Chapitre 3
Lois de la logique propositionnelle
Cours 4
Conséquence logique, équivalences, substitutions

Conséquence, Équivalence

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.
- On dit que p et q sont équivalentes, et on écrit $p \Dashv\models q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Donc, deux formules p et q sont équivalentes si et seulement si $[\![p]\!]v = [\![q]\!]v$ pour toute affectation v.

Conséquence, Équivalence

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.
- On dit que p et q sont équivalentes, et on écrit $p \models\!\!\mid q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Donc, deux formules p et q sont équivalentes si et seulement si $[\![p]\!]v = [\![q]\!]v$ pour toute affectation v.

Conséquence, Équivalence

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.
- On dit que p et q sont équivalentes, et on écrit $p \models\!\!\!\dashv q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Donc, deux formules p et q sont équivalentes si et seulement si $[\![p]\!]v = [\![q]\!]v$ pour toute affectation v.

Conséquence d'une théorie

Definition

Soient $p \in Form$ une formule et $T \subseteq Form$ un ensemble de formules. On dit que p est une conséquence de T, noté $T \models p$, si pour toute affection v telle que $v \models q$ pour tout $q \in T$ on a aussi que $v \models p$.

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$
4. Si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$
4. Si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$
4. Si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$
4. Si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.
- q est une conséquence de p si pour toute ligne de la table de vérité où il y a 1 dans la colonne de p il y aussi 1 dans la colonne de q;
- p et q sont équivalentes quand le contenu de la colonne de p est le même que le contenu de la colonne de q.

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.
- q est une conséquence de p si pour toute ligne de la table de vérité où il y a 1 dans la colonne de p il y aussi 1 dans la colonne de q;
- p et q sont équivalentes quand le contenu de la colonne de p est le même que le contenu de la colonne de q.

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.
- q est une conséquence de p si pour toute ligne de la table de vérité où il y a 1 dans la colonne de p il y aussi 1 dans la colonne de q;
- p et q sont équivalentes quand le contenu de la colonne de p est le même que le contenu de la colonne de q.

Exemple Conséquence

$x \wedge (\neg x \vee y) \models y$ car

x	y	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$x \wedge (\neg x \vee y)$	y
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Exemple Équivalence

Les formules $\neg(x \wedge y)$ et $\neg x \vee \neg y$ sont équivalentes :

x	y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \vee \neg y$
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition : On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\dashv x$ (idempotence)
2. $x \wedge y \models\!\dashv y \wedge x$ (commutativité)
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\dashv (x \wedge y) \wedge z$ (associativité)
4. $x \vee x \models\!\dashv x$
5. $x \vee y \models\!\dashv y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\!\dashv (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\!\dashv x$

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition : On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\!\!\dashv x$ (idempotence)
2. $x \wedge y \models\!\!\!\!\dashv y \wedge x$ (commutativité)
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\!\!\dashv (x \wedge y) \wedge z$ (associativité)
4. $x \vee x \models\!\!\!\!\dashv x$
5. $x \vee y \models\!\!\!\!\dashv y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\!\!\!\!\dashv (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\!\!\!\!\dashv x$

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition : On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\mid x$ (idempotence)
2. $x \wedge y \models\!\mid y \wedge x$ (commutativité)
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\mid (x \wedge y) \wedge z$ (associativité)
4. $x \vee x \models\!\mid x$
5. $x \vee y \models\!\mid y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\!\mid (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\!\mid x$

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition : On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\mid x$ (idempotence)
2. $x \wedge y \models\mid y \wedge x$ (commutativité)
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\mid (x \wedge y) \wedge z$ (associativité)
4. $x \vee x \models\mid x$
5. $x \vee y \models\mid y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\mid (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\mid x$

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition : On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\dashv x$ (idempotence)
2. $x \wedge y \models\!\!\dashv y \wedge x$ (commutativité)
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\dashv (x \wedge y) \wedge z$ (associativité)
4. $x \vee x \models\!\!\dashv x$
5. $x \vee y \models\!\!\dashv y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\!\!\dashv (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\!\!\dashv x$

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers
- la moyenne arithmétique entre deux entiers

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers
- la moyenne arithmétique entre deux entiers

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers
- la moyenne arithmétique entre deux entiers

Démonstration de $x \wedge x \models\!\!\!\!\mid x$

x	$x \wedge x$
0	0
1	1

Démonstration de $x \wedge y \models\!\!\!\dashv y \wedge x$

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	1	1

Démonstration de $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\mid (x \wedge y) \wedge z$

x	y	z	$y \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \wedge z$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Objectif

- Généraliser les équivalences de la proposition à des formules quelconques.
- Par exemple $p \wedge p \models\!\!\mid p$, $p \wedge q \models\!\!\mid q \wedge p$ pour toutes formules propositionnelles p et q.

Objectif

- Généraliser les équivalences de la proposition à des formules quelconques.
- Par exemple $p \wedge p \models\!\!\!\mid p$, $p \wedge q \models\!\!\!\mid q \wedge p$ pour toutes formules propositionnelles p et q.

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]$: *Form* $\to$ *Form*, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]$: $Form \to Form$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]$: $Form \to Form$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]$: $Form \to Form$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]$: $\mathit{Form} \rightarrow \mathit{Form}$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Exemple Substitution

Soit

$$p = z \vee \neg y$$

Alors :

$$(x \wedge (\neg x \wedge y))[x/p] = (z \vee \neg y) \wedge (\neg(z \vee \neg y) \wedge y)$$

Substitution simultanée

Cette définition se généralise facilement à une substitution simultanée $q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$ pour le cas où les $x_1, \ldots, x_n$ sont toutes des variables différentes.

Exemple Substitution Simultanée

Soient

$$\begin{aligned} p_1 &= (y_1 \wedge \neg y_2) \\ p_2 &= (z_1 \vee (z_2 \wedge z_3)) \end{aligned}$$

alors on a que

$$(x_1 \wedge x_2)[x_1/p_1, x_2/p_2] = (y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee (z_2 \wedge z_3))$$

Substitution vs. Substitution Simultanée

Attention, on n'a pas toujours que
$q[x_1/p_1, x_2/p_2] = (q[x_1/p_1])[x_2/p_2]$.

Contre-exemple: $q = x_1$, $p_1 = (x_2 \wedge x_2)$, et $p_2 = (x_3 \vee x_3)$:

$$\begin{aligned} x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2), x_2/(x_3 \vee x_3)] &= (x_2 \wedge x_2) \\ (x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2)])[x_2/(x_3 \vee x_3)] &= (x_2 \wedge x_2)[x_2/(x_3 \vee x_3)] \\ &= ((x_3 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_3)) \end{aligned}$$

Substitution vs. Substitution Simultanée

Attention, on n'a pas toujours que
$q[x_1/p_1, x_2/p_2] = (q[x_1/p_1])[x_2/p_2]$.

Contre-exemple: $q = x_1$, $p_1 = (x_2 \wedge x_2)$, et $p_2 = (x_3 \vee x_3)$:

$$\begin{array}{rcl} x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2), x_2/(x_3 \vee x_3)] & = & (x_2 \wedge x_2) \\ (x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2)])[x_2/(x_3 \vee x_3)] & = & (x_2 \wedge x_2)[x_2/(x_3 \vee x_3)] \\ & = & ((x_3 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_3)) \end{array}$$

Substitution dans les affectations

Definition

Soit v une affectation, x une variable propositionnelle, et $b \in \{0, 1\}$. Alors $v[x/b]$ est l'affectation définie comme suit :

$$v[x/b](y) = \begin{cases} b & \text{si } x = y \\ v(y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Cette définition se généralise aussi à une substitution simultanée $v[x_1/b_1, \ldots, x_n/b_n]$ pour le cas où les $x_1, \ldots, x_n$ sont toutes des variables différentes.

Substitution dans les affectations

Definition

Soit v une affectation, x une variable propositionnelle, et $b \in \{0, 1\}$. Alors $v[x/b]$ est l'affectation définie comme suit :

$$v[x/b](y) = \begin{cases} b & \text{si } x = y \\ v(y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Cette définition se généralise aussi à une substitution simultanée $v[x_1/b_1, \ldots, x_n/b_n]$ pour le cas où les $x_1, \ldots, x_n$ sont toutes des variables différentes.

Exemple

$$[x \mapsto 0, y \mapsto 1][y/0, z/1] = [x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto 1]$$

Proposition

Proposition : Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

En d'autres mots

On obtient le même résultat

1. quand on substitue les x_i par les p_i correspondant dans la formule q et puis évalue la formule ainsi obtenue par rapport à l'affectation v;
2. quand on évalue d'abord les formules p_i une par une par rapport à l'affectation v, puis on met à jour dans l'affectation v les valeurs des variables x_i par l'interprétation des p_i, et on évalue la formule q originale par rapport à la nouvelle affectation.

En d'autres mots

On obtient le même résultat

1. quand on substitue les x_i par les p_i correspondant dans la formule q et puis évalue la formule ainsi obtenue par rapport à l'affectation v;
2. quand on évalue d'abord les formules p_i une par une par rapport à l'affectation v, puis on met à jour dans l'affectation v les valeurs des variables x_i par l'interprétation des p_i, et on évalue la formule q originale par rapport à la nouvelle affectation.

Démonstration

Nous donnons ici la preuve pour le cas $n = 1$, c'est-à-dire nous montrons

$$[\![q[x/p]]\!]v = 1 \text{ ssi } [\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$$

La preuve se fait par induction structurelle

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$

ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition sémantique

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Disjonction

similaire au cas précédent.

Théorème

Théorème : Soit q une tautologie, $x_1, \ldots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \ldots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

$$q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$$

est aussi une tautologie.

Démonstration

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = 1$$

- Or, d'après proposition sur les substitutions :

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v])$$

- Puisque q est une tautologie,

$$[\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v]) = 1$$

puisque $[\![q]\!]v' = 1$ pour toute affectation v'.

Démonstration

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = 1$$

- Or, d'après proposition sur les substitutions :

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v])$$

- Puisque q est une tautologie,

$$[\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v]) = 1$$

puisque $[\![q]\!]v' = 1$ pour toute affectation v'.

Démonstration

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = 1$$

- Or, d'après proposition sur les substitutions :

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

- Puisque q est une tautologie,

$$[\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v]) = 1$$

puisque $[\![q]\!]v' = 1$ pour toute affectation v'.

Une autre façon d'obtenir des équivalences

Théorème : Soient q_1, q_2 deux formules telles que $q_1 \models\mid q_2$, $x_1, \ldots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \ldots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

$$q_1[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n] \models\mid q_2[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$$

Démonstration : en TD

Une autre façon d'obtenir des équivalences

Théorème : Soient q_1, q_2 deux formules telles que $q_1 \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} q_2$, $x_1, \ldots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \ldots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

$$q_1[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n] \mathrel{|}\!\!\!= \!\!\!\mathrel{|} q_2[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$$

Démonstration : en TD

Application du théorème

Théorème : On a les équivalences suivantes pour toutes les formules p, q, r :

$p \wedge p \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ p$	Loi d'idempotence de la conjonction
$p \wedge q \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ q \wedge p$	Loi de commutativité de la conjonction
$p \wedge (q \wedge r) \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ (p \wedge q) \wedge r$	Loi d'associativité de la conjonction
$p \vee p \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ p$	Loi d'idempotence de la disjonction
$p \vee q \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ q \vee p$	Loi de commutativité de la disjonction
$p \vee (q \vee r) \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ (p \vee q) \vee r$	Loi d'associativité de la disjonction
$\neg\neg p \models\!\!\!\!\!\!\!\! \mid\ \ p$	Loi de la double négation

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédante et du théorème.

Des autres lois intéressantes

Le théorème suivant donne des lois qui mettent plusieurs opérateurs logiques en relation :

Théorème : On a les équivalences suivantes pour toutes les formules p, q, r :

$(p \wedge q) \vee r \models\!\!\!\dashv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	Première loi de distributivité
$(p \vee q) \wedge r \models\!\!\!\dashv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	Seconde loi de distributivité
$\neg(p \wedge q) \models\!\!\!\dashv \neg p \vee \neg q$	Première loi de de Morgan
$\neg(p \vee q) \models\!\!\!\dashv \neg p \wedge \neg q$	Seconde loi de de Morgan

Comme avant : table de vérité, puis appliquer le théorème des substitutions.

Objectif

- Au-dessus : substituer dans des équivalences préalablement établies des variables par des formules quelconques.
- Deuxième méthode : On part d'une équivalence préalablement établie $p \models\!\!\!\!\dashv q$ et on construit une nouvelle équivalence en remplaçant dans une formule quelconque une variable, disons x, une fois par p et une fois par q.

Objectif

- Au-dessus : substituer dans des équivalences préalablement établies des variables par des formules quelconques.
- Deuxième méthode : On part d'une équivalence préalablement établie $p \models\!\!\!| \; q$ et on construit une nouvelle équivalence en remplaçant dans une formule quelconque une variable, disons x, une fois par p et une fois par q.

Théorème : Soient $p_1 \models\!\mid q_1, \ldots, p_n \models\!\mid q_n$, p une formule, et $x_1, \ldots, x_n \subseteq \mathcal{V}(p)$ des variables différentes. Alors

$$p[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n] \models\!\mid p[x_1/q_1, \ldots, x_n/q_n]$$

Démonstration

Il faut montrer que pour toute affectation v on a que

$$[\![p[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![p[x_1/q_1,\ldots,x_n/q_n]]\!]v$$

Puisque $p_i \models\!\!\!\dashv q_i$ pour tout i on a aussi que $[\![p_i]\!]v = [\![q_i]\!]v$ pour tout i.
On obtient la chaîne d'égalités suivante :

Démonstration (suite)

$$\begin{array}{lll}
& [\![p[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v & \\
= & [\![p]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v]) & \text{par proposition 5 du poly} \\
= & [\![p]\!](v[x_1/[\![q_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![q_n]\!]v]) & \text{car } [\![p_i]\!]v = [\![q_i]\!]v \text{ pour tout } i \\
= & [\![p[x_1/q_1,\ldots,x_n/q_n]]\!]v & \text{par proposition 5 du poly}
\end{array}$$

Exemple

Nous savons par exemple, selon le théorème 9 du poly, que

$$\underbrace{\neg(y_1 \wedge y_2)}_{p_1} \models\!\!\!\!\!\!\dashv\; \underbrace{\neg y_1 \vee \neg y_2}_{q_1}$$

$$\underbrace{\neg(z_1 \vee z_2)}_{p_2} \models\!\!\!\!\!\!\dashv\; \underbrace{\neg z_1 \wedge \neg z_2}_{q_2}$$

Avec la formule $p = (\neg x_1 \wedge x_2)$ on obtient la nouvelle équivalence suivante :

$$\underbrace{\neg\neg(y_1 \wedge y_2) \wedge \neg(z_1 \vee z_2)}_{p[x_1/p_1, x_2/p_2]} \models\!\!\!\!\!\!\dashv\; \underbrace{\neg(\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (\neg z_1 \wedge \neg z_2)}_{p[x_1/q_1, x_2/q_2]}$$