La deduction naturelle pour le calcul des prédicats

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Axiome :

$$\frac{}{\Delta, A \vdash A}$$

A est une formule du calcul des prédicats)

Règles d'inférence (Rappel) :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \to B}\ (\to\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Delta \vdash B}\ (\to\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\ e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \qquad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)}\ (\forall\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)}{\Delta \vdash \exists x.A}\ (\exists\ i)$$

Dans les règles ($\forall$ e) et ($\exists$ i) l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash \forall x.A}\ (\forall\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash \exists x.A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B}\ (\exists\ e)$$

Dans les règles ($\forall$ i) et ($\exists$ e) la variable x n'est pas libre dans Δ ni dans B.

Dérivation dans DN_{pred}

On note $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$ si le séquent $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{pred}.

Premier exemple de dérivation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.p(x) \vdash \forall x.p(x)}\,(ax)}{\forall x.p(x) \vdash p(z)}\,(\forall\ e)}{\forall x.p(x) \vdash \exists x.p(x)}\,(\exists\ i)}{\vdash \forall x.p(x) \to \exists x.p(x)}\,(\to\ i)$$

Deuxième exemple de dérivation

Soit $\Delta = p(a) \vee p(b)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash p(a) \vee p(b)}\,(ax) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Delta, p(a) \vdash p(a)}\,(ax)}{\Delta, p(a) \vdash \exists x.p(x)}\,(\exists\ i) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Delta, p(b) \vdash p(b)}\,(ax)}{\Delta, p(b) \vdash \exists x.p(x)}\,(\exists\ i)}{\Delta \vdash \exists x.p(x)}\,(\vee\ e)}{\vdash p(a) \vee p(b) \to \exists x.p(x)}\,(\to\ i)$$

Notion de validité d'un séquent dans le système DN_{pred}

Définition : (Rappel) Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ est valide.

Attention:

- $\Delta \vdash B$ valide implique $\Delta \models B$.
- $\Delta \models B$ n'implique pas $\Delta \vdash B$ valide.
  Prendre $\Delta = \{\neg p(x, y)\}$ et $B = \neg p(x, z)$.
  Voir TD.

Propriétés du système DN_{pred} pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système DN_{pred} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est complet, i.e., si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$.

Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Axiome :

$$\frac{}{\Delta, A \vdash \Gamma, A}$$

(A est une formule du calcul des prédicats)

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \qquad A, \Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Règles d'inférence logiques pour les connecteurs :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma}\ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}\ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \qquad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \qquad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Règles d'inférence logiques pour les quantificateurs :

$$\frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, \forall x.A \vdash \Gamma} (\forall\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash \forall x.A, \Gamma} (\forall\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, \exists x.A \vdash \Gamma} (\exists\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash \exists x.A, \Gamma} (\exists\ d)$$

Dans les règles $(\forall\ d)$ et $(\exists\ g)$ x n'est pas libre dans Δ et Γ.
Dans les règles $(\forall\ g)$ et $(\exists\ d)$ l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p(x) \vdash p(x), \exists y.\neg p(y)} (ax)}{\vdash p(x), \neg p(x), \exists y.\neg p(y)} (\neg\ d)}{\vdash p(x), \exists y.\neg p(y)} (\exists\ d)}{\vdash \forall x.p(x), \exists .y\neg p(y)} (\forall\ d)}{\vdash (\forall x.p(x)) \vee (\exists y.\neg p(y))} (\vee\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p(a) \vdash p(a), \exists x.p(x)} (ax)}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} (\exists d) \quad \cfrac{\cfrac{}{p(b) \vdash p(b), \exists x.p(x)} (ax)}{p(b) \vdash \exists x.p(x)} (\exists d)}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)} (\vee g)}{\vdash p(a) \vee p(b) \rightarrow \exists x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, \exists z.q(z)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q(x) \vdash q(x), \exists z.q(z)}}{p, q(x) \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x), p \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\exists x.(p \to q(x)) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\vdash \exists x.(p \to q(x)) \to (p \to \exists z.q(z))}
$$

Quatrième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(a), p(f(a)) \vdash p(f(a)), p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{p(a) \vdash p(f(a)), p(f(a)) \to p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{p(a) \vdash p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{\vdash p(a) \to p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}}{\vdash \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}
$$

Cinquième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(x), p(y) \vdash p(y), p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), p(y) \to p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \forall y'.(p(y) \to p(y')), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash p(x) \to p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \forall y.(p(x) \to p(y)), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}
$$

Sixième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Soit $A = \exists x.\neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))$, $B = \forall x.p(x)$ et $C = \forall x.q(x)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(y), B, \neg q(y) \vdash p(y), A}}{p(y), B, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x.p(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q(y), C, \neg p(y) \vdash q(y), A}}{q(y), C, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x.q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x.p(x) \vee \forall x.q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x.p(x) \vee \forall x.q(x), \neg p(y) \wedge \neg q(y) \vdash A}}{\forall x.p(x) \vee \forall x.q(x) \vdash \neg(\neg p(y) \wedge \neg q(y)), A}}{\forall x.p(x) \vee \forall x.q(x) \vdash \exists x.\neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))}
$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles $\forall\, g$ et $\exists\, d$).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ et $\Delta \vdash A, \Gamma$ le sont aussi.

Notation: $\dfrac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ Aff.$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash A, \Gamma}\ Aff.$

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \vdash \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma, A$ l'est aussi.

Notation: $\dfrac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma}\ Cont.$ $\qquad \dfrac{\Delta \vdash A, A, \Gamma}{\Delta \vdash A, \Gamma}\ Cont.$

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors il existe une dérivation du même séquent $\Delta \vdash \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

De la déduction naturelle au calcul $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ est valide.

Propriétés du système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.