Notions préliminaires

Ensembles

Définition : Soient deux ensembles $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ inclus dans $\mathcal{U}$[a].

L'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \in \mathcal{B}\}$

L'union de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ ou } e \in \mathcal{B}\}$

La différence de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \notin \mathcal{B}\}$

Le complémentaire de $\mathcal{A}$ est $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{A} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \notin \mathcal{A}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble $\mathcal{A}$.

(Lois de *de Morgan*) $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} \qquad \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$

Définition : Le produit cartésien de n ensembles $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n$ est l'ensemble de n-uplets $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{A}_i\}$.

Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i, on note $\mathcal{A}^n$ le produit $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.

[a] Univers

Relations

Définition : Une relation n-aire sur $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ une relation binaire.

- R est réflexive[a] ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \in R$. R est irréflexive[b] ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \notin R$.
- R est symétrique[c] si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$. R est anti-symétrique[d] si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ implique $x = y$.

[a] $\geq$ sur les entiers
[b] $>$ sur les entiers
[c] $=$ sur les entiers
[d] $\leq$

- R est transitive[e] si pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in \mathcal{A}$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$.
- R est une équivalence[f] si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- R est une congruence p.r. à f si R est une équivalence compatible avec f, c'est à dire, si $a_1 R b_1 \ldots a_n R b_n$ implique $f(a_1, \ldots, a_n) R f(b_1 \ldots b_n)$.

[e] $\subseteq$ sur les ensembles
[f] $=$ sur les entiers

Classes d'équivalence

La classe d'équivalence de $a \in \mathcal{A}$ par rapport à une équivalence R est l'ensemble $[a]_R = \{b \in \mathcal{A} \mid aRb\}$.

Composition de relations

Définition : Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors la composition de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{R}$ est une relation dans $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ t.q.
$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \exists z \in \mathcal{B}\ (x, z) \in \mathcal{R}$ et $(z, y) \in \mathcal{S}\}$.

Définition : Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On note $\mathcal{R}^n$ la n-composition de $\mathcal{R}$ avec elle même par induction comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}^0 & = & \{(a, a) \mid a \in \mathcal{A}\} \\ \mathcal{R}^{n+1} & = & \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \ldots \circ \mathcal{R}}_{n+1 \text{ fois}} \end{array}$$

Les clôtures

Définition : La clôture transitive d'une relation $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$$

La clôture réflexive et transitive d'une relation $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^0$$

Fonctions

Définition : Une fonction f entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, est une relation sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ t.q. pour tout x, y, z si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$.

Notation : On écrit $f(x)$ pour dénoter l'unique élément y t.q. $(x, y) \in f$ et $f(\mathcal{C}) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{C}, f(x) = y\}$.

On note $id_{\mathcal{A}}$ la fonction identité sur $\mathcal{A}$ donnée par $id_{\mathcal{A}}(x) = x$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une fonction.

- Le domaine de f est $Dom(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists y \in \mathcal{B}, (x, y) \in f\}$
- L'image de f est $Im(f) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{A}, (x, y) \in f\}$
- L'inverse[a] de f est $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A} \mid (x, y) \in f\}$

[a] pas toujours une fonction

Composition de fonctions

Définition :

- La composition de $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ avec $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est la fonction $f \circ g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, où $f \circ g(x) = f(g(x))$.
- La n-composition de f avec elle-même , notée f^n, est défini par récurrence sur n :
  - Si $n = 0$, alors $f^0 = id$
  - Si $n > 0$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$

Exercice : Soit $n > 0$. Montrer[a] que $f^n = f^{n-1} \circ f$.

[a] Par induction, voirla Section suivante

Propriétés des fonctions

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est injective ssi pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est surjective ssi pour tout $y \in \mathcal{B}$ il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Une fonction est bijective ssi elle est injective et surjective.

Fonction caractéristique

Définition : Soit $\mathcal{A}$ un ensemble inclus dans un univers $\mathcal{U}$. La fonction caractéristique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{U}$ est la fonction $\chi : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$ telle que

$$\forall a \in \mathcal{U}. \chi(a) = 1 \text{ ssi } a \in A$$

Préordres, ordres

Définition :

- Un préordre est une relation réflexive et transitive.
- Un ordre ou ordre partiel est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.

Notation : $\geq$

Définition : Un ordre strict est une relation irréflexive et transitive.

Notation : $>$

Définition : Un ordre strict est bien fondé ssi il n'existe aucune chaîne infinie (i.e., de la forme $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$).

Majorants/minorants et bornes supérieures/inférieures

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble muni d'un ordre $\leq$. Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

Définition :

Un majorant de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $y \leq x$.

Un minorant de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \leq y$.

La borne supérieure de $\mathcal{A}$, notée $sup(\mathcal{A})$, est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$ (si z est un majorant de $\mathcal{A}$ alors $sup(\mathcal{A}) \leq z$).

La borne inférieure de $\mathcal{A}$, notée $inf(\mathcal{A})$, est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$ (si z est un minorant de $\mathcal{A}$ alors $z \leq inf(\mathcal{A})$).

Fonctions monotones et points fixes

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction et soient $\leq_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{B}}$ deux ordres sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement.

La fonction f est monotone ssi $x \leq_{\mathcal{A}} y$ implique $f(x) \leq_{\mathcal{B}} f(y)$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une fonction.

Un point fixe de f est un élément $x \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) = x$.

Le plus petit point fixe de f est $inf(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Le plus grand point fixe de f est $sup(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Ordres complets et fonctions continues

Notation : Pour tout ensemble $\mathcal{E}$, on note $\perp$, s'il existe, l'élément minimum (t.q. $\perp \leq e$ pour tout $e \in \mathcal{E}$).

Définition : Un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'un ordre $\leq$ est complet ssi toute partie de $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure.
En particulier, $\perp = sup(\emptyset)$[a].

Définition : Un sous-ensemble *non vide* C d'un ensemble ordonné E est une chaîne s'il est totalement ordonné.

Définition : Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une fonction et $\leq$ un ordre sur l'ensemble complet $\mathcal{E}$. On dit que f est continue ssi pour toute chaîne C non vide de $\mathcal{E}$ on a $f(sup(\mathcal{C})) = sup(f(\mathcal{C}))$.

[a] tout élément de $\mathcal{E}$ est un majorant de l'ensemble vide

Exercice :

- Montrer que $sup(\{\perp\} \cup \mathcal{X}) = sup(\mathcal{X})$.
- Montrer que toute fonction continue est monotone.

Théorèmes du point fixe

Théorème : Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est monotone et $\leq$ est un ordre complet sur $\mathcal{A}$, alors f a un plus grand point fixe $sup(\{x \in \mathcal{A} \mid x \leq f(x)\})$.

Théorème : Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est continue et $\leq$ est un ordre complet sur $\mathcal{A}$, alors f a un plus petit point fixe $sup(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\})$.