La théorie de l'unification

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$.
- Le codomaine d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$.
- Un renommage est une substitution σ injective sur son domaine t.q. pour tout $x \in Dom(\sigma)$ il y a un $y \in \mathcal{X}$ tel que $\sigma(x) = y$.
- Si le domaine d'une substitution σ est fini on note $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\sigma)$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Exemple de renommage

La substitution $\sigma_1 = \{x \leftarrow y, y \leftarrow x, z \leftarrow w\}$ est un renommage, mais ni $\sigma_2 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow y\}$ ni $\sigma_2 = \{x \leftarrow f(y), z \leftarrow y\}$ sont des renommages.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple :
Soit $\sigma = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z,z)\}$ et $\tau = \{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(x,b)\}$. Alors

$$
\begin{array}{rcl}
\tau \circ \sigma & = & \{x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow f(a), w \leftarrow g(g(x,b), g(x,b)), z \leftarrow g(x,b)\} \\
\sigma \circ \tau & = & \{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(f(y), b), x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z,z)\}
\end{array}
$$

Comparer deux substitutions

La substitution σ est une instance de la substitution τ (ou τ est plus générale que σ), ce que l'on écrit $\sigma \leq \tau$, ss'il existe une substitution ρ t.q. pour toute variable $x \in \mathcal{X}$, $\sigma(x) = (\rho \circ \tau)(x)$.

Exemple :
Soit $\tau = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow z\}$ et $\sigma = \{x \leftarrow f(b), y \leftarrow h(c), z \leftarrow h(c)\}$.
Alors $\sigma \leq \tau$, *i.e.* τ est plus générale que σ.

Identifier deux substitutions

Remarque : La relation $\leq$ n'est pas antisymétrique.

Exemple : Soient $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$ deux substitutions (en fait deux renommages). On a $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$ mais $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Pour obtenir une relation antisymétrique à partir de la relation $\leq$ on construit une relation d'équivalence:

Lemme : La relation d'équivalence engendrée par $\leq$ est donnée par:
$\sigma \sim \sigma'$ ssi $\exists$ deux renommages ρ et ρ' t.q. $\sigma = \rho \circ \sigma'$ et $\sigma' = \rho' \circ \sigma$.

Alors, dans l'exemple précédent on a $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1 \sim \sigma_2$ car:
$\sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Substitution(s) principale(s)

Soit $\mathcal{S}$ en ensemble de substitutions et $\tau \in \mathcal{S}$. On dit que τ est principale pour $\mathcal{S}$ ssi toute substitution $\sigma \in \mathcal{S}$ est une instance de τ (*i.e.* si τ est plus générale que n'importe quelle autre substitution dans $\mathcal{S}$).

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, où $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$, $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow x\}$, $\sigma_4 = \{x \leftarrow z, y \leftarrow z\}$ et $\sigma_5 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a\}$.

Alors σ_1, σ_2 et σ_3 sont principales pour $\mathcal{S}$. En effet,
$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_2$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_3$
Mais $\sigma_1 \not\leq \sigma_4$ (le prouver). De même, $\sigma_1 \not\leq \sigma_5$.

Unification comme solution d'un système d'équations

Une équation est une paire de termes de la forme $s \doteq t$, elle est unifiable ssi il existe une substitution σ t.q. $\sigma(s) = \sigma(t)$.
Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'équation $s \doteq t$.

Un système fini ou problème fini d'équations $\mathcal{P}$ est un ensemble $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ d'équations, il est unifiable ssi il existe une substitution qui est unificateur de toutes les équations de $\mathcal{P}$. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'ensemble $\mathcal{P}$.

Définition :

- L'ensemble de variables de $\mathcal{P}$ est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'application d'une substitution σ à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ donne le système $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \ldots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

L'unicité

1. On identifie deux unificateurs σ et σ' d'un problème $\mathcal{P}$ s'ils ne différent que par des renommage de variables, c'est à dire, si $\sigma \sim \sigma'$.
2. On considère uniquement comme unificateurs adaptés à $\mathcal{P}$ les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

Exemple : Soit $\mathcal{P} = \{x \doteq y\}$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les unificateurs de $\mathcal{P}$. Prenons trois unificateurs principaux de $\mathcal{S}$: $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$ et $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow x\}$.
Alors $\sigma_1 \sim \sigma_2$ (*i.e.* $[\sigma_1]_\sim = [\sigma_2]_\sim$) sont considérés comme une même solution de $\mathcal{P}$, tandis que σ_3 n'est plus considéré comme une solution de $\mathcal{S}$ car $z \notin \{x, y\} = Var(\{x \doteq y\})$.

Modulo ces deux considérations, l'unificateur pricipal d'un problème $\mathcal{P}$ est unique modulo renommage, c'est à dire :
Si σ et σ' sont deux unificateurs principaux de $\mathcal{P}$, alors $\sigma \sim \sigma'$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification $\mathcal{P}$ est en forme résolue ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_j ($\forall i\ \forall j\ x_i \notin VI(t_j)$)

Notation : Si $\mathcal{P}$ est un système en forme résolue $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ on note $\vec{\mathcal{P}}$ sa substitution associée $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}}\ (\text{effacer}) \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}}\ (\text{orienter})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}}\ (\text{décomposer})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}}\ (\text{remplacer})$$

Algorithme d'unification d'un problème $\mathcal{P}$

1. On démarre avec un problème $\mathcal{P}$
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème $\mathcal{S}$
3. Si le problème $\mathcal{S}$ est en forme résolue
   - alors renvoyer $\vec{\mathcal{S}}$
   - sinon échec

Exemple I

Soit $\mathcal{P} = \{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)\}$.

$$\begin{array}{c l}
f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c) & \\ \hline
x \doteq g(y), h(b) \doteq y, c \doteq c & \text{d} \\ \hline
x \doteq g(y), h(b) \doteq y & \text{e} \\ \hline
x \doteq g(y), y \doteq h(b) & \text{o} \\ \hline
x \doteq g(h(b)), y \doteq h(b) & \text{r}
\end{array}$$

L'unificateur principal de P est $\sigma = \{x \leftarrow g(h(b)), y \leftarrow h(b)\}$.
Ainsi, $\sigma f(x, h(b), c) = f(g(h(b)), h(b), c) = \sigma f(g(y), y, c)$.

Exemple II

Soit $\mathcal{P} = \{f(x, h(y), c) \doteq f(g(y), x, c)\}$.

$$\begin{array}{c l}
f(x, h(y), c) \doteq f(g(y), x, c) & \\ \hline
x \doteq g(y), h(y) \doteq x, c \doteq c & \text{d} \\ \hline
x \doteq g(y), h(y) \doteq x & \text{e} \\ \hline
x \doteq g(y), x \doteq h(y) & \text{o} \\ \hline
x \doteq g(y), g(y) \doteq h(y) & \text{r}
\end{array}$$

Aucune règle n'est applicable, mais le problème final n'est pas en forme résolue, donc le probleme initial $\mathcal{P}$ n'est pas unifiable.

Exemple III

FAIRE Soit $\mathcal{P} = \{f(x, h(y), c) \doteq f(h(g(y)), x, c)\}$.

$$\begin{array}{c l}
f(x, h(y), c) \doteq f(h(g(y)), x, c) & \\ \hline
x \doteq h(g(y)), h(y) \doteq x, c \doteq c & \text{d} \\ \hline
x \doteq h(g(y)), h(y) \doteq x & \text{e} \\ \hline
x \doteq h(g(y)), x \doteq h(y) & \text{o} \\ \hline
h(y) \doteq h(g(y)), x \doteq h(y) & \text{r} \\ \hline
y \doteq g(y), x \doteq h(y) &
\end{array}$$

Aucune règle n'est applicable, mais le problème final n'est pas en forme résolue, donc le probleme initial $\mathcal{P}$ n'est pas unifiable.

Vers la correction et la complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si σ est un unificateur d'un problème $\mathcal{P} = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, alors $\sigma = \sigma \circ \vec{\mathcal{P}}$.
3. Si une règle transforme un problème $\mathcal{P}$ dans un problème $\mathcal{S}$, alors les unificateur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont les mêmes.
4. Si $\mathcal{P}$ est en forme résolue, alors $\vec{\mathcal{P}}$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

Correction et complétude de l'algorithme

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution $\vec{S}$ pour le problème P, alors P est unifiable et $\vec{S}$ est un unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si P n'est pas unifiable, l'algorithme échoue.

Théorème : (Complétude) Si le système P est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si l'algorithme échoue, alors le système P n'est pas unifiable.