

---

## La résolution en calcul propositionnel

---

## Résolution

---

Méthode par réfutation :

$\Delta \models A$  ssi  $A$  s'obtient à partir de  $\Delta$  par résolution

$\Delta \models A$  ssi  $\Delta \cup \{\neg A\}$  insatisfaisable iff  $\Delta \cup \{\neg A\}$  est réfutable

2

## Forme Normale Conjonctive (DNC)

---

**Définition :**

- Un **littéral** est une formule de la forme  $p$  ou  $\neg p$ , où  $p$  est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une **clause** est une formule de la forme  $l_1 \vee \dots \vee l_n$ ,  $n \geq 0$ , où chaque  $l_i$  est un littéral. La **clause vide** ( $n = 0$ ) s'écrit  $\perp$ .
- Une formule est en **forme normale conjonctive** ssi elle est de la forme  $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ ,  $n \geq 0$ , où chaque  $D_i$  est une clause.

3

## Forme Normale Disjonctive (FND)

---

**Définition :**

- Une **conjonction élémentaire** est une formule de la forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$ ,  $n \geq 0$ , où chaque  $l_i$  est un littéral. La **conjonction élémentaire vide** ( $n = 0$ ) s'écrit  $\top$ .
- Une formule est en **forme normale disjonctive** ssi elle est de la forme  $C_1 \vee \dots \vee C_n$ ,  $n \geq 0$ , où chaque  $C_i$  est une conjonction élémentaire.

4

## Existence de la FND et de la FNC

**Théorème :** Soit  $A$  une formule.

- Il existe une formule  $A_1$  en FND telle que  $A_1 \equiv A$ .
- Il existe une formule  $A_2$  en FNC telle que  $A_2 \equiv A$ .

**Lemme :** Soit  $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $FNC_\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$  où chaque  $E_i$  est une FNC de  $A_i$ . Pour chaque  $E_i$  de la forme  $D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}$  on construit  $C_{E_i} = \{D_{i_1}, \dots, D_{i_k}\}$ . Soit  $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$ . Alors  $\Delta$  est satisfaisable ssi  $C_\Delta$  est satisfaisable.

5

## Règles de la résolution

**Axiomes :** aucun

**Règles d'inférence :**

( $D$  et  $C$  sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C} \text{ (coupure)} \quad \frac{p \quad \neg p}{\perp} \text{ (cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p} \text{ (factorisation)}$$

7

## Formes normales et tables de vérité

$p$	$q$	$r$	$A$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

$$A \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\neg A \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$A \equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

6

## Dérivation par résolution

**Exemple :**

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r} \quad \neg r}{p \vee r}}{p}$$

**Notation :** Une dérivation de la clause  $p$  à partir de l'ensemble  $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$  s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

8

## Réfutation

---

**Définition :** Un ensemble de clauses  $\Delta$  est **réfutable** ssi  $\Delta \vdash_R \perp$ .

**Exemple :**

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r} \quad \neg r}{p \vee r} \quad \neg p}{p} \perp$$

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \perp$$

## Propriétés de la résolution

---

**Théorème :** La résolution est **correcte**, i.e., si  $\Delta \vdash_R A$ , alors  $\Delta \models A$  et si  $\Delta \vdash_R \perp$ , alors  $\Delta$  est insatisfaisable.

**Théorème :** La résolution est **complète**, i.e., si  $\Delta \models A$ , alors  $\Delta \vdash_R A$  et si  $\Delta$  est insatisfaisable, alors  $\Delta \vdash_R \perp$ .