
Notions préliminaires

Ensembles

Définition : Soient deux ensembles \mathcal{A}, \mathcal{B} inclus dans \mathcal{U}^a .

L'**intersection** de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \in \mathcal{B}\}$

L'**union** de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ ou } e \in \mathcal{B}\}$

La **différence** de \mathcal{A} et \mathcal{B} est $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \notin \mathcal{B}\}$

Le **complémentaire** de \mathcal{A} est $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{A} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \notin \mathcal{A}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble de toutes les **parties** de l'ensemble \mathcal{A} .

$$\text{(Lois de de Morgan)} \quad \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} \quad \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$$

Définition : Le **produit cartésien** de n ensembles $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est

l'ensemble de n -uplets $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{A}_i\}$.

Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i , on note \mathcal{A}^n le produit $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

^aUnivers

Relations

Définition : Une **relation n-aire** sur $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ une relation **binaire**.

- R est **réflexive**^a ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \in R$. R est **irréflexive**^b ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \notin R$.
- R est **symétrique**^c si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$. R est **anti-symétrique**^d si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ implique $x = y$.

^a \geq sur les entiers

^b $>$ sur les entiers

^c $=$ sur les entiers

^d \leq
 \leq

- R est **transitive**^e si pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in \mathcal{A}$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$.
- R est une **équivalence**^f si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- R est une **congruence** p.r. à f si R est une équivalence compatible avec f , c'est à dire, si $a_1 R b_1 \dots a_n R b_n$ implique $f(a_1, \dots, a_n) R f(b_1 \dots b_n)$.

^e \subseteq sur les ensembles

^f = sur les entiers

Classes d'équivalence

La **classe d'équivalence** de $a \in \mathcal{A}$ par rapport à une équivalence R est l'ensemble $[a]_R = \{b \in \mathcal{A} \mid aRb\}$.

Composition de relations

Définition : Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors la **composition** de \mathcal{S} avec \mathcal{R} est une relation dans $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ t.q.

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \exists z \in \mathcal{B} (x, z) \in \mathcal{R} \text{ et } (z, y) \in \mathcal{S}\}.$$

Définition : Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On note \mathcal{R}^n la **n-composition** de \mathcal{R} avec elle même par induction comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0 &= \{(a, a) \mid a \in \mathcal{A}\} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \dots \circ \mathcal{R}}_{n+1 \text{ fois}}\end{aligned}$$

Les clôtures

Définition : La **clôture transitive** d'une relation \mathcal{R} est donnée par

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$$

La **clôture réflexive et transitive** d'une relation \mathcal{R} est donnée par

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^0$$

Fonctions

Définition : Une fonction f entre deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} , notée $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, est une relation sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ t.q. pour tout x, y, z si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$.

Notation : On écrit $f(x)$ pour dénoter l'**unique** élément y t.q. $(x, y) \in f$ et $f(\mathcal{C}) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{C}, f(x) = y\}$.

On note $id_{\mathcal{A}}$ la fonction **identité** sur \mathcal{A} donnée par $id_{\mathcal{A}}(x) = x$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction.

- Le **domaine** de f est $Dom(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists y \in \mathcal{B}, (x, y) \in f\}$
- L'**image** de f est $Im(f) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{A}, (x, y) \in f\}$
- L'**inverse**^a de f est $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A} \mid (x, y) \in f\}$

^apas toujours une fonction

Composition de fonctions

Définition :

- La **composition** de $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ avec $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est la fonction $f \circ g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, où $f \circ g(x) = f(g(x))$.
- La **n-composition** de f avec **elle-même**, notée f^n , est défini par récurrence sur n :
 - Si $n = 0$, alors $f^0 = id$
 - Si $n > 0$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$

Exercice : Soit $n > 0$. Montrer^a que $f^n = f^{n-1} \circ f$.

^aPar induction, voir la Section suivante

Propriétés des fonctions

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **injective** ssi pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **surjective** ssi pour tout $y \in \mathcal{B}$ il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Une fonction est **bijjective** ssi elle est injective et surjective.

Fonction caractéristique

Définition : Soit \mathcal{A} un ensemble inclus dans un univers \mathcal{U} . La **fonction caractéristique** de \mathcal{A} dans \mathcal{U} est la fonction $\chi : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que

$$\forall a \in \mathcal{U}. \chi(a) = 1 \text{ ssi } a \in A$$

Préordres, ordres

Définition :

- Un **préordre** est une relation réflexive et transitive.
- Un **ordre** ou **ordre partiel** est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.

Notation : \geq

Définition : Un **ordre strict** est une relation irreflexive et transitive.

Notation : $>$

Définition : Un ordre strict est **bien fondé** ssi il n'existe aucune chaîne infinie (i.e., de la forme $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$).

Majorants/minorants et bornes supérieures/inférieures

Soit \mathcal{E} un ensemble muni d'un ordre \leq . Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

Définition :

Un **majorant** de \mathcal{A} est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $y \leq x$.

Un **minorant** de \mathcal{A} est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \leq y$.

La **borne supérieure** de \mathcal{A} , notée $\mathit{sup}(\mathcal{A})$, est le plus petit des majorants de \mathcal{A} (si z est un majorant de \mathcal{A} alors $\mathit{sup}(\mathcal{A}) \leq z$).

La **borne inférieure** de \mathcal{A} , notée $\mathit{inf}(\mathcal{A})$, est le plus grand des minorants de \mathcal{A} (si z est un minorant de \mathcal{A} alors $z \leq \mathit{inf}(\mathcal{A})$).

Fonctions monotones et points fixes

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction et soient $\leq_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{B}}$ deux ordres sur \mathcal{A} et \mathcal{B} respectivement.

La fonction f est **monotone** ssi $x \leq_{\mathcal{A}} y$ implique $f(x) \leq_{\mathcal{B}} f(y)$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une fonction.

Un **point fixe** de f est un élément $x \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) = x$.

Le **plus petit point fixe** de f est $\inf(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Le **plus grand point fixe** de f est $\sup(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Ordres complets et fonctions continues

Notation : Pour tout ensemble \mathcal{E} , on note \perp , s'il existe, l'élément minimum (t.q. $\perp \leq e$ pour tout $e \in \mathcal{E}$).

Définition : Un ensemble \mathcal{E} muni d'un ordre \leq est **complet** ssi toute partie de \mathcal{E} admet une borne supérieure.

En particulier, $\perp = \sup(\emptyset)$ ^a.

Définition : Un sous-ensemble *non vide* C d'un ensemble ordonné E est une **chaîne** s'il est totalement ordonné.

Définition : Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une fonction et \leq un ordre sur l'ensemble complet \mathcal{E} . On dit que f est **continue** ssi pour toute chaîne C non vide de \mathcal{E} on a $f(\sup(C)) = \sup(f(C))$.

^atout élément de \mathcal{E} est un majorant de l'ensemble vide

Exercice :

- Montrer que $\sup(\{\perp\} \cup \mathcal{X}) = \sup(\mathcal{X})$.
- Montrer que toute fonction continue est monotone.

Théorèmes du point fixe

Théorème : Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est monotone et \leq est un ordre complet sur \mathcal{A} , alors f a un plus grand point fixe $\sup(\{x \in \mathcal{A} \mid x \leq f(x)\})$.

Théorème : Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est continue et \leq est un ordre complet sur \mathcal{A} , alors f a un plus petit point fixe $\sup(\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\})$.