Résolution

– Forme prénexe
– Skolemisation
– Forme clausale
– Règles de résolution
– Correction et complétude

Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & \\
\forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A &
\end{array}$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ A$, où chaque Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une forme G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n-aire. La formule $\forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A\{x_{n+1}/f(x_1, \dots, x_n)\}$ est la skolemisation partielle de G.

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Forme de Skolem

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs $\exists$. La forme de Skolem de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la forme de Skolem de la formule G. Alors

- Si G contient n quantificateurs $\exists$, G' contient n nouveau symboles de fonction
- G' ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- G est satisfaisable ssi G' est satisfaisable.

Forme clausale

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$ où chaque L_i est un littéral. La clause vide s'écrit $\perp$.

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- G est satisfaisable ssi $\mathcal{C}_G$ est satisfaisable.

Résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \; (coupure)$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \ (factorisation)$$

où

- $L = r(s_1, \ldots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \ldots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \ldots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \ldots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \ldots, s_n)$ et $r(t_1, \ldots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \qquad \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R F$ si F est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si $\perp$ est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution.

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R F$, alors $\Delta \models F$ et si $\Delta \vdash_R \bot$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète, i.e., si $\Delta \models F$, alors $\Delta \vdash_R F$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \bot$.

Vers la complétude de la résolution

Soit Σ une signature contenant au moins une constante.

Définition :

- L'univers d'Herbrand de Σ est l'ensemble de termes clos sur Σ.
- La base d'Herbrand est l'enseble d'atomes clos sur Σ.
- Une interprétation de Herbrand de Σ est une interprétation t.q.
  - Son domaine est l'univers d'Herbrand
  - Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n,
    $\mathcal{I}(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

Conséquence : Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n, on peut identifier $\mathcal{I}(p)$ à un sous-ensemble $\mathcal{S}_p$ de la base de Herbrand t.q. $\mathcal{I}(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_p$.

Lemmes pour le Théorème de Herbrand

Lemme : Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres d'un terme t. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et σ une valuation dans $\mathcal{I}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[t]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Lemme : Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres d'une formule G. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et σ une valuation dans $\mathcal{I}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Exercice : Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1/a, x_2/s(a)\}$. Soit $\mathcal{I}(r)(n,m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $\mathcal{I}(a) = 0$ et $\mathcal{I}(s)(n) = n + 1$. Vérifier le résultat précédent.

Théorème de Herbrand

Théorème : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ est satisfaisable ssi il existe une interprétation $\mathcal{I}$ de Herbrand t.q. $\mathcal{I}$ satisfait $\mathcal{C}$.

Arbres sémantiques complets

Définition : Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une énumération de tous les atomes clos d'une signature Σ. L'arbre sémantique complet associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

– la racine est B_0
– chaque nœud B_i possède un arc gauche $\mathbf{V}$ et un arc droite $\mathbf{F}$
– tous les successeurs de B_i sont étiquetés par B_{i+1}

Exercice :

1. Construir un arbre sémantique complet A_1 pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construir un arbre sémantique complet A_2 pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \ldots$.

Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un nœud n de A est dit nœud d'échec pour $\mathcal{C}$ ssi le segment de la branche qui va de la racine de A jusqu'à n suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de $\mathcal{C}$ et si aucun prédécesseur de n n'est un nœud d'échec de A.

Exercice : Identifier dans les arbres A_1 et A_2 au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \vee q(x), q(a), r(a)\}$.

Exercice : Si $\perp \in \mathcal{C}$, qu'est-ce qu'on peut dire par rapport aux nœuds d'échec pour $\mathcal{C}$?

Arbres sémantiques partiels

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ est un arbre obtenu à partir de A en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

Définition : Un arbre sémantique partielle A est clos s'il est fini et si toute feuille de A est un nœud d'échec.

Exercice : Construire un arbre sémantique partielle clos associé à $\mathcal{C} = \{\neg r(x) \vee q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.

Corollaire du théorème de Herbrand

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait $\mathcal{C}$ ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Corollaire : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ est insatisfaisable ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Complétude de la résolution

Lemme : Soient C_1 et C_2 deux clauses. Soient C'_1 et C'_2 deux instances de C_1 et C_2 respectivement. Soit C'_{res} la clause obtenue par appliquation d'un pas de résolution (coupure ou factorisation) à C'_1 et C'_2. Alors il existe une clause C_{res} t.q.

- C'_{res} est une instance de C_{res}
- C_{res} est obtenue par résolution à partir de C_1 et C_2.

Théorème : La résolution est complète, i.e., si $\Delta \models G$, alors $\Delta \vdash_R G$ et si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \bot$.