La théorie de l'unification

- Retour sur les substitutions
- Les unificateurs
- Les formes résolues
- Les règles de transformation
- Algorithme d'unification
- Correction et complétude de l'algorithme

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$.
- Le codomaine d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$.
- Un renommage est une substitution injective σ t.q. $\sigma(x) = y$ $\forall x \in Dom(\sigma)$.
- Si le domaine d'une substitution σ est fini on note $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\sigma)$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple : Soit $\sigma = \{x/f(y), w/g(z,z)\}$ et $\tau = \{y/f(a), z/g(x,b)\}$. La substitution $\tau \circ \sigma$ est donnée par $\{x/f(f(a)), y/f(a), w/g(g(x,b), g(x,b)), z/g(x,b)\}$ et la substitution $\sigma \circ \tau$ est donnée par $\{y/f(a), z/g(f(y),b), x/f(y), w/g(z,z)\}$.

Les unificateurs

Définition :

- Un problème d'unification est un ensemble de paires de termes de la forme $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$.
- Un unificateur d'un problème $\mathcal{P}$ est une susbtitution σ t.q. $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ pour toute équation $s_i \doteq t_i$ dans $\mathcal{P}$.
- Un problème $\mathcal{P}$ est unifiable s'il existe un unificateur de $\mathcal{P}$.
- Un unificateur principal de $\mathcal{P}$ est un unificateur $\sigma \in \mathcal{P}$ t.q. pour tout autre unificateur τ de $\mathcal{P}$ il existe une substitution γ t.q. $\tau = \gamma \circ \sigma$.
- L'ensemble de variables de $\mathcal{P}$ est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'application d'une substitution σ à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$ est le problème $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \dots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

Les conventions

1. On identifie deux unificateurs σ et σ' qui ne différent que par des renommage de variables. Formellement,

   $\sigma \sim \sigma'$ ssi $\exists$ deux renommages ρ, ρ' t.q. $\sigma = \rho \circ \sigma'$ et $\sigma' = \rho' \circ \sigma$

2. On considère uniquement comme unificateurs de $\mathcal{P}$ les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

En conséquence, l'unificateur pricipal d'un problème $\mathcal{P}$ est unique modulo renommage, c'est à dire :

Si σ et σ' sont deux unificateurs principaux de $\mathcal{P}$, alors $\sigma \sim \sigma'$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification $\mathcal{P}$ est en forme résolue ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_i ($x_i \notin VI(t_i)$)

Définition : Soit $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ la forme résolue d'un problème $\mathcal{P}$. L'unificateur associé à $\mathcal{P}$ est la substitution $\vec{\mathcal{P}} = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad \text{(effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad \text{(orienter)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \quad \text{(décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\mathcal{P}\{x/s\} \cup \{x \doteq s\}} \quad \text{(remplacer)}$$

Algorithme d'unification d'un problème $\mathcal{P}$

1. On démarre avec un problème $\mathcal{P}$
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème $\mathcal{S}$
3. Si le problème $\mathcal{S}$ est en forme résolue
   - alors renvoyer $\vec{\mathcal{S}}$
   - sinon échec

Correction et complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si σ est un unificateur d'une forme résolue $\mathcal{P}$, alors $\sigma = \sigma\vec{\mathcal{P}}$.
3. Si une règle transforme un problème $\mathcal{P}$ dans un problème $\mathcal{S}$, alors les unificateur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont les mêmes.

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution $\vec{\mathcal{S}}$ pour le problème $\mathcal{P}$, alors $\vec{\mathcal{S}}$ est un unificateur principal de $\mathcal{P}$.

Théorème : (Complétude) Si le problème $\mathcal{P}$ est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de $\mathcal{P}$.