Pi_{d\in\mathcal{D}}[r(x,x)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} =\\ &I(r)(1,1)\cdot I(r)(2,2)\cdot I(r)(3,3)\cdot I(r)(4,4)\cdot I(r)(5,5) =\\ &\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{F}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&[\exists x\ r(x,x)]_{\mathcal{I},\sigma} =\\ &\Sigma_{d\in\mathcal{D}}[r(x,x)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} =\\ &I(r)(1,1) + I(r)(2,2) + I(r)(3,3) + I(r)(4,4) + I(r)(5,5) =\\ &\mathbf{F}+\mathbf{V}+\mathbf{F}+\mathbf{F}+\mathbf{F} = \mathbf{V}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&[\forall x\ (q(x)\wedge q(c(x))]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{d\in\mathcal{D}}[q(x)\wedge q(c(x))]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} =\\ &\mathcal{FB}_\wedge(I(q)(1), I(q)(I(c)(1)))\cdot\mathcal{FB}_\wedge(I(q)(2), I(q)(I(c)(2)))\cdot\ldots =\\ &\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V}, I(q)(2))\cdot\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V}, I(q)(3))\cdot\ldots\cdot\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V}, I(q)(1)) =\\ &\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V},\mathbf{V})\cdot\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V},\mathbf{V})\cdot\ldots\cdot\mathcal{FB}_\wedge(\mathbf{V},\mathbf{V}) =\\ &\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\cdot\ldots\cdot\mathbf{V} =\\ &\mathbf{V}\end{aligned}$$

D'autres formules à interpréter

- $(\forall x\ \forall y\ r(x,y) \wedge (\exists z\ r(z,z)))$
- $(\exists x\ p(x,x,x)) \vee (\forall y\ \forall z\ r(y,z))$
- $(\forall x\ \forall y\ r(b,b)) \rightarrow r(b,c(b))$
- $\forall x\ (q(x) \rightarrow r(x,x))$
- $\exists x\ \neg(q(x) \wedge r(x,x))$

Deuxième exemple

Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \emptyset$ et $\Sigma_P = \{r/1\}$.
Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation pour Σ, et σ une valuation. Nous avons trois cas pour définir $I(r)$:

- Si $I(r) = \mathcal{D}$, alors $[\forall x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ et $[\exists x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Si $I(r) = \emptyset$, alors $[\forall x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$ et $[\exists x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$.
- Si $\emptyset \subset I(r) \subset \mathcal{D}$, alors $[\forall x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$ mais $[\exists x.r(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.

Troisième exemple

Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$, où $\Sigma_F = \emptyset$ et $\Sigma_P = \{A/2\}$. La notation $A(x, y)$ signifie "x aime y". Soit $D = \{a, b, c, d, e\}$.

Il y a 10 formules que l'on peut construire avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, le symbole de prédicat A, et aucun symbole de fonction ni connecteur logique. Parmi ces 10 formules on retrouve 8 significations différentes. Dans les diagrammes suivants, le rouge dans la ligne x et la colonne y signifie que "x aime y".

Quelqu'un s'aime soit même
$\exists x.A(x, x)$

	a	b	c	d	e
a					
b		■			
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(b, b)\}$, alors $[\exists x.A(x, x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Tout le monde s'aime soit même
$\forall x.A(x, x)$

	a	b	c	d	e
a	■				
b		■			
c			■		
d				■	
e					■

Si $I(A) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$, alors $[\forall x.A(x, x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Tout le monde aime quelqu'un

$\forall x.\exists y.A(x,y)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(a,c),(b,a),(c,d),(d,c),(e,a)\}$, alors $[\forall x.\exists y.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Tout le monde est aimé par quelqu'un

$\forall x.\exists y.A(y,x)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(a,b),(a,e),(c,a),(d,c),(d,d)\}$, alors $[\forall x.\exists y.A(y,x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Quelqu'un aime tout le monde

$\exists x.\forall y.A(x,y)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e)\}$, alors $[\exists x.\forall y.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Quelqu'un est aimé par tout le monde

$\exists x.\forall y.A(y,x)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(a,b),(b,b),(c,b),(d,b),(e,b)\}$, alors $[\exists x.\forall y.A(y,x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Quelqu'un aime quelqu'un

$\exists x.\exists y.A(x,y)$

Quelqu'un est aimé par quelqu'un

$\exists y.\exists x.A(x,y)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{(c,b)\}$, alors $[\exists x.\exists y.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = [\exists y.\exists x.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Tout le monde aime tout le monde

$\forall x.\forall y.A(x,y)$

Tout le monde est aimé par tout le monde

$\forall y.\forall x.A(x,y)$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Si $I(A) = \{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}$, alors $[\forall x.\forall y.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = [\forall y.\forall x.A(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, pour toute valuation σ.

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- $\mathcal{I}$ satisfait une formule B s'il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ t.q. $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Une formule B est satisfaisable s'il existe $\mathcal{I}$ qui satisfait B.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et validité

Définition :

- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle d'une formule B ssi $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$.
- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle d'un ensemble de formules Δ ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de toutes les formules de Δ.
- La formule B est valide ssi toute interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de B.

Pour retenir.....

	Interprétation $\mathcal{I}$	Valuation σ
Formule satisfiable	il existe	il existe
Formule admet modèle	il existe	pour toute
Formule valide	pour toute	pour toute

Formule satisfiable - Exemple

- La formule $\forall x.p(x,y)$ est satisfiable.

  En effet, soient
  - $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, où $I(p) = \{(n,3) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une relation binaire.
  - $\sigma(y) = 3$.

  Alors $[\forall x.p(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{n \in \mathbb{N}} I(p)(n,3) = \mathbf{V} \cdot \ldots \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

- Mais $\mathcal{I}$ n'est pas un modèle pour $\forall x.p(x,y)$.

  En effet, soit $\sigma'(y) = 6$, on a $[\forall x.p(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma'} = \mathbf{F}$.

Formule qui admet un modèle - Exemple

- La formule $\forall x.p(x,y)$ admet un modèle.

  En effet, soient
  - $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, où $I(p) = \{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}\}$ est une relation binaire.
  - σ est une valuation quelconque.

  Alors $[\forall x.p(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \Pi_{n \in \mathbb{N}} I(p)(n, \underbrace{\sigma(y)}_{\text{dans } \mathbb{N}}) = \mathbf{V} \cdot \ldots \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

- Mais la formule $\forall x.p(x,y)$ n'est pas valide.

  En effet, si $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, où $I(p) = \{(2,3)\}$, et σ est une valuation quelconque, alors $[\forall x.p(x,y)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$.

Formule valide - Exemple

La formule $A = \exists x.[r(x) \rightarrow \forall y.r(y)]$ (dite drinking formula) est valide.

En effet, soient
- $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation quelconque (rappel $\mathcal{D} \neq \emptyset$).
- σ est une valuation quelconque.

Alors $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = \Sigma_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{FB}_{\rightarrow}(I(r)(d), \Pi_{d' \in \mathcal{D}}(I(r)(d')))$.
- Si tout le monde boit, *i.e.* $I(r) = \mathcal{D}$, alors $I(r)(d')$ est toujours $\mathbf{V}$ et donc $\Pi_{d' \in \mathcal{D}}(I(r)(d')) = \mathbf{V}$. Puis $\mathcal{FB}_{\rightarrow}(\ldots, \mathbf{V}) = \mathbf{V}$, d'où le résultat $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Si quelqu'un ne boit pas, *i.e.* il existe $e \notin I(r)$, alors $I(r)(e) = \mathbf{F}$ et $\mathcal{FB}_{\rightarrow}(I(r)(e), \ldots) = \mathbf{V}$, d'où le résultat $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.

A propos de la clôture existentielle

- $p(x)$ est *satisfaisable* s'il existe une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ telles que $[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et il existe σ t.q. $I(p)(\sigma(x)) = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et il existe $\sigma(x) = d' \in D$ t.q. $I(p)(d') = \mathbf{V}$.
- $\exists x.p(x)$ est *satisfaisable* s'il existe une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ telles que $\Sigma_{d \in D}[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et il existe $d' \in D$ t.q. $I(p)(d') = \mathbf{V}$.

Conséquence: $p(x)$ est satisfaisable ssi $\exists x.p(x)$ est satisfaisable.

Clotûre existentielle

Soit B une formule, soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son ensemble de variables libres. La clotûre existentielle de B est la formule $\exists x_1 \ldots \exists x_n.B$.

Lemme : La formule B est satisfaisable ssi la clotûre existentielle de B est satisfaisable.

A propos de la clôture universelle

- $p(x)$ possède un *modèle* s'il existe une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q. pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$ $[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q. pour toute σ on a $I(p)(\sigma(x)) = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q. pour tout $\sigma(x) = d' \in D$ on a $I(p)(d') = \mathbf{V}$.
- $\forall x.p(x)$ possède un modèle s'il existe une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q. pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$ $\Pi_{d \in D}[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$, i.e.
  s'il existe $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q. pour tout $d' \in D$ on a $I(p)(d') = \mathbf{V}$.

Conséquence:
$p(x)$ possède un modèle ssi $\forall x.p(x)$ possède un modèle.

Clotûre universelle

Soit B une formule, soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son ensemble de variables libres. La clotûre universelle de B est la formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n.B$.

Lemme :

- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de B ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de la clôture universelle de B.
- La formule B est valide ssi la clotûre universelle de B est valide.

(In)décidabilité

- Le problème de satisfiabilité d'une formule du calcul des prédicats est indécidable.
  La preuve utilise les machines de Turing et le problème de l'arrêt.
- Le problème de validité d'une formule du calcul des prédicats est indécidable.
  Néanmoins il est semi-décidable.

Conséquence logique

Définition :

- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si tout modèle de Δ est aussi un modèle de B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Exemple de conséquence logique

$$\{p(x)\} \models \forall x.p(x)$$

Preuve : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ un modèle de la formule $p(x)$.
Alors $[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$,
donc $I(p)(\sigma(x)) = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma(x) \in D$,
donc $I(p)(d) = \mathbf{V}$ pour tout $d \in D$,
donc $\Pi_{d\in\mathcal{D}}[p(x)]_{\mathcal{I},\sigma'[x:=d]} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ',
donc $[\forall x.p(x)]_{\mathcal{I},\sigma'} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ'.
On conclut que $\mathcal{I}$ un modèle de la formule $\forall x.p(x)$.

D'autres exemples de conséquence logique

$$\begin{array}{lcl} \exists y.\ \forall x.\ A & \models & \forall x.\ \exists y.\ A \\ \exists x.\ (A \wedge B) & \models & \exists x.\ A \wedge \exists x.\ B \\ \forall x.\ A \vee \forall x.\ B & \models & \forall x.\ (A \vee B) \end{array}$$

Quelques exemples d'équivalence

$$\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & \\
\forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A &
\end{array}$$

Remarques

- $A \models B$ n'est pas équivalent à $A \rightarrow B$ valide, mais à $(\forall \vec{x}.A) \rightarrow (\forall \vec{y}.B)$ valide.
- $A \equiv B$ n'est pas équivalent à $A \leftrightarrow B$ valide, mais à $(\forall \vec{x}.A) \leftrightarrow (\forall \vec{y}.B)$ valide.

Voir TD.