Les systèmes de preuves syntaxiques

Systèmes de preuves syntaxiques

- Calculs des séquents :
  - Déduction naturelle
  - Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
  - Résolution

Les séquents en logique

Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Un séquent est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des multi-ensembles de formules.

Ainsi par exemple, voici quelques séquents:

- $\vdash$
- $\vdash p \vee r, p \vee r$
- $q \rightarrow r \vdash$
- $p \vee r \vdash p \wedge s$
- $p \wedge s \vdash p \wedge s$
- $p \wedge s, p \wedge s, r, s \vdash r, u$

Formule associée à un séquent

On définit une formule $\texttt{True} \overset{def}{=} p \vee \neg p$ et une formule $\texttt{False} \overset{def}{=} p \wedge \neg p$.
On définit ensuite la conjonction vide comme la formule True et la disjonction vide comme la formule False.
La formule associée à un séquent de la forme $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ avec $n \geq 0, k \geq 0$ est donnée par :

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$$

En particulier,

- Si $n = 0$ et $k > 0$, on associe à $\vdash B_1, \ldots, B_k$ la formule
$$\texttt{True} \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_k) \equiv B_1 \vee \ldots \vee B_k$$
Car la conjonction vide est équivalente à la formule True.
- Si $k = 0$ et $n > 0$, on associe à $A_1, \ldots, A_n \vdash$ la formule
$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \texttt{False} \equiv \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$$
Car la disjonction vide est équivalente à la formule False.
- Si $n = k = 0$, la formule associée à $\vdash$ est donnée par $\texttt{True} \rightarrow \texttt{False}$

Sémantique d'un séquent

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ est valide.

Ainsi par exemple,

- $\vdash$ n'est pas valide
- $\vdash p, p$ n'est pas valide
- $p \vee q \vdash$ n'est pas valide
- $p \vee q \vdash r \wedge s$ n'est pas valide
- $A \vdash A$ est valide, pour n'importe quelle formule A
- $A, A, A, B \vdash B, C$ est valide, pour n'importe quelles formules A, B, C

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents on se donne un ensemble de règles d'inférence de la forme

$$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n \ (n \geq 0)}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Lorsque $n = 0$ on dit que la règle est un axiome.

Propriétés importantes:

- Chaque règle doit être correcte.
- L'ensemble des règles doit être complet.

Dérivations

Idée intuitive:

- Une dérivation Π est un arbre dont chaque noeud est un séquent.
- Chaque noeud est soit une feuille contenant un séquent, soit un noeud interne contenant un séquent et ayant une ou plusieurs dérivations comme enfants.
- On dessine une dérivation avec la racine en bas:

$$\dfrac{\dfrac{feuille \ldots feuille}{noeuf\ \ interne} \quad \ldots \quad \dfrac{\dfrac{feuille \ldots feuille}{noeud\ \ interne} \quad \ldots \quad \dfrac{feuille \ldots feuille}{noeud\ \ interne}}{noeud\ \ interne}}{racine}$$

Dérivations - définition inductive

Définition : La dérivation Π du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système $\mathcal{S}$, noté $\Pi \triangleright \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$, est un arbre fini de *séquents* tel que

- chaque feuille est la conclusion d'un axiome de $\mathcal{S}$.
- la racine de l'arbre Π est le séquent $\Delta \vdash \Gamma$.
- si $\Pi_i \triangleright_{\mathcal{S}} \Lambda_i \vdash \Psi_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et s'il existe une règle dans $\mathcal{S}$ de la forme

$$\frac{\Lambda_1 \vdash \Psi_1 \ldots \Lambda_n \vdash \Psi_n \ (n \geq 0)}{\Lambda \vdash \Psi}$$

alors, les dérivations $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ sont les enfants du séquent $\Lambda \vdash \Psi$.

Notation : On écrit $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est $\mathcal{S}$-dérivable. On écrit $\Pi \triangleright \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \Gamma$ pour dire que Π est la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{S}$. On écrit simplement $\Delta \vdash \Gamma$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Preuves et théorèmes

Définition : Soit $\mathcal{S}$ un système avec séquents. Une preuve d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$ est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans $\mathcal{S}$. Un théorème de $\mathcal{S}$ est un séquent de la forme $\vdash \Gamma$ ayant une preuve dans $\mathcal{S}$. Dans les théorèmes la partie gauche du séquent est vide.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour le calcul propositionnel

Séquents : un multi-ensemble de formules à gauche du symbole $\vdash$ et une seule formule à droite du symbole $\vdash$.

Axiome :

$$\frac{}{\Delta, A \vdash A}$$

Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} \ (\rightarrow i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} \ (\rightarrow e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B} \ (\wedge i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A} \ (\wedge e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B} \ (\wedge e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B} \ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B} \ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C} \ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A} \ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\,(\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\,(\neg e)$$

La dernière règle à droite s'appelle élimination de la double négation.

On note $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$ si le séquent $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}.

Exemples de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu

Soit $B = A \vee \neg A$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\neg B, A \vdash A}}{\neg B, A \vdash B}\,(\vee i) \qquad \cfrac{}{\neg B, A \vdash \neg B}}{\neg B \vdash \neg A}\,(\neg i)}{\neg B \vdash B}\,(\vee i) \qquad \cfrac{}{\neg B \vdash \neg B}}{\cfrac{\vdash \neg\neg B}{\vdash B}\,(\neg e)}\,(\neg i)$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

Soient $G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\neg G, H \to A \vdash H \to A} \qquad \neg G, H \to A \vdash H}{\neg G, H \to A \vdash A}\,(\to e)}{\neg G \vdash G}\,(\to i) \qquad \cfrac{}{\neg G \vdash \neg G}}{\cfrac{\vdash \neg\neg G}{\vdash G}\,(\neg e)}\,(\neg e)$$

Soient $G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\neg G, H \to A, A, H \to A \vdash A}}{\neg G, H \to A, A \vdash G}\,(\to i) \qquad \cfrac{}{\neg G, H \to A, A \vdash \neg G}}{\neg G, H \to A, A \vdash B}\,(\neg e)}{\neg G, H \to A \vdash H}\,(\to i)$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Notation: $\dfrac{\Delta \vdash A}{\Delta, B \vdash A}\ Aff.$

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Notation: $\dfrac{\Delta, B, B \vdash A}{\Delta, B \vdash A}\ Cont.$

Observations

L'élimination de la double négation entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce. Mais, aussi

- Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.
  Soit $F = (A \to B) \to A$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, F, A \vdash A}}{\Gamma, A \vdash F \to A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A, F \vdash F} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A} \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A}}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A \to B}}{\Gamma, \neg A, F \vdash A}}{\Gamma, \neg A \vdash F \to A}}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

Observations

- La loi de Peirce entraîne l'élimination de la double négation.
  On considère $\neg A \overset{def}{=} A \to \texttt{False}$, donc la formule $(\neg A \to A) \to A \equiv ((A \to \texttt{False}) \to A) \to A$ est un cas particulier de dérivation de la loi de Peirce. Ensuite:

$$\dfrac{\Delta \vdash (\neg A \to A) \to A \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta, \neg A \vdash \neg A} \quad \dfrac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg\neg A}\ (\text{Affaibl.})}{\Delta, \neg A \vdash A}}{\Delta \vdash \neg A \to A}}{\Delta \vdash A}$$

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est correct, i.e. si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est complet, i.e, si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Conséquences

- Pour montrer qu'une formule A est valide il suffit de chercher une dérivation du séquent $\vdash A$.
- Pour montrer qu'une formule A est contradictoire il suffit de chercher une dérivation du séquent $A \vdash$.
- Pour montrer qu'une formule A est conséquence logique de Δ il suffit de chercher une dérivation du séquent $\Delta \vdash A$.

Calcul de Gentzen *LK*

Séquents : un multi-ensemble de formules aussi bien à gauche qu'à droite du symbole $\vdash$. Les règles sont toutes multiplicatives.

Axiome :

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (\mathit{contraction}\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (\mathit{contraction}\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ (\mathit{affaiblissement}\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A}\ (\mathit{affaiblissement}\ d)$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \to B \vdash \Gamma, \Lambda}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi \vdash B, \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash A \wedge B, \Gamma, \Lambda}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \vee B \vdash \Gamma, \Lambda}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d) \qquad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Pi \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash \Gamma, \Lambda}$$

Dérivation dans LK

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK.
On note $\Pi \triangleright \Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si Π est l'arbre de dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système LK.

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(ax) \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,(ax)}{A, A \rightarrow B \vdash B}\,(\rightarrow\ g)}{A \wedge (A \rightarrow B) \vdash B}\,(\wedge\ g)}{\vdash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B}\,(\rightarrow\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\vdash A, \neg A}\,(\neg\ d)}{\vdash A, A \vee \neg A}\,(\vee\ d)}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\vee\ d)}{\vdash A \vee \neg A}\,(cont\ d)$$

Troisième exemple de dérivation dans LK

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{A \vdash B, A}\,(aff\ d)}{\vdash A \rightarrow B, A}\,(\rightarrow\ d) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A, A}\,(\rightarrow\ g)}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A}\,(cont\ d)}{\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}\,(\rightarrow\ d)$$

Propriétés du système LK

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans LK qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre la Déduction naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Si $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$, on note $\neg\Gamma$ le multi-ensemble $\neg C_1, \ldots, \neg C_n$.
Si $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$, on note $\bigvee \Gamma$ la formule $C_1 \vee \ldots \vee C_n$.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est correct, i.e. si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est complet, i.e. si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système $\mathcal{G}$

- Toutes les règles sont additives (différence importante pour les axiomes et les règles binaires).
- Aucune règle structurelle.

Axiome :

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \qquad A, \Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \to B \vdash \Gamma}\ (\to\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \to B, \Gamma}\ (\to\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Tiers exclu

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\ (ax)}{\vdash A, \neg A}\ (\neg\ d)}{\vdash A \vee \neg A}\ (\vee\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Loi de Peirce

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash B, A}\ (ax)}{\vdash A \to B, A}\ (\to\ d) \quad \cfrac{}{A \vdash A}\ (ax)}{(A \to B) \to A \vdash A}\ (\to\ g)}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\ (\to\ d)$$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Notation: $\dfrac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ Aff.$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash A, \Gamma}\ Aff.$

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Notation: $\dfrac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ Cont.$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A, A, \Gamma}{\Delta \vdash A, \Gamma}\ Cont.$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$.

Par exemple, la règle $(\wedge\ d)$ de LK $\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Pi \vdash B, \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash A \wedge B, \Gamma, \Lambda}\ (\wedge\ d)$

se traduit par une dérivation en $\mathcal{G}$ construite de la manière suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta, \Pi \vdash A, \Gamma}\ Aff.}{\Delta, \Pi \vdash A, \Gamma, \Lambda}\ Aff. \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \vdash B, \Lambda}{\Delta, \Pi \vdash B, \Lambda}\ Aff.}{\Delta, \Pi \vdash B, \Gamma, \Lambda}\ Aff.}{\Delta, \Pi \vdash A \wedge B, \Gamma, \Lambda}\ (\wedge\ d)$$

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK.

Par exemple, la règle $(\wedge\ d)$ de $\mathcal{G}$ $\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$

se traduit par la dérivation:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta, \Delta \vdash A \wedge B, \Gamma, \Gamma}\ (\wedge\ d)}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma, \Gamma}\ (\text{cont } g)}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\text{cont } d)$$

La double ligne veut dire que l'on applique la règle plusieurs fois.

Équivalence entre DN_{prop} et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee \bigvee \Gamma$

La propriété de réversibilité

Soit une règle d'inférence de la forme:

$$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n \ (n \geq 0)}{\Delta \vdash \Gamma}$$

On dit qu'elle est possède la propriété de réversibilité ssi la formule associée au séquent conclusion $\Delta \vdash \Gamma$ est logiquement équivalente à la conjonction des formules associées à ses prémisses $\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n$.
Voici un exemple de règle non réversible:

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee\ d)$$

Pour le montrer: supposer toutes les formules de Δ vraies, A fause, B vraie, et toutes les formules de Γ fauses.

La propriété de la sous-formule

On définit la taille d'une formule comme le nombre de ses variables et de ses connecteurs. Ainsi par exemple la taille de la formule $p \vee p \rightarrow q$ est 5. On définit ensuite la taille d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ comme la somme des tailles de toutes ses formules. Ainsi par exemple la taille de $p, p, r \vee s \vdash q \vee p$ est 8.
Soit une règle d'inférence de la forme:

$$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \ldots \Delta_n \vdash \Gamma_n \ (n \geq 0)}{\Delta \vdash \Gamma}$$

On dit qu'elle possède la propriété de la sous-formule ssi pour chaque $i = 1 \ldots n$, la taille du séquent $\Delta_i \vdash \Gamma_i$ est plus petite que la taille du séquent $\Delta \vdash \Gamma$.
On peut démontrer que toutes les règles du système $\mathcal{G}$ possèdent la propriété de la sous-formule sauf la coupure.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e. si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e. si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve :

- On construit un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système $\mathcal{G}$ sans coupures, en appliquant les règles du système "du bas vers le haut" aussi longtemps que possible.
- Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent "hypothèse" est plus petit que le séquent "conclusion" (propriété de sous-formule).
- Puisque le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

- Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome.
- On raisonne par l'absurde.
- Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille.
- Si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, il est de la forme $p_1, \ldots, p_m \vdash q_1, \ldots q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j.
- L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent. Contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

Retour sur la correction de DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est correct, i.e. si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Preuve : Soit une dérivation $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$. Par le premier théorème d'équivalence entre DN_{prop} et $\mathcal{G}$ on a $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$, et par le théorème de correction de $\mathcal{G}$ on conclut $\Delta \vdash A$ valide.

Retour sur la correction de LK

Théorème : Le système LK est correct, i.e. si $\Delta \vdash_{LK} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Preuve : Soit une dérivation $\Delta \vdash_{LK} A$. Par le premier théorème d'équivalence entre LK et $\mathcal{G}$ on a $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$, et par le théorème de correction de $\mathcal{G}$ on conclut $\Delta \vdash A$ valide.

Retour sur la complétude DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est complet, i.e. si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Soit $\Delta \vdash A$ un séquent valide. Par le théorème de complétude de $\mathcal{G}$ on a une dérivation $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$, à partir de laquelle on obtient une seconde dérivation $\vdash_{\mathcal{G}} \bigvee \neg\Delta \vee A$ en utilisant la règle $(\neg\, d)$ plusieurs fois, puis $(\vee d)$ plusieurs fois également. Par le deuxième théorème d'équivalence entre DN_{prop} et $\mathcal{G}$ on obtient une dérivation $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee A$. On doit montrer qu'on a également une dérivation $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$ (voir lemme suivant).

Lemme : Si $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg\Delta \vee A$ alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la taille de Δ. Si $\Delta = \emptyset$ la propriété est triviale. Si $\Delta = B$ on construit la dérivation suivante:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, \neg A \vdash B} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash_{DN_{prop}} \neg B \vee A}{B, \neg A \vdash \neg B \vee A} \quad \dfrac{}{B, \neg A, \neg B \vdash \neg B} \quad \dfrac{B, \neg A, A, B \vdash A \qquad B, \neg A, A, B \vdash \neg A}{B, \neg A, A \vdash \neg B}}{B, \neg A \vdash \neg B}}{B \vdash \neg\neg A}}{B \vdash A}
$$

Si $\Delta = B_1, \ldots, B_n$ avec $n \geq 2$, compléter la preuve par induction.

Retour sur la complétude LK

Théorème : Le système LK est complet, i.e. si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Preuve : Soit $\Delta \vdash A$ un séquent valide. Par le théorème de complétude de $\mathcal{G}$ on a une dérivation $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$, et par le deuxième théorème d'équivalence entre LK et $\mathcal{G}$ on conclut $\Delta \vdash_{LK} A$.

Observations

- Le système de déduction naturelle est basé sur des règles d'introduction et d'élimination pour chaque connecteur. Une seule formule est autorisée à droite du symbole $\vdash$. Les règles sont additives.
- Les deux systèmes de Gentzen, LK et $\mathcal{G}$, sont basés sur des règles droites et gauches pour chaque connecteur. Pas de contrainte sur le nombre de formules à gauche et à droite du sumbole $\vdash$.
- Le système LK est le seul à contenir des règles de contraction et d'affaiblissement. Il contient des règles multiplicatives.
- Le système $\mathcal{G}$ contient des règles additives également.