

La théorie de l'unification

- Retour sur les substitutions
- Les unificateurs
- Les formes résolues
- Les règles de transformation
- Algorithme d'unification
- Correction et complétude de l'algorithme

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une **substitution** est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Le **domaine** d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$.
- Le **codomaine** d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$.
- Un **renommage** est une substitution **injective** σ t.q. $\sigma(x) = y$
 $\forall x \in Dom(\sigma)$.
- Si le domaine d'une substitution σ est **fini** on note $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\sigma)$.
- L'application d'une **substitution** à un terme est l'**extension** de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La **composition** de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple : Soit $\sigma = \{x/f(y), w/g(z, z)\}$ et $\tau = \{y/f(a), z/g(x, b)\}$. La substitution $\tau \circ \sigma$ est donnée par $\{x/f(f(a)), y/f(a), w/g(g(x, b), g(x, b)), z/g(x, b)\}$ et la substitution $\sigma \circ \tau$ est donnée par $\{y/f(a), z/g(f(y), b), x/f(y), w/g(z, z)\}$.

Les unificateurs

Définition :

- Un **problème d'unification** est un ensemble de paires de termes de la forme $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$.
- Un **unificateur** d'un problème \mathcal{P} est une substitution σ t.q. $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ pour toute équation $s_i \doteq t_i$ dans \mathcal{P} .
- Un problème \mathcal{P} est **unifiable** s'il existe un unificateur de \mathcal{P} .
- Un **unificateur principal** de \mathcal{P} est un unificateur $\sigma \in \mathcal{P}$ t.q. pour tout autre unificateur τ de \mathcal{P} il existe une substitution γ t.q. $\tau = \gamma \circ \sigma$.
- L'**ensemble de variables** de \mathcal{P} est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'**application d'une substitution** σ à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$ est le problème $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \dots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

Les conventions

1. On identifie deux unificateurs σ et σ' qui ne diffèrent que par des renommage de variables. Formellement,

$$\sigma \sim \sigma' \text{ ssi } \exists \text{ deux renommages } \rho, \rho' \text{ t.q. } \sigma = \rho \circ \sigma' \text{ et } \sigma' = \rho' \circ \sigma$$

2. On considère uniquement comme unificateurs de \mathcal{P} les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

En conséquence, l'unificateur principal d'un problème \mathcal{P} est unique modulo renommage, c'est à dire :

Si σ et σ' sont deux unificateurs principaux de \mathcal{P} , alors $\sigma \sim \sigma'$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification \mathcal{P} est en **forme résolue** ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_i ($x_i \notin VI(t_i)$)

Définition : Soit $\{x_1 \doteq t_1, \dots, x_n \doteq t_n\}$ la forme résolue d'un problème \mathcal{P} . L'unificateur associé à \mathcal{P} est la substitution $\vec{\mathcal{P}} = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad (\text{effacer}) \quad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad (\text{orienter})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \dots, s_n) \doteq f(t_1, \dots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}} \quad (\text{décomposer})$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\mathcal{P}\{x/s\} \cup \{x \doteq s\}} \quad (\text{remplacer})$$

Algorithme d'unification d'un problème \mathcal{P}

1. On démarre avec un problème \mathcal{P}
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème \mathcal{S}
3. Si le problème \mathcal{S} est en forme résolue
 - alors renvoyer $\vec{\mathcal{S}}$
 - sinon échec

Correction et complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si σ est un unificateur d'une forme résolue \mathcal{P} , alors $\sigma = \sigma \vec{\mathcal{P}}$.
3. Si une règle transforme un problème \mathcal{P} dans un problème \mathcal{S} , alors les unificateur de \mathcal{P} et \mathcal{S} sont les mêmes.

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution $\vec{\mathcal{S}}$ pour le problème \mathcal{P} , alors $\vec{\mathcal{S}}$ est un unificateur principal de \mathcal{P} .

Théorème : (Complétude) Si le problème \mathcal{P} est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de \mathcal{P} .