Le calcul propositionnel

Rappels et notations

Logique Propositionnelle

- Syntaxe
- Sémantique
- Systèmes de preuves
  - Systèmes de preuves sémantiques (tables de vérité)
  - Systèmes de preuves syntaxiques

Syntaxe de la logique propositionnelle

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble dénombrable de symboles $p, q, r, \ldots$ dites lettres propositionnelles.

Définition : L'ensemble des formules de la logique propositionnelle, que l'on écrit `Form`, est le plus petit ensemble engendré par les règles suivantes:

$$\frac{p \in \mathcal{R}}{p \ \mathtt{Form}}$$

$$\frac{A_1 \ \mathtt{Form} \qquad A_2 \ \mathtt{Form}}{A_1 \vee A_2 \ \mathtt{Form}} \qquad \frac{A_1 \ \mathtt{Form} \qquad A_2 \ \mathtt{Form}}{A_1 \wedge A_2 \ \mathtt{Form}}$$

$$\frac{A_1 \ \mathtt{Form} \qquad A_2 \ \mathtt{Form}}{A_1 \rightarrow A_2 \ \mathtt{Form}} \qquad \frac{A \ \mathtt{Form}}{\neg A \ \mathtt{Form}}$$

Exemple : $\neg p, p \vee p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r$.

Remarque : `Form` est un ensemble inductif, donc on pourra lui appliquer le principe d'induction.

Notation : On écrira $\#$ pour dénoter un symbole binaire quelconque dans l'ensemble $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, i.e. $A \# B$ indique une formule de la forme $A \vee B$ ou bien une formule $A \wedge B$ ou bien $A \rightarrow B$.

Sous-formules

L'ensemble $\mathcal{SF}(A)$ des sous-formules d'une formule A est défini inductivement comme suit:

- Si A est une lettre p, $\mathcal{SF}(A) = \{p\}$.
- Si A est $\neg B$, $\mathcal{SF}(A) = \{\neg B\} \cup \mathcal{SF}(B)$.
- Si A est $B \# C$, $\mathcal{SF}(A) = \{B \# C\} \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$.

Le nombre d'opérateurs $op(A)$ d'une formule A est définie inductivement:

- Si A est une lettre p, $op(A) = 0$.
- Si A est $\neg B$, $op(A) = op(B) + 1$.
- Si A est $B \# C$, $op(A) = op(B) + op(C) + 1$.

Théorème : Pour toute formule $A \in \texttt{Form}$ on a $|\mathcal{SF}(A)| \leq 2 * op(A) + 1$.

Preuve au tableau.

Sémantique de la logique propositionnelle

Étant donnée une valeur de l'ensemble $\textbf{BOOL} = \{\textbf{V}, \textbf{F}\}$ pour chaque lettre propositionnelle, on veut établir la valeur d'une formule propositionnelle A.

- Fixer une interprétation $I : \mathcal{R} \to \textbf{BOOL}$ qui donne **V** ou **F** à chaque lettre propositionnelle.
- Définir la fonction booléenne unaire $\mathcal{FB}_\neg : \textbf{BOOL} \to \textbf{BOOL}$ et les fonctions booléennes binaires $\mathcal{FB}_\vee, \mathcal{FB}_\wedge, \mathcal{FB}_\to : \textbf{BOOL}^2 \to \textbf{BOOL}$.
- Construire la valeur de vérité de la formule A.

La fonction booléenne unaire

$$
\begin{aligned}
\mathcal{FB}_\neg(\textbf{V}) &= \textbf{F} \\
\mathcal{FB}_\neg(\textbf{F}) &= \textbf{V}
\end{aligned}
$$

Les fonctions booléennes binaires

$$
\begin{aligned}
\mathcal{FB}_\vee(\textbf{V},\textbf{V}) &= \textbf{V} & \mathcal{FB}_\wedge(\textbf{V},\textbf{V}) &= \textbf{V} \\
\mathcal{FB}_\vee(\textbf{V},\textbf{F}) &= \textbf{V} & \mathcal{FB}_\wedge(\textbf{V},\textbf{F}) &= \textbf{F} \\
\mathcal{FB}_\vee(\textbf{F},\textbf{V}) &= \textbf{V} & \mathcal{FB}_\wedge(\textbf{F},\textbf{V}) &= \textbf{F} \\
\mathcal{FB}_\vee(\textbf{F},\textbf{F}) &= \textbf{F} & \mathcal{FB}_\wedge(\textbf{F},\textbf{F}) &= \textbf{F}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{FB}_\to(\textbf{V},\textbf{V}) &= \textbf{V} \\
\mathcal{FB}_\to(\textbf{V},\textbf{F}) &= \textbf{F} \\
\mathcal{FB}_\to(\textbf{F},\textbf{V}) &= \textbf{V} \\
\mathcal{FB}_\to(\textbf{F},\textbf{F}) &= \textbf{V}
\end{aligned}
$$

Valeur de vérité d'une formule A par rapport à une interprétation I

- Si A est une lettre p, $[A]_I = I(p)$.
- Si A est $\neg B$, $[A]_I = \mathcal{FB}_\neg([B]_I)$.
- Si A est $B\#C$, $[A]_I = \mathcal{FB}_\#([B]_I, [C]_I)$.

Exercice : Soit I l'interprétation $I(p) = \mathbf{V}$, $I(q) = \mathbf{F}$. Calculer la valeur de vérité de la formule $(p \vee q) \rightarrow \neg(q \wedge q)$ par rapport à I.

Tables de vérité

À quoi ça sert? Méthode pour raisonner sur les modèles de formules propositionnelles.
Comment ça marche? Soit A une formule ayant comme lettres propositionnelles l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_n\}$ et dont l'ensemble de sous-formules est $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

1. Construire une table où chaque colonne est étiquetée soit par une lettre p_i soit par une sous-formule A_j.
2. Pour chaque ligne m de la table :
   1. Donner une interprétation I_m aux lettres $p_1, \ldots, p_n$.
   2. Calculer les valeurs $[A_1]_{I_m}, \ldots, [A_k]_{I_m}$

Exemple

p	q	r	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$(r \wedge \neg q)$	$((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q))$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
			$\neg$(2)	(1) $\wedge$ (2)	(3) $\wedge$ (4)	(5) $\vee$ (6)
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**

Satisfaire et falsifier une formule

Soit I une interprétation, A une formule et Δ un ensemble de formules.

Définition :
I satisfait une formule A si $[A]_I = \mathbf{V}$
I falsifie une formule A si $[A]_I = \mathbf{F}$.
I satisfait un ensemble de formules Δ si I satisfait toute formule de Δ.
I falsifie un ensemble de formules Δ ssi il existe au moins une formule A dans Δ telle que $[A]_I = \mathbf{F}$.

En particulier,
I satisfait $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ssi I satisfait $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.
I falsifie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ssi I falsifie $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Formules satisfaisables, contradictoires, valides

Définition : Une formule A est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I qui satisfait A. Un ensemble de formules Δ est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait Δ, c'est à dire s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait toutes les formules de Δ en même temps.

Définition : Une formule A est falsifiable s'il existe au moins une interprétation I qui falsifie A. Un ensemble de formules Δ est falsifiable s'il existe au moins une interprétation I telle que I falsifie Δ, c'est à dire s'il existe au moins une interprétation I et il existe au moins une formule A dans Δ telles que I falsifie A.

Définition : Une formule A est valide si toute interprétation satisfait A. Un ensemble de formules Δ est valide si toute formule de Δ est valide.

Définition : Une formule A est contradictoire ou insatisfaisable si elle n'est pas satisfaisable, c'est à dire s'il n'existe pas d'interprétation I qui satisfait A (si toute interprétation falsifie A).
Un ensemble de formules Δ est contradictoire ou insatisfaisable si il n'est pas satisfaisable (s'il n'existe pas d'interprétation qui satisfait toutes les formules de Δ en même temps).

Exemples

Formule	Satisfaisable	Valide	Falsifiable	Contradictoire
$p \vee r$	*oui*	*non*	*oui*	*non*
$p \vee \neg p$	*oui*	*oui*	*non*	*non*
$p \wedge \neg p$	*non*	*non*	*oui*	*oui*

Comment lire une table de vérité?

- Si la colonne étiquetée par la formule A (qui est une sous-formule de A) ne contient que de **V**, alors A est valide.
- Si la colonne de la formule A ne contient que de **F**, alors A est contradictoire.
- Sinon, l'interprétation qui rends **V** la colonne de la formule A satisfait A et l'interprétation qui rends **F** la colonne de la formule A falsifie A.

Quelques formules valides célèbres

$A \vee \neg A$	tiers exclu
$\neg\neg A \rightarrow A$	élimination de la double négation
$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$	loi de Clavius
$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	loi de Peirce
$(\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow A \wedge \neg B$	principe du contre-example
$A \vee (A \rightarrow B)$	formule de Tarski
$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$	principe de linéarité

Validité par remplacement

Lemme : Soit A une formule et soit p une de ses lettres propositionnelles. Soit A' la formule obtenue à partir de A en remplaçant systématiquement p par une formule quelconque B. Si A est valide, alors A' est valide aussi.

Preuve par induction possible?

Example

$A = p \vee \neg p$, $A' = A[p/r \vee s] = (r \vee s) \vee \neg(r \vee s)$. Nous savons que A est valide, le lemma nous dit que A' est aussi valide.

Conséquence logique

Définition : Une formule A est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models A$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi A.

Exemple : $p \wedge q \models p$ mais $p \not\models p \wedge q$.

Équivalence logique

Définition : Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Remarque : $A \equiv B$ ssi $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ est valide.

Équivalence par remplacement

Lemme : Soit A, B, C trois formules et B une sous-formule de A. Si $B \equiv C$ alors $A \equiv A'$ où A' est obtenu à partir de A en remplaçant B par C.

Example

$A = (p \vee r) \wedge s$, $B = p \vee r$, $C = \neg(\neg p \wedge \neg r)$. On a $B \equiv C$ et $A' = A[B/C] = \neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge s$. Alors $A \equiv A'$.

Quelques équivalences à retenir

(Associativité)	$(A \vee B) \vee C$	$\equiv$	$A \vee (B \vee C)$
	$(A \wedge B) \wedge C$	$\equiv$	$A \wedge (B \wedge C)$
(Commutativité)	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
	$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$
(Idempotence)	$A \vee A$	$\equiv$	A
	$A \wedge A$	$\equiv$	A
(Lois de De Morgan)	$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
(Distributivité)	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(Loi de la double négation)	$\neg\neg A$	$\equiv$	A

(Définissabilité de $\rightarrow$)	$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
(Contreposition)	$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \rightarrow \neg A$
(Equivalence)	$A \leftrightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$
(Définissabilité équivalence)	$A \leftrightarrow B$	$\equiv$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
(Curryfication)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \rightarrow C$

Remarques

1. $\{E_1, \ldots, E_n\} \models A$ ssi la formule $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \rightarrow A$ est valide pour $n \geq 1$.
2. L'ensemble vide est satisfaisable et valide.
3. Toute formule valide est conséquence logique d'un ensemble quelconque de formules, en particulier de l'ensemble vide.
4. $\emptyset \models A$ ssi la formule A est valide.
5. Si Δ est satisfaisable et $\Gamma \subseteq \Delta$, alors Γ est satisfaisable.
6. L'ensemble de toutes les formules est contradictoire.
7. Si Γ est contradictoire et $\Gamma \subseteq \Delta$, alors Δ est contradictoire.
8. Toute formule est conséquence logique d'un ensemble insatisfaisable de formules.
9. A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable.
10. $\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ est insatisfaisable.