Quelques notions mathématiques de base

Definition

Soient deux ensembles $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ inclus dans l'univers $\mathcal{U}$.
L'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A}$ et $e \in \mathcal{B}\}$
L'union de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A}$ ou $e \in \mathcal{B}\}$
La différence de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \in \mathcal{A}$ et $e \notin \mathcal{B}\}$
Le complémentaire de $\mathcal{A}$ est $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{A} = \{e \in \mathcal{U} \mid e \notin \mathcal{A}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble $\mathcal{A}$.

(Lois de **de Morgan**) $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$ $\qquad \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$

Definition

Le produit cartésien de n ensembles $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n$ est l'ensemble de n-uplets
$\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{A}_i\}$.
Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i, on note $\mathcal{A}^n$ le produit $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.

Relations

Definition

Une relation n-aire sur $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.

Definition

Soit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ une relation binaire.

- R est réflexive ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \in R$.
  R est irréflexive ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \notin R$.
- R est symétrique si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$.
  R est anti-symétrique si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ implique $x = y$.
- R est transitive si pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$.

Notations

- $(x, y) \in R$ peut s'écrire aussi $x\ R\ y$.
- On peut utiliser un symbole à la place de R:
  Ainsi par exemple, si $\leq$ est une relation, alors
  $(x, y) \in \leq$ s'écrit $x \leq y$.
- On écrit $y \geq x$ lorsque $x \leq y$.

Example : La relation $\geq$ sur les entiers naturels est réflexive, la relation $>$ sur les entiers naturels est irréflexive.

Example : La relation $=$ sur les ensembles est symétrique, la relation $\geq$ sur les entiers naturels est anti-symétrique.

Example : La relation $\supseteq$ sur les ensembles est transitive.

Équivalence et Congruence

Definition

- R est une équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

  Exercise : Montrer que $\sim = \{(x, y) \mid 3$ est diviseur de $x - y\}$ est une équivalence.

- R est une congruence p.r. à f si R est une équivalence compatible avec f, c'est à dire, si $a_1\ R\ b_1 \ldots a_n\ R\ b_n$ implique $f(a_1, \ldots, a_n)\ R\ f(b_1 \ldots b_n)$.

  Exercise : Montrer que $\sim = \{(x, y) \mid 3$ est diviseur de $x - y\}$ est une congruence par rapport à $+$ et à $*$.

Classes d'équivalence

La classe d'équivalence de $a \in \mathcal{A}$ par rapport à une équivalence R est l'ensemble $[a]_R = \{b \in \mathcal{A} \mid aRb\}$.

Definition

Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors la composition de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{R}$ est une relation dans $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ t.q. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \exists z \in \mathcal{B}\ (x, z) \in \mathcal{R}$ et $(z, y) \in \mathcal{S}\}$.

Definition

Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On note $\mathcal{R}^n$ la n-composition de $\mathcal{R}$ avec elle même par induction comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0 &= \{(a, a) \mid a \in \mathcal{A}\} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \ldots \circ \mathcal{R}}_{n+1 \text{ fois}} \end{aligned}$$

Example : Soit $A = \{Paris, Lyon, Toulouse\}$ et
$R = \{(Paris, Lyon), (Paris, Toulouse), (Lyon, Paris), (Toulouse, Paris)\}$,
$R^2 =$
$\{(Paris, Paris), (Lyon, Lyon), (Toulouse, Toulouse), (Lyon, Toulouse), (Toulouse, Lyon)\}$,
Calculer R^3.

Les clôtures

Definition

La clôture transitive d'une relation $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$$

La clôture réflexive et transitive d'une relation $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^0$$

Example : Dans l'exemple d'avant, $R^* = A \times A$.

Definition

Une fonction f entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, est une relation sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ t.q. pour tout x, y, z si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$.

Notation : On écrit $f(x)$ pour dénoter l'unique élément y t.q. $(x, y) \in f$ et $f(C) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in C, f(x) = y\}$.
On note $id_{\mathcal{A}}$ la fonction identité sur $\mathcal{A}$ donnée par $id_{\mathcal{A}}(x) = x$.

Definition

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une fonction.

- Le domaine de f est $Dom(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists y \in \mathcal{B}, (x, y) \in f\}$
- L'image de f est $Im(f) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{A}, (x, y) \in f\}$
- L'inverse de f (pas toujours une fonction) est $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A} \mid (x, y) \in f\}$

Definition

- La composition de $f : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ avec $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la fonction $f \circ g : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, où $f \circ g(x) = f(g(x))$.

  Example : $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$, $f \circ g(x) = (x + 4)^2$, $g \circ f(x) = x^2 + 4$.
- La n-composition de f avec elle-même , notée f^n, est défini par récurrence sur n :
  - Si $n = 0$, alors $f^0 = id$
  - Si $n > 0$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$

  Example : $f(x) = x + 2$, $f^0(x) = x$, $f^1(x) = x + 2$, $f^2(x) = x + 4$, $f^3(x) = x + 6$, $\ldots$, $f^n(x) = x + 2.n$.

Exercise : Soit $n > 0$. Montrer par induction, que $f^n = f^{n-1} \circ f$.

Propriétés des fonctions

Definition

Une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est injective ssi pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

Example : $f(x) = x + 2$ sur les entiers est injective. $f(x) = x \setminus \{3\}$ sur les ensembles d'entiers n'est pas injective. Ainsi $f(\{2, 3, 4\}) = f(\{2, 4\})$ mais $\{2, 3, 4\} \neq \{2, 4\}$.

Definition

Une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est surjective ssi pour tout $y \in \mathcal{B}$ il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = y$.

Example : $f(x) = x$ div 2 sur les entiers naturels est surjective. $f(x) = x + 2$ sur les entiers naturels n'est pas surjective.

Definition

Une fonction est bijective ssi elle est injective et surjective.

Example : Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de mots de longueur 3 contenant uniquement 0 et 1. Soit $\mathcal{B} = \{0 \dots 7\}$. Soit $f(\text{"}b_2 b_1 b_0\text{"}) = b_2.2^2 + b_1.2^1 + b_0.2_0$. Cette fonction est injective et surjective, donc bijective.

Fonction caractéristique

Definition

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble inclus dans un univers $\mathcal{U}$. La fonction caractéristique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{U}$ est la fonction $\chi_{\mathcal{A}} : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$ telle que

$$\forall a \in \mathcal{U}.\ \chi_{\mathcal{A}}(a) = 1 \text{ ssi } a \in \mathcal{A}$$

Préordres, ordres

Definition

- Un préordre (**notation** $\geq$) est une relation réflexive et transitive.
- Un ordre ou ordre partiel est un préordre qui est aussi anti-symétrique.

Example :

- $\mathcal{R} = \{(2,2),(3,3),(4,4),(3,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ est un préordre.
- $\mathcal{R}$ n'est pas un ordre car $(3,2),(2,3)$ mais $2 \neq 3$.
- $\mathcal{S} = \{(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ est un ordre.

Definition

Un ordre strict (**notation** $>$) est une relation irréflexive et transitive.

Example : $>$ sur les entiers, $\supset$ sur les ensembles.

Definition

Un ordre strict est bien fondé ssi il n'existe aucune chaîne infinie (i.e., de la forme $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$).

Example : $>$ sur les entiers naturels est bien fondé. $>$ sur tous les entiers n'est pas bien fondé. $\supset$ sur les ensembles est bien fondé.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble muni d'un ordre $\leq$. Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

Definition

- Un majorant de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $y \leq x$.
- Un minorant de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \leq y$.
- La borne supérieure de $\mathcal{A}$, notée $sup(\mathcal{A})$, est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$ (si z est un majorant de $\mathcal{A}$ alors $sup(\mathcal{A}) \leq z$).
- La borne inférieure de $\mathcal{A}$, notée $inf(\mathcal{A})$, est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$ (si z est un minorant de $\mathcal{A}$ alors $z \leq inf(\mathcal{A})$).

Example : Soit $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 10\}$. Tous les entiers dans $\{10, \ldots\}$ sont des majorants de $\mathcal{A}$ et 10 est la borne supérieure.

Example : Si $a \leq c$, $a \leq d$, $b \leq c$, $b \leq d$, alors a et b sont des minorants, mais comme ils sont incomparables il n'y a pas de borne inférieure.

Example : Si E_i sont des ensembles dans $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, alors le sup est $\bigcup_i E_i$ et le inf $\bigcap_i E_i$.

Fonctions monotones et points fixes

Definition

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une fonction et soient $\leq_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{B}}$ deux ordres sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement.
La fonction f est monotone ssi $x \leq_{\mathcal{A}} y$ implique $f(x) \leq_{\mathcal{B}} f(y)$.

Example : $f(x) = x + 3$.

Definition

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une fonction.
Un point fixe de f est un élément $x \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) = x$.

Example : Soit $f(x) = x^2$. Alors $x = 1$ est un point fixe.

Le plus petit point fixe de f est $inf(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.
Le plus grand point fixe de f est $sup(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.