Chapitre 3
Lois de la logique propositionnelle
Cours 5
Complétude des opérateurs

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.
- Ces opérateurs sont définis comme des abréviations.
- La définition de la syntaxe des formules reste donc inchangée, mais on autorise dans la suite pour l'écriture des formules les abréviations suivantes :

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.
- Ces opérateurs sont définis comme des abréviations.
- La définition de la syntaxe des formules reste donc inchangée, mais on autorise dans la suite pour l'écriture des formules les abréviations suivantes :

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.
- Ces opérateurs sont définis comme des abréviations.
- La définition de la syntaxe des formules reste donc inchangée, mais on autorise dans la suite pour l'écriture des formules les abréviations suivantes :

Opérateurs dérivés

Opérateur	Nom	Définition
$\Rightarrow$	Implication	$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$
$\Leftrightarrow$	Équivalence	$x \Leftrightarrow y = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$
`True`	Constante vrai	$\texttt{True} = x \vee \neg x$
`False`	Constante faux	$\texttt{False} = x \wedge \neg x$
$\oplus$	Ou exclusif	$x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
$\uparrow$	Nand	$x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$
$\downarrow$	Nor	$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.
- Par exemple,

$$\triangleright(x, y, z) =_{def} (x \oplus y) \Rightarrow z$$

est une abréviation pour

$$\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee z$$

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.
- Par exemple,

$$\triangleright(x, y, z) =_{def} (x \oplus y) \Rightarrow z$$

est une abréviation pour

$$\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee z$$

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.
- Par exemple,

$$\triangleright(x, y, z) =_{def} (x \oplus y) \Rightarrow z$$

est une abréviation pour

$$\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee z$$

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.
- Par exemple,

$$\triangleright(x, y, z) =_{def} (x \oplus y) \Rightarrow z$$

est une abréviation pour

$$\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee z$$

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\texttt{True} \wedge p \models\!\!\mid p$	True est l'élément neutre de la conjoncti
$\texttt{False} \vee p \models\!\!\mid p$	False est l'élément neutre de la disjonct
$\texttt{False} \wedge p \models\!\!\mid \texttt{False}$	False est l'élément nul de la conjonctio
$\texttt{True} \vee p \models\!\!\mid \texttt{True}$	True est l'élément nul de la disjonction
$p \Rightarrow q \models\!\!\mid \neg q \Rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \Leftrightarrow q \models\!\!\mid (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
$p \Leftrightarrow q \models\!\!\mid \neg p \Leftrightarrow \neg q$	
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \models\!\!\mid (p \wedge q) \Rightarrow r$	

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\texttt{True} \wedge p \models\!\!\!\dashv p$	True est l'élément neutre de la conjoncti
$\texttt{False} \vee p \models\!\!\!\dashv p$	False est l'élément neutre de la disjonct
$\texttt{False} \wedge p \models\!\!\!\dashv \texttt{False}$	False est l'élément nul de la conjonctio
$\texttt{True} \vee p \models\!\!\!\dashv \texttt{True}$	True est l'élément nul de la disjonction
$p \Rightarrow q \models\!\!\!\dashv \neg q \Rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \Leftrightarrow q \models\!\!\!\dashv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
$p \Leftrightarrow q \models\!\!\!\dashv \neg p \Leftrightarrow \neg q$	
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \models\!\!\!\dashv (p \wedge q) \Rightarrow r$	

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\texttt{True} \land p \models\mid p$	True est l'élément neutre de la conjoncti
$\texttt{False} \lor p \models\mid p$	False est l'élément neutre de la disjonct
$\texttt{False} \land p \models\mid \texttt{False}$	False est l'élément nul de la conjonctio
$\texttt{True} \lor p \models\mid \texttt{True}$	True est l'élément nul de la disjonction
$p \Rightarrow q \models\mid \neg q \Rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \Leftrightarrow q \models\mid (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$	
$p \Leftrightarrow q \models\mid \neg p \Leftrightarrow \neg q$	
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \models\mid (p \land q) \Rightarrow r$	

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\texttt{True} \wedge p \mathrel{|\!\!=\!\!|} p$	True est l'élément neutre de la conjoncti
$\texttt{False} \vee p \mathrel{|\!\!=\!\!|} p$	False est l'élément neutre de la disjonct
$\texttt{False} \wedge p \mathrel{|\!\!=\!\!|} \texttt{False}$	False est l'élément nul de la conjonctior
$\texttt{True} \vee p \mathrel{|\!\!=\!\!|} \texttt{True}$	True est l'élément nul de la disjonction
$p \Rightarrow q \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg q \Rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \Leftrightarrow q \mathrel{|\!\!=\!\!|} (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
$p \Leftrightarrow q \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg p \Leftrightarrow \neg q$	
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (p \wedge q) \Rightarrow r$	

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\mathtt{True} \wedge p \mathrel{\vert\!\models} p$	True est l'élément neutre de la conjoncti
$\mathtt{False} \vee p \mathrel{\vert\!\models} p$	False est l'élément neutre de la disjonct
$\mathtt{False} \wedge p \mathrel{\vert\!\models} \mathtt{False}$	False est l'élément nul de la conjonctio
$\mathtt{True} \vee p \mathrel{\vert\!\models} \mathtt{True}$	True est l'élément nul de la disjonction
$p \Rightarrow q \mathrel{\vert\!\models} \neg q \Rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \Leftrightarrow q \mathrel{\vert\!\models} (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
$p \Leftrightarrow q \mathrel{\vert\!\models} \neg p \Leftrightarrow \neg q$	
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \mathrel{\vert\!\models} (p \wedge q) \Rightarrow r$	

Remarques

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.
- On aurait pu définir la logique propositionnelle seulement avec les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ car on peut exprimer $\vee$ par ces deux opérateurs :

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & \models\!\!\!\mid & \neg\neg(x \vee y) & \text{Loi de la double négation} \\ & \models\!\!\!\mid & \neg(\neg x \wedge \neg y) & \text{Seconde loi de de Morgan} \end{array}$$

- Autre possibilité : seulement $\neg$ et $\vee$.

Remarques

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.
- On aurait pu définir la logique propositionnelle seulement avec les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ car on peut exprimer $\vee$ par ces deux opérateurs :

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & \models\!\mid & \neg\neg(x \vee y) & \text{Loi de la double négation} \\ & \models\!\mid & \neg(\neg x \wedge \neg y) & \text{Seconde loi de de Morgan} \end{array}$$

- Autre possibilité : seulement $\neg$ et $\vee$.

Remarques

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.
- On aurait pu définir la logique propositionnelle seulement avec les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ car on peut exprimer $\vee$ par ces deux opérateurs :

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & \models\!\!\!\mid & \neg\neg(x \vee y) & \text{Loi de la double négation} \\ & \models\!\!\!\mid & \neg(\neg x \wedge \neg y) & \text{Seconde loi de de Morgan} \end{array}$$

- Autre possibilité : seulement $\neg$ et $\vee$.

Est-ce qu'il y a d'autres choix possibles ?

- Un choix possible est $\neg$ et $\Rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \Rightarrow y$: $\neg x \Rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.
- $\wedge$ et $\vee$ ne sont pas suffisantes (voir TD)
- On aurait pu définir toute la logique avec un seul opérateur ! (voir le TD)

Est-ce qu'il y a d'autres choix possibles ?

- Un choix possible est $\neg$ et $\Rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \Rightarrow y$: $\neg x \Rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.
- $\wedge$ et $\vee$ ne sont pas suffisantes (voir TD)
- On aurait pu définir toute la logique avec un seul opérateur ! (voir le TD)

Est-ce qu'il y a d'autres choix possibles ?

- Un choix possible est $\neg$ et $\Rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \Rightarrow y$: $\neg x \Rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.
- $\wedge$ et $\vee$ ne sont pas suffisantes (voir TD)
- On aurait pu définir toute la logique avec un seul opérateur ! (voir le TD)

Complétude Fonctionnelle

Est-ce que $\neg$, $\wedge$, $\vee$ sont suffisant pour exprimer tout ce qu'on peut souhaiter exprimer ?

Formellement

Un ensemble $\mathcal{S}$ de connecteurs est fonctionnellement complet si pour tout nombre naturel n, et pour toute fonction f

$$f : \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n \text{ fois}} \to \{0,1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle p contenant uniquement les connecteurs de l'ensemble $\mathcal{S}$, telle que p qui réalise f et $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, c'est-à-dire t.q.

$$[\![p]\!][x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \ldots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes $b_1, \ldots, b_n \in \{0,1\}$.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.
- Cette formule est vraie dans une affectation v si et seulement si $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 0$, et $v(x_4) = 1$.
- Construire la formule p comme la disjonction de toutes les formules p_c pour les n-uplets c pour lesquelles f donne le résultat 1.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.
- Cette formule est vraie dans une affectation v si et seulement si $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 0$, et $v(x_4) = 1$.
- Construire la formule p comme la disjonction de toutes les formules p_c pour les n-uplets c pour lesquelles f donne le résultat 1.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.
- Cette formule est vraie dans une affectation v si et seulement si $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 0$, et $v(x_4) = 1$.
- Construire la formule p comme la disjonction de toutes les formules p_c pour les n-uplets c pour lesquelles f donne le résultat 1.

Exemple

Soit f la fonction à trois arguments qui renvoie 1 si et seulement si un des ses arguments est 0 et deux de ses arguments sont 1. Autrement dit, f renvoie 1 exactement pour les arguments $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, et $(1, 1, 0)$.

La formule correspondante est

$$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$$

Ce raisonnement se généralise à n'importe quelle fonction d'arité $n \geq 0$.

Exemple

Soit f la fonction à trois arguments qui renvoie 1 si et seulement si un des ses arguments est 0 et deux de ses arguments sont 1. Autrement dit, f renvoie 1 exactement pour les arguments $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, et $(1, 1, 0)$.

La formule correspondante est

$$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$$

Ce raisonnement se généralise à n'importe quelle fonction d'arité $n \geq 0$.

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \Rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \Rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \Rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \Rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \Rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\Leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\Leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\Leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\Leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\Leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Le théorème de déduction

Proposition : Les deux énoncés suivants sont équivalents pour toutes formules propositionnelles p et q:

1. $p \models q$
2. $\models p \Rightarrow q$

- Attention, la proposition ne veut pas dire que « $p \models q$ » et « $p \Rightarrow q$ » sont la même chose.
- En fait les deux sont d'une nature différente : Le deuxième est une formule propositionnelle, tandis que le premier est un énoncé qui a comme sujet la relation entre deux formules propositionnelles.

- Attention, la proposition ne veut pas dire que « $p \models q$ » et « $p \Rightarrow q$ » sont la même chose.
- En fait les deux sont d'une nature différente : Le deuxième est une formule propositionnelle, tandis que le premier est un énoncé qui a comme sujet la relation entre deux formules propositionnelles.