Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Calcul de Gentzen
  2. Résolution
     - Théorie de l'unification
     - Règles de résolution
     - Propriétés de la résolution

Syntaxe : alphabet

- Les connecteurs $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$
- Les quantificateurs $\exists$, $\forall$
- Un ensemble dénombrable de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature Σ contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, chacun ayant une arité
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$, chacun ayant une arité

Les termes

Définition :

- Chaque variable x dans $\mathcal{X}$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont de termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

Définition : Un atome est de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont de termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0, S\}$ et $\Sigma_P = \{inf\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont de termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont de termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

Définition :

- Chaque atome est une formule.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
- Si A et B sont deux formules, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, et $A \vee B$ sont de formules.
- Si A est une formule et x est une variable, alors $\forall x.\ A$ et $\exists x.\ A$ sont de formules.

Exemple : $\forall x.\ (enfant(x) \rightarrow \exists y.\ mere(y, x))$

Le calcul propositionnel commme un calcul des prédicats

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont pas utilisés

Variables libres et liées

Les variables libres (VI) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = \emptyset$.
- Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
- Si $A = \forall x.\ B$ ou $A = \exists x.\ B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Exemple : Si $A = \forall x.\ q(x, f(x,y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.

Si $B = r(x) \vee \forall x.\ q(x, f(x,y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x.\ \exists x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent de noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

À partir de maintenant on travaille uniquement avec de formules rectifiées. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. On note $\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit Σ une signature et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t_1, \ldots, t_n)) = r(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B \# C) = \sigma(B) \# \sigma(C)$
- $A = \forall x.\ B$
  - Si $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma(B)$
  - Si $x = x_i$, alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma[x := x](B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

– Tous les hommes sont méchants.

$$\forall x.\ (H(x) \to M(x))$$

– Seulement les hommes sont méchants.

$$\forall x.\ (M(x) \to H(x))$$

– Il existe un homme méchant.

$$\exists x.\ (H(x) \land M(x))$$

– Il n'existe pas d'homme méchant.

$$\neg \exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

– Il existe un homme qui aime tous les chiens.

$\exists x.\ (H(x) \wedge Aimetousleschiens(x))$

$Aimetousleschiens(x) \equiv \forall y.\ (Chien(y) \rightarrow Aime(x, y))$

– Chaque homme connaît qui la déteste.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow Connaitdeteste(x))$$

$$Connaitdeteste(x) \equiv \forall y.\ (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

– Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$

$$aimetoutlemonde(x) \equiv \forall y.\ Aime(x, y)$$

$$aimepersonne(x) \equiv \forall y.\ \neg Aime(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x.\ (H(x) \rightarrow \exists y.\ Aime(x, y))$$

$$B_1 \equiv \neg \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$

$$A_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$

$$B_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))$$

Sémantique du calcul de prédicats

Définition : L'interprétation d'une signature Σ est un triplet $\langle \mathcal{D}, F_\mathcal{D}, P_\mathcal{D} \rangle$ t.q.

- Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n, il y a une fonction $\mathcal{I}(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ dans $F_\mathcal{D}$
- Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n, il y a une fonction booléene $\mathcal{I}(p) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathbf{BOOL}$

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation pour Σ ayant $\mathcal{D}$ comme domaine et soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans $\mathcal{I}$ est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Interprétation d'un terme

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et soit σ assignation dans $\mathcal{I}$. Alors l'interprétation d'un terme t dans $\mathcal{I}$ pour σ, notée $[t]_{\mathcal{I},\sigma}$ est définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

Interprétation d'une formule

Définition : L'interprétation d'une formule A dans une interprétation $\mathcal{I}$ pour une assignation σ, notée $[A]_{\mathcal{I},\sigma}$, est définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = B_\neg([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = B_\#([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$

- $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
  - $\mathbf{V}$ s'il existe $d \in \mathcal{D}$ t.q. $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - $\mathbf{F}$ sinon
- $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
  - $\mathbf{V}$ si pour tout $d \in \mathcal{D}$, $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - $\mathbf{F}$ sinon

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$.

Nouvelles notions de satisfiablité

Définition :

- $\mathcal{I}$ satisfait une formule B si pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$, $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- $\mathcal{I}$ falsifie une formule B s'il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ t.q $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Rappel : les notions de validité, conséquence logique

Définition :

- Une formule B est valide si toute interprétation $\mathcal{I}$ satisfait B.
- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$
\begin{array}{lcl}
\exists y.\ \forall x.\ A & \models & \forall x.\ \exists y.\ A \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \models & \exists x.\ A \wedge \exists x.\ B \\
\forall x.\ A \vee \forall x.\ B & \models & \forall x.\ (A \vee B)
\end{array}
$$

Quelques exemples d'équivalence

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \longrightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \longrightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & \\
\forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A &
\end{array}
$$