La résolution pour le calcul des prédicats

Méthode par réfutation - rappel :
A est une conséquence de Δ ssi
$\Delta \cup \{\neg A\}$ est insatisfaisable ssi
$\Delta \cup \{\neg A\}$ est réfutable.

Différentes étapes

Nous présentons une méthode de réfutation pour le calcul des prédicats:

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme normale conjonctive
- Forme clausale et renommage
- Règles de résolution
- Correction et complétude

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\ A$, où chaque Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A ne contient pas de quantificateur.

Exemple: La formule $\forall x.\exists z.(p(x) \wedge r(x,z))$ est une form prénexe. La formule $(\forall x.p(x)) \wedge (\exists z.r(x,z))$ n'est pas une form prénexe.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Preuve : Voir Tableau.

Calcul d'une forme prénexe

Utiliser les équivalences suivantes vues en cours comme des règles orientées:

$$
\begin{array}{lll}
\neg\exists x.\ A & \rightsquigarrow & \forall x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \rightsquigarrow & \exists x.\ \neg A \\
\forall x.\ A \wedge \forall x.\ B & \rightsquigarrow & \forall x.\ (A \wedge B) \\
\exists x.\ A \vee \exists x.\ B & \rightsquigarrow & \exists x.\ (A \vee B) \\
\forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B & \rightsquigarrow & \exists x.\ (A \rightarrow B) \\
A \wedge \forall x.\ B & \rightsquigarrow & \forall x.\ (A \wedge B), x \notin VI(A) \\
A \wedge \exists x.\ B & \rightsquigarrow & \exists x.\ (A \wedge B), x \notin VI(A) \\
A \vee \forall x.\ B & \rightsquigarrow & \forall x.\ (A \vee B), x \notin VI(A) \\
A \vee \exists x.\ B & \rightsquigarrow & \exists x.\ (A \vee B), x \notin VI(A) \\
A \rightarrow \exists x.\ B & \rightsquigarrow & \exists x.\ (A \rightarrow B), x \notin VI(A) \\
A \rightarrow \forall x.\ B & \rightsquigarrow & \forall x.\ (A \rightarrow B), x \notin VI(A) \\
\forall x.\ B \rightarrow A & \rightsquigarrow & \exists x.\ (B \rightarrow A), x \notin VI(A) \\
\exists x.\ B \rightarrow A & \rightsquigarrow & \forall x.\ (B \rightarrow A), x \notin VI(A)
\end{array}
$$

Exemples

$$
\begin{array}{lll}
(\forall x.p(x)) \wedge r(x) & \leadsto & \forall y.(p(y) \wedge r(x)) \\
(\forall x.p(x)) \wedge (\forall x.r(x)) & \leadsto & \forall x.(p(x) \wedge r(x)) \\
(\forall x.p(x)) \wedge (\forall x.r(x)) & \leadsto^2 & \forall x.\forall y.(p(x) \wedge r(y)) \\
(\forall x.p(x)) \vee (\forall x.r(x)) & \leadsto^2 & \forall x.\forall y.(p(x) \vee r(y)) \\
(\forall x.p(x)) \to (\exists y.r(y)) & \leadsto^2 & \exists x.\exists y.(p(x) \to r(y))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\neg[(\forall x.p(x)) \to (\exists y.r(y))] & \leadsto \\
\neg\exists x.[p(x) \to (\exists y.r(y))] & \leadsto \\
\neg\exists x.\exists y.[p(x) \to r(y)] & \leadsto \\
\forall x.\neg\exists y.(p(x) \to r(y)) & \leadsto \\
\forall x.\forall y.\neg(p(x) \to r(y)) &
\end{array}
$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} \ldots Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n-aire. La formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} \ldots Q_{n+i} x_{n+i}\ \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}(A)$ est une skolemisation partielle de G.

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' une skolemisation partielle de G. Alors G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Exemples

G' est une skolemisation partielle de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\exists z\ \forall y\ s(a, a, z)$
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, y)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, y)$

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs $\exists$. Une Skolemisation de G est une formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' une Skolemisation de la formule G. Alors

- Si G contient n quantificateurs $\exists$, G' contient au plus n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Exemples

G' est une Skolemisation de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ s(i(x, y), x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\forall y\ s(a, a, b)$

Remarque: pour chaque skolemisation partielle on choisit un nouveau symbole de fonction.

Forme normale conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La clause vide s'écrit `False`.
- Une formule est en forme normal conjonctive (FNC) ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La FNC vide s'écrit `True`.

Exemples

- `True` est une FNC.
- `False` est une FNC.
- $\neg p(h(x))$ est une FNC.
- $\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.
- $(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.
- $(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.
- $\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.
- $p(x) \wedge (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.
- $p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A sans quantificateurs, il existe une formule A' sans quantificateurs en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les transformations (équivalences) suivantes:

$A \rightarrow B$	$\rightsquigarrow$	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	$\rightsquigarrow$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\rightsquigarrow$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\rightsquigarrow$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \vee (B \wedge C)$	$\rightsquigarrow$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$(A \wedge B) \vee C$	$\rightsquigarrow$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$(A \wedge B) \wedge C$	$\rightsquigarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$
$(A \vee B) \vee C$	$\rightsquigarrow$	$A \vee (B \vee C)$

Exemple

$$
\begin{array}{ll}
[\neg(\neg p(x) \to q(x,y))] \vee p(a) & \leadsto \\
[\neg(\neg\neg p(x) \vee q(x,y))] \vee p(a) & \leadsto \\
[\neg(p(x) \vee q(x,y))] \vee p(a) & \leadsto \\
[\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)] \vee p(a) & \leadsto \\
[\neg p(x) \vee p(a)] \wedge [\neg q(x,y) \vee p(a)] &
\end{array}
$$

Unicité

La FNC d'une formule n'est pas unique.
Exemple:
$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \texttt{True}$.
Donc,
$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et $\texttt{True}$ sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Ensemble de clauses et renommage - Construction

Entrée: une formule A en FNC sans quantificateurs
Sortie: un ensemble de clauses C_A associé à A, où les clauses ne partagent pas de variables deux à deux

- Soit $A = C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$ une FNC, on construit l'ensemble de clauses $C_A := \{\texttt{renommage}_1(C_1), \ldots, \texttt{renommage}_n(C_n)\}$, où chaque $\texttt{renommage}_i$ utilise des nouvelles variables fraîches.

Entrée: en ensemble Δ de formules en FNC sans quantificateurs
Sortie: un ensemble de clauses C_Δ associé à Δ, où les clauses ne partagent pas de variables deux à deux

- Pour chaque $A \in \Delta$ calculer C_A en utilisant à chaque fois des nouvelles variables fraîches pour les renommages.

Exemple

Pour la FNC $A = [\neg p(x) \vee p(a)] \wedge [\neg q(x,y) \vee p(a)] \wedge [q(x,x) \vee p(x)]$ on obtient l'ensemble de clauses

$$C_A = \{\neg p(x_1) \vee p(a), \neg q(x_2, y) \vee p(a), q(x_3, x_3) \vee p(x_3)\}$$

Ensemble de clauses - Propriété

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit C_Δ l'ensemble de clauses associé à Δ.

Alors l'ensemble de formules $clu(\Delta)$ est satisfaisable ssi l'ensemble de clauses $clu(C_\Delta)$ est satisfaisable, où

- $clu(B)$ dénote la clôture universelle de la formule B
- $clu(\{B_1, \ldots, B_m\}) := \{clu(B_1), \ldots, clu(B_m)\}$

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule close G il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ appelé ensemble adapté à G t.q

- les clauses de $\mathcal{C}_G$ ne partagent pas de variables deux à deux,
- G est satisfaisable ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ est satisfaisable.

Preuve :

1. Calculer G_1, la forme prénexe de G_2. On a $G_1 \equiv G$.
2. Calculer $G_2 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m.A$ ($m \geq 0$), la Skolemisation de G_1. On a G_2 satisfaisable ssi G_1 satisfaisable.
3. Calculer A' la forme normal conjonctive de A. On obtient $G_3 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m.A' \equiv G_2$.
4. Soit $A' = C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$. On construit $\mathcal{C}_G = \{C'_1, \ldots, C'_n\}$ où chaque C'_i est un renommage de C_i t.q. les clauses de $\mathcal{C}_G$ ne partagent pas de variables deux à deux. On a G_3 satisfaisable ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ satisfaisable.
5. On a G satisfaisable ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ satisfaisable.

Exemple

$G = \neg[[q(a) \wedge (\forall x.(q(x) \rightarrow q(f(x))))] \rightarrow \exists z.q(f(f(z)))]$

1. $G_1 = \forall z.\forall x.\neg[[q(a) \wedge (q(x) \rightarrow q(f(x)))] \rightarrow q(f(f(z)))]$.
2. $G_2 = G_1$.
3. $G_3 = \forall z.\forall x.[[q(a) \wedge (\neg q(x) \vee q(f(x)))] \wedge \neg q(f(f(z)))]$.
4. $\mathcal{C}_G = \{q(a), \neg q(x) \vee q(f(x)), \neg q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$G = \exists u.[(\exists y.r(u,y) \vee \forall x.q(x,x)) \wedge (\neg \forall x.p(x)) \wedge p(u)]$.

1. $G_1 = \exists u.\exists x.\exists y.\forall z.((r(u,y) \vee q(z,z)) \wedge \neg p(x) \wedge p(u))$.
2. $G_2 = \forall z.((r(c,b) \vee q(z,z)) \wedge \neg p(a) \wedge p(c))$.
3. $G_3 = G_2$.
4. $\mathcal{C}_G = \{r(c,b) \vee q(z,z), \neg p(a), p(c)\}$.

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes :

$$\frac{}{C} \quad (C \in \Delta,\ \text{où } \Delta \text{ un ensemble de clauses}).$$

Règles d'inférence :

$$\frac{D \lor r(s_1,\ldots,s_n) \qquad C \lor \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \lor C)} \ (\mathit{coupure})$$

$$\frac{D \lor r(s_1,\ldots,s_n) \lor r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \lor r(s_1,\ldots,s_n))} \ (\mathit{factorisation})$$

$$\frac{D \lor \neg r(s_1,\ldots,s_n) \lor \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \lor \neg r(s_1,\ldots,s_n))} \ (\mathit{factorisation})$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ et les clauses C et D ne partagent pas de variables.

Les cas particuliers

Quelques cas particuliers lorsque r est 0-aire :

$$\frac{D \lor r \qquad C \lor \neg r}{D \lor C}\ (c) \qquad \frac{r \qquad \neg r}{\texttt{False}}\ (c) \qquad \frac{r \lor r}{r}\ (f) \qquad \frac{\neg r \lor \neg r}{\neg r}\ (f)$$

Quelques cas particulier lorsque $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ est unifiable avec une substitution σ :

$$\frac{r(s_1,\ldots,s_n) \qquad \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\texttt{False}}\ (c)$$

$$\frac{r(s_1,\ldots,s_n) \lor r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma r(s_1,\ldots,s_n)}\ (f) \qquad \frac{\neg r(s_1,\ldots,s_n) \lor \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma \neg r(s_1,\ldots,s_n)}\ (f)$$

Résolution pour le calcul des prédicats

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit :

- $\Gamma \vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble de clauses Γ par résolution (coupure et factorisation)
- $\Gamma \vdash_R \texttt{False}$ si $\texttt{False}$ est dérivée à partir de l'ensemble de clauses Γ par résolution (coupure et factorisation)

Notion de réfutation

Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi on obtient $\texttt{False}$ en appliquant la méthode de résolution, c'est à dire, si $\Delta \vdash_R \texttt{False}$.

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

H_1: $\exists x_0.t(x_0)$
H_2: $\forall x_2.(d(x_2) \to \forall x_1.r(x_1,x_2))$
H_3: $\forall x_3.\forall x_4.\neg(t(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3,x_4)$
H_4: $\neg\forall x_5.(\neg d(x_5) \lor \neg q(x_5))$

D'abord, on donne un ensemble de clauses C adapté à $\{H_1,H_2,H_3,H_4\}$,
$C = \{t(a), \neg d(x_2) \lor r(x_1,x_2), \neg t(x_3) \lor \neg q(x_4) \lor \neg r(x_3,x_4), d(b), q(b)\}$
Puis on donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\dfrac{\dfrac{}{d(b)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg d(x_2) \lor r(x_1,x_2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg t(x_3) \lor \neg q(x_4) \lor \neg r(x_3,x_4)} \qquad \dfrac{}{t(a)}}{\neg q(x_4) \lor \neg r(a,x_4)} \qquad \dfrac{}{q(b)}}{\neg r(a,b)}}{\neg d(b)}}{\texttt{False}}$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

J_1: $\exists x_0.t(x_0)$

J_2: $\forall x_2.(d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$

J_3: $\forall x_3.\forall x_4.\neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$

J_4: $\forall x_5.(\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

- D'abord on utilise le fait que J_4 est un conséquence de $\{J_1, J_2, J_3\}$ ssi $\{J_1, J_2, J_3, \neg J_4\}$ est réfutable.
- On constate que $\{J_1, J_2, J_3, \neg J_4\} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ (de l'exemple I), donc on conclut en appliquant le raisonnement de l'exemple précédent.

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x.p(x) \vee \exists y.\neg p(y)$ est valide.

- D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.
- On calcule un ensemble de clauses C adapté à $\neg J$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

- On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \qquad p(y)}{\texttt{False}}$$

Propriétés de la résolution

Soit Δ un ensemble de formules closes (sans variables libres).
Soit C_Δ un ensemble de clauses adapté à Δ.

Théorème : La résolution est correcte, i.e. si C_Δ est réfutable ($C_\Delta \vdash_R \texttt{False}$), alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète, i.e. si Δ est insatisfaisable, alors C_Δ est réfutable.