

# Chapitre 4

## Formes Normales

## Table de Matières

La notion d'une forme normale

Forme normale de négation

Forme disjonctive normale

Équivalences entre formules en forme disjonctive normale

Forme conjonctive normale

## La notion d'une forme normale

- ▶ Pour toute formule il y a une infinité d'autres formules équivalentes :  $p$ ,  $p \wedge p$ ,  $p \wedge p \wedge p$ ,  $\dots$ , et plein d'autres.
- ▶ Est-ce qu'on peut définir une forme « standardisée » des formules ?
- ▶ Forme normale : spécifiée par des restrictions de la syntaxe.
- ▶ Utile pour l'algorithmique.
- ▶ Normalement : toute formule doit pouvoir être transformée en une formule en forme normale, et qui lui est équivalente, alors appelée **sa forme normale**.
- ▶ Il y a des notions différentes de forme normale.

## La notion d'une forme normale

- ▶ Pour toute formule il y a une infinité d'autres formules équivalentes :  $p$ ,  $p \wedge p$ ,  $p \wedge p \wedge p$ ,  $\dots$ , et plein d'autres.
- ▶ Est-ce qu'on peut définir une forme « standardisée » des formules ?
  - ▶ Forme normale : spécifiée par des restrictions de la syntaxe.
  - ▶ Utile pour l'algorithmique.
  - ▶ Normalement : toute formule doit pouvoir être transformée en une formule en forme normale, et qui lui est équivalente, alors appelée **sa forme normale**.
  - ▶ Il y a des notions différentes de forme normale.

## La notion d'une forme normale

- ▶ Pour toute formule il y a une infinité d'autres formules équivalentes :  $p$ ,  $p \wedge p$ ,  $p \wedge p \wedge p$ ,  $\dots$ , et plein d'autres.
- ▶ Est-ce qu'on peut définir une forme « standardisée » des formules ?
- ▶ Forme normale : spécifiée par des restrictions de la syntaxe.
- ▶ Utile pour l'algorithmique.
- ▶ Normalement : toute formule doit pouvoir être transformée en une formule en forme normale, et qui lui est équivalente, alors appelée **sa forme normale**.
- ▶ Il y a des notions différentes de forme normale.

## La notion d'une forme normale

- ▶ Pour toute formule il y a une infinité d'autres formules équivalentes :  $p$ ,  $p \wedge p$ ,  $p \wedge p \wedge p$ ,  $\dots$ , et plein d'autres.
- ▶ Est-ce qu'on peut définir une forme « standardisée » des formules ?
- ▶ Forme normale : spécifiée par des restrictions de la syntaxe.
- ▶ Utile pour l'algorithmique.
- ▶ Normalement : toute formule doit pouvoir être transformée en une formule en forme normale, et qui lui est équivalente, alors appelée **sa forme normale**.
- ▶ Il y a des notions différentes de forme normale.

## La notion d'une forme normale

- ▶ Pour toute formule il y a une infinité d'autres formules équivalentes :  $p$ ,  $p \wedge p$ ,  $p \wedge p \wedge p$ ,  $\dots$ , et plein d'autres.
- ▶ Est-ce qu'on peut définir une forme « standardisée » des formules ?
- ▶ Forme normale : spécifiée par des restrictions de la syntaxe.
- ▶ Utile pour l'algorithmique.
- ▶ Normalement : toute formule doit pouvoir être transformée en une formule en forme normale, et qui lui est équivalente, alors appelée **sa forme normale**.
- ▶ Il y a des notions différentes de forme normale.

## La forme normale de négation (NNF)

### Definition

Une formule est en **forme normale de négation** si elle ne contient pas d'applications de l'opérateur  $\neg$  sauf des applications à des variables propositionnelles.

- ▶ Exemple :  $\neg x \wedge \neg y \wedge z$
- ▶ Exemple :  $(\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg(x \wedge y)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg\neg y$



## La forme normale de négation (NNF)

### Definition

Une formule est en **forme normale de négation** si elle ne contient pas d'applications de l'opérateur  $\neg$  sauf des applications à des variables propositionnelles.

- ▶ Exemple :  $\neg x \wedge \neg y \wedge z$
- ▶ Exemple :  $(\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg(x \wedge y)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg\neg y$

## La forme normale de négation (NNF)

### Definition

Une formule est en **forme normale de négation** si elle ne contient pas d'applications de l'opérateur  $\neg$  sauf des applications à des variables propositionnelles.

- ▶ Exemple :  $\neg x \wedge \neg y \wedge z$
- ▶ Exemple :  $(\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg(x \wedge y)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg\neg y$

## La forme normale de négation (NNF)

### Definition

Une formule est en **forme normale de négation** si elle ne contient pas d'applications de l'opérateur  $\neg$  sauf des applications à des variables propositionnelles.

- ▶ Exemple :  $\neg x \wedge \neg y \wedge z$
- ▶ Exemple :  $(\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg(x \wedge y)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg\neg y$

## La forme normale de négation (NNF)

### Definition

Une formule est en **forme normale de négation** si elle ne contient pas d'applications de l'opérateur  $\neg$  sauf des applications à des variables propositionnelles.

- ▶ Exemple :  $\neg x \wedge \neg y \wedge z$
- ▶ Exemple :  $(\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg(x \wedge y)$
- ▶ Contre-exemple :  $\neg\neg y$

## Algorithme de transformation en NNF

Règles de réécriture :

$$\neg\neg X \rightsquigarrow X \quad (1)$$

$$\neg(X \wedge Y) \rightsquigarrow (\neg X \vee \neg Y) \quad (2)$$

$$\neg(X \vee Y) \rightsquigarrow (\neg X \wedge \neg Y) \quad (3)$$

On peut appliquer une règle de transformation à n'importe quel endroit de la formule à transformer : soit à la formule entière, soit à l'intérieur de la formule.

## Exemple

La première règle permet les transformations suivantes :

- ▶ Transformer la formule  $\neg\neg(x_1 \wedge x_2)$  en  $x_1 \wedge x_2$ , en appliquant la règle à la formule entière ;
- ▶ Transformer la formule  $(x_1 \vee \neg\neg x_2)$  en  $(x_1 \vee x_2)$ , en appliquant la règle de transformation seulement à la sous-formule rouge.

## Exemple

La première règle permet les transformations suivantes :

- ▶ Transformer la formule  $\neg\neg(x_1 \wedge x_2)$  en  $x_1 \wedge x_2$ , en appliquant la règle à la formule entière ;
- ▶ Transformer la formule  $(x_1 \vee \neg\neg x_2)$  en  $(x_1 \vee x_2)$ , en appliquant la règle de transformation seulement à la sous-formule rouge.

## Remarque

- ▶ Les règles de transformation sont écrites avec des variables en majuscules  $X$ ,  $Y$  et pas avec des variables en minuscules  $x$ ,  $y$  comme les variables propositionnelles.
- ▶ Les variables propositionnelles dénotent des valeurs de vérité, tandis que les variables utilisées dans les règles de transformation dénotent des formules propositionnelles.



## Remarque

- ▶ Les règles de transformation sont écrites avec des variables en majuscules  $X$ ,  $Y$  et pas avec des variables en minuscules  $x$ ,  $y$  comme les variables propositionnelles.
- ▶ Les variables propositionnelles dénotent des valeurs de vérité, tandis que les variables utilisées dans les règles de transformation dénotent des formules propositionnelles.

## Exemple complet

Appliquer les règles tant que possible :

	$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$	
se transforme en	$\neg x \vee \neg(y \vee \neg z)$	par règle (2)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z)$	par règle (3)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge z)$	par règle (1)

### Redex

La sous-formule sur laquelle on applique une transformation, ici en rouge.

## Exemple complet

Appliquer les règles tant que possible :

	$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$	
se transforme en	$\neg x \vee \neg(y \vee \neg z)$	par règle (2)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z)$	par règle (3)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge z)$	par règle (1)

### Redex

La sous-formule sur laquelle on applique une transformation, ici en rouge.

## Exemple complet

Appliquer les règles tant que possible :

	$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$	
se transforme en	$\neg x \vee \neg(y \vee \neg z)$	par règle (2)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z)$	par règle (3)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge z)$	par règle (1)

### Redex

La sous-formule sur laquelle on applique une transformation, ici en rouge.

## Exemple complet

Appliquer les règles tant que possible :

	$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$	
se transforme en	$\neg x \vee \neg(y \vee \neg z)$	par règle (2)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z)$	par règle (3)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge z)$	par règle (1)

### Redex

La sous-formule sur laquelle on applique une transformation, ici en rouge.

## Exemple complet

Appliquer les règles tant que possible :

	$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$	
se transforme en	$\neg x \vee \neg(y \vee \neg z)$	par règle (2)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z)$	par règle (3)
se transforme en	$\neg x \vee (\neg y \wedge z)$	par règle (1)

### Redex

La sous-formule sur laquelle on applique une transformation, ici en rouge.

## Plusieurs possibilités pour obtenir une forme normale

$$\neg(x_1 \vee \neg(x_2 \wedge x_3))$$

## Questions

### Terminaison ?

- ▶ Est-ce que ce processus se termine toujours ?
- ▶ Ce n'est pas évident, un processus défini par une application itérée d'une transformation peut a priori boucler, ou faire grossir le terme infiniment.

### Confluence ?

- ▶ Est-ce qu'on obtient toujours à la fin la même formule quand il y a plusieurs possibilités d'appliquer les règles ?
- ▶ C'est le cas, mais on ne va pas le montrer dans ce cours.



## Questions

### Terminaison ?

- ▶ Est-ce que ce processus se termine toujours ?
- ▶ Ce n'est pas évident, un processus défini par une application itérée d'une transformation peut a priori boucler, ou faire grossir le terme infiniment.

### Confluence ?

- ▶ Est-ce qu'on obtient toujours à la fin la même formule quand il y a plusieurs possibilités d'appliquer les règles ?
- ▶ C'est le cas, mais on ne va pas le montrer dans ce cours.

## Questions

### Terminaison ?

- ▶ Est-ce que ce processus se termine toujours ?
- ▶ Ce n'est pas évident, un processus défini par une application itérée d'une transformation peut a priori boucler, ou faire grossir le terme infiniment.

### Confluence ?

- ▶ Est-ce qu'on obtient toujours à la fin la même formule quand il y a plusieurs possibilités d'appliquer les règles ?
- ▶ C'est le cas, mais on ne va pas le montrer dans ce cours.

## Questions

### Terminaison ?

- ▶ Est-ce que ce processus se termine toujours ?
- ▶ Ce n'est pas évident, un processus défini par une application itérée d'une transformation peut a priori boucler, ou faire grossir le terme infiniment.

### Confluence ?

- ▶ Est-ce qu'on obtient toujours à la fin la même formule quand il y a plusieurs possibilités d'appliquer les règles ?
- ▶ C'est le cas, mais on ne va pas le montrer dans ce cours.

## Terminaison : Regardons d'abord un système simplifié

- ▶ Si on avait une seule règle :

$$\neg\neg X \rightsquigarrow X$$

- ▶ Chaque application de cette règle enlève deux occurrences du symbole  $\neg$ .
- ▶ Si la formule de départ a  $n$  occurrences de  $\neg$ , alors l'algorithme de transformation termine après au plus  $\frac{n}{2}$  étapes.

## Terminaison : Regardons d'abord un système simplifié

- ▶ Si on avait une seule règle :

$$\neg\neg X \rightsquigarrow X$$

- ▶ Chaque application de cette règle enlève deux occurrences du symbole  $\neg$ .
- ▶ Si la formule de départ a  $n$  occurrences de  $\neg$ , alors l'algorithme de transformation termine après au plus  $\frac{n}{2}$  étapes.

## Terminaison : Regardons d'abord un système simplifié

- ▶ Si on avait une seule règle :

$$\neg\neg X \rightsquigarrow X$$

- ▶ Chaque application de cette règle enlève deux occurrences du symbole  $\neg$ .
- ▶ Si la formule de départ a  $n$  occurrences de  $\neg$ , alors l'algorithme de transformation termine après au plus  $\frac{n}{2}$  étapes.

## La difficulté pour le système complet

- ▶ La deuxième règle

$$\neg(X \wedge Y) \rightsquigarrow (\neg X \vee \neg Y)$$

fait **croître** le nombre de  $\neg$  (pareil pour la troisième règle)

- ▶ Trouver une mesure qui décroît quand on l'applique n'importe laquelle des trois règles ?

## La difficulté pour le système complet

- ▶ La deuxième règle

$$\neg(X \wedge Y) \rightsquigarrow (\neg X \vee \neg Y)$$

fait **croître** le nombre de  $\neg$  (pareil pour la troisième règle)

- ▶ Trouver une mesure qui décroît quand on l'applique n'importe laquelle des trois règles ?



## La clef de la preuve de terminaison

**Proposition :** Soit  $\phi : Form \rightarrow \mathbb{N}$  définie par récurrence :

- ▶  $\phi(x) = 1$ , où  $x \in V$
- ▶  $\phi((p_1 \wedge p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- ▶  $\phi((p_1 \vee p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- ▶  $\phi(\neg p) = (\phi(p))^2 + 1$

Alors pour toute formule  $p \in Form$  : Si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une des règles 1, 2 or 3 alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .

## La clef de la preuve de terminaison

**Proposition :** Soit  $\phi : Form \rightarrow \mathbb{N}$  définie par récurrence :

- ▶  $\phi(x) = 1$ , où  $x \in V$
- ▶  $\phi((p_1 \wedge p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- ▶  $\phi((p_1 \vee p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- ▶  $\phi(\neg p) = (\phi(p))^2 + 1$

Alors pour toute formule  $p \in Form$  : Si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une des règles 1, 2 or 3 alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .

## D'abord une petite proposition

**Proposition :** Pour la fonction  $\phi$  définie en haut :  $\phi(p) \geq 1$  pour toute formule  $p$ .

Démonstration : exercice (induction).

## Démonstration de la proposition

- ▶ Par induction
- ▶ À montrer pour une formule  $p$  donnée : si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une règle alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .
- ▶ Si aucune règle de transformation s'applique à  $p$  alors il n'y a rien à montrer.
- ▶ Attention : Dans le cas général il y a plusieurs possibilités pour appliquer une règle.

## Démonstration de la proposition

- ▶ Par induction
- ▶ À montrer pour une formule  $p$  donnée : si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une règle alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .
- ▶ Si aucune règle de transformation s'applique à  $p$  alors il n'y a rien à montrer.
- ▶ Attention : Dans le cas général il y a plusieurs possibilités pour appliquer une règle.

## Démonstration de la proposition

- ▶ Par induction
- ▶ À montrer pour une formule  $p$  donnée : si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une règle alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .
- ▶ Si aucune règle de transformation s'applique à  $p$  alors il n'y a rien à montrer.
- ▶ Attention : Dans le cas général il y a plusieurs possibilités pour appliquer une règle.

## Démonstration de la proposition

- ▶ Par induction
- ▶ À montrer pour une formule  $p$  donnée : si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une règle alors  $\phi(p) > \phi(q)$ .
- ▶ Si aucune règle de transformation s'applique à  $p$  alors il n'y a rien à montrer.
- ▶ Attention : Dans le cas général il y a plusieurs possibilités pour appliquer une règle.

## Démonstration : le cas d'une variable

Si  $p \in V$  alors aucune transformation n'est possible et il n'y a rien à montrer.



## Démonstration : le cas d'une conjonction (I)

- ▶ Si  $p = (p_1 \wedge p_2)$  alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de  $p_1$  et de  $p_2$ .
- ▶ Chaque transformation se fait soit sur  $p_1$  soit sur  $p_2$ , il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de  $p$  car toute règle commence sur le symbole  $\neg$ .
- ▶ Nous considérons le cas où  $p_1$  est transformé en  $q_1$ .
- ▶ Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (I)

- ▶ Si  $p = (p_1 \wedge p_2)$  alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de  $p_1$  et de  $p_2$ .
- ▶ Chaque transformation se fait soit sur  $p_1$  soit sur  $p_2$ , il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de  $p$  car toute règle commence sur le symbole  $\neg$ .
- ▶ Nous considérons le cas où  $p_1$  est transformé en  $q_1$ .
- ▶ Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (I)

- ▶ Si  $p = (p_1 \wedge p_2)$  alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de  $p_1$  et de  $p_2$ .
- ▶ Chaque transformation se fait soit sur  $p_1$  soit sur  $p_2$ , il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de  $p$  car toute règle commence sur le symbole  $\neg$ .
- ▶ Nous considérons le cas où  $p_1$  est transformé en  $q_1$ .
- ▶ Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (I)

- ▶ Si  $p = (p_1 \wedge p_2)$  alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de  $p_1$  et de  $p_2$ .
- ▶ Chaque transformation se fait soit sur  $p_1$  soit sur  $p_2$ , il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de  $p$  car toute règle commence sur le symbole  $\neg$ .
- ▶ Nous considérons le cas où  $p_1$  est transformé en  $q_1$ .
- ▶ Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (II)

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi((p_1 \wedge p_2)) \\ = & \phi(p_1) + \phi(p_2) \quad \text{par définition de } \phi \\ > & \phi(q_1) + \phi(p_2) \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ = & \phi((q_1 \wedge p_2)) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (II)

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\phi((p_1 \wedge p_2))$$

$$= \phi(p_1) + \phi(p_2) \quad \text{par définition de } \phi$$

$$> \phi(q_1) + \phi(p_2) \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction}$$

$$= \phi((q_1 \wedge p_2)) \quad \text{par définition de } \phi$$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (II)

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi((p_1 \wedge p_2)) \\ = & \phi(p_1) + \phi(p_2) \quad \text{par définition de } \phi \\ > & \phi(q_1) + \phi(p_2) \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ = & \phi((q_1 \wedge p_2)) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une conjonction (II)

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi((p_1 \wedge p_2)) \\ = & \phi(p_1) + \phi(p_2) \quad \text{par définition de } \phi \\ > & \phi(q_1) + \phi(p_2) \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ = & \phi((q_1 \wedge p_2)) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$



## Démonstration : le cas d'une conjonction (II)

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\phi((p_1 \wedge p_2))$$

$$= \phi(p_1) + \phi(p_2) \quad \text{par définition de } \phi$$

$$> \phi(q_1) + \phi(p_2) \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction}$$

$$= \phi((q_1 \wedge p_2)) \quad \text{par définition de } \phi$$

## Démonstration : le cas d'une disjonction

- ▶ Analogue au cas de la conjonction.
- ▶ Justifié par le fait que la fonction  $\phi$  est définie pareil dans le cas de la conjonction et de la disjonction !

## Démonstration : le cas d'une disjonction

- ▶ Analogue au cas de la conjonction.
- ▶ Justifié par le fait que la fonction  $\phi$  est définie pareil dans le cas de la conjonction et de la disjonction !

## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & && \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & && \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & && \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 \quad \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & \quad \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 \quad \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & \quad \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$



## Démonstration : le cas d'une négation (I)

$p = \neg p_1$ . Sous-cas 1 : transformation de  $p_1$  en  $q_1$ .

Hypothèse d'induction :  $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{aligned} & \phi(\neg p_1) \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 \quad \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 \quad \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & \quad \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) \quad \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine :  $p = \neg\neg p_2$  est transformé en  $p_2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(\neg\neg p_2) \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi(p_2)^4 + 2\phi(p_2)^2 + 1 + 1 \\ > & \phi(p_2) \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$



## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine :  $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$  est transformé en  $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$ :

$$\begin{aligned} & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) \\ = & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 && \text{par définition de } \phi \\ = & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 \\ > & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 && \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\ & && \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\ = & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) && \text{par définition de } \phi \\ = & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) && \text{par définition de } \phi \end{aligned}$$

## Démonstration : le cas d'une négation (IV)

Il s'agit d'une application de la troisième règle à la racine : analogue au cas précédent.



## Mise en forme normale de négation

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné  $p$ , on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

## Mise en forme normale de négation

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné  $p$ , on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

## Mise en forme normale de négation

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné  $p$ , on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

## Mise en forme normale de négation

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné  $p$ , on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

## Mise en forme normale de négation

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné  $p$ , on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

## Démonstration de (1): Le processus termine

- ▶ À chaque transformation la mesure  $\phi$  décroît strictement (montré au-dessus).
- ▶ Cette mesure ne peut jamais descendre au-dessous de 1 (petite proposition au-dessus)
- ▶ Conséquence : si la formule de départ  $p$  a la mesure  $\phi(p) = n$  alors on peut au maximum appliquer  $n - 1$  transformations.

## Démonstration de (1): Le processus termine

- ▶ À chaque transformation la mesure  $\phi$  décroît strictement (montré au-dessus).
- ▶ Cette mesure ne peut jamais descendre au-dessous de 1 (petite proposition au-dessus)
- ▶ Conséquence : si la formule de départ  $p$  a la mesure  $\phi(p) = n$  alors on peut au maximum appliquer  $n - 1$  transformations.

## Démonstration de (1): Le processus termine

- ▶ À chaque transformation la mesure  $\phi$  décroît strictement (montré au-dessus).
- ▶ Cette mesure ne peut jamais descendre au-dessous de 1 (petite proposition au-dessus)
- ▶ Conséquence : si la formule de départ  $p$  a la mesure  $\phi(p) = n$  alors on peut au maximum appliquer  $n - 1$  transformations.



## Démonstration de (2): Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente

Conséquence des lois de la logique propositionnelle.

## Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle s'applique à  $p$ , et que  $p$  contient une sous-formule  $\neg q$ .

- ▶  $q$  ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc,  $q$  doit être une variable.

## Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle s'applique à  $p$ , et que  $p$  contient une sous-formule  $\neg q$ .

- ▶  $q$  ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc,  $q$  doit être une variable.

## Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle s'applique à  $p$ , et que  $p$  contient une sous-formule  $\neg q$ .

- ▶  $q$  ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc,  $q$  doit être une variable.

## Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle s'applique à  $p$ , et que  $p$  contient une sous-formule  $\neg q$ .

- ▶  $q$  ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc,  $q$  doit être une variable.

## Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle s'applique à  $p$ , et que  $p$  contient une sous-formule  $\neg q$ .

- ▶  $q$  ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- ▶  $q$  ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc,  $q$  doit être une variable.

## Littéral, Clause, DNF

### Definition

1. Un **littéral** est soit une variable propositionnelle, soit la négation d'une variable propositionnelle.
2. Une **clause conjonctive** est soit la constante True, soit un littéral, soit une conjonction d'aux moins deux littéraux.
3. Une formule en **forme disjonctive normale** (DNF) est soit la constante False, soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives.

## Littéral, Clause, DNF

### Definition

1. Un **littéral** est soit une variable propositionnelle, soit la négation d'une variable propositionnelle.
2. Une **clause conjonctive** est soit la constante True, soit un littéral, soit une conjonction d'aux moins deux littéraux.
3. Une formule en **forme disjonctive normale** (DNF) est soit la constante False, soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives.



# Littéral, Clause, DNF

## Definition

1. Un **littéral** est soit une variable propositionnelle, soit la négation d'une variable propositionnelle.
2. Une **clause conjonctive** est soit la constante True, soit un littéral, soit une conjonction d'aux moins deux littéraux.
3. Une formule en **forme disjonctive normale** (DNF) est soit la constante False, soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives.

- ▶ « conjonction d'aux moins deux littéraux » : formule de la forme

$$(l_1 \wedge (l_2 \wedge (l_3 \wedge \dots) \dots))$$

où chacun des  $l_i$  est un littéral

- ▶ « disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives » :  
formule de la forme

$$(c_1 \vee (c_2 \vee (c_3 \vee \dots) \dots))$$

où chacun des  $c_i$  est une clause conjonctive.

- ▶ « conjonction d'aux moins deux littéraux » : formule de la forme

$$(l_1 \wedge (l_2 \wedge (l_3 \wedge \dots) \dots))$$

où chacun des  $l_i$  est un littéral

- ▶ « disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives » :  
formule de la forme

$$(c_1 \vee (c_2 \vee (c_3 \vee \dots) \dots))$$

où chacun des  $c_i$  est une clause conjonctive.

## Exemples

### Clauses conjonctives

- ▶ True
- ▶  $x$
- ▶  $(x \wedge y \wedge z)$
- ▶  $(x \wedge \neg x \wedge y)$

### Forme disjonctive normale

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg x \wedge y) \vee x$$

## Exemples

### Clauses conjonctives

- ▶ True
- ▶  $x$
- ▶  $(x \wedge y \wedge z)$
- ▶  $(x \wedge \neg x \wedge y)$

### Forme disjonctive normale

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg x \wedge y) \vee x$$

## Convention

- ▶ La conjonction d'une seule formule  $w$  est  $w$
- ▶ La disjonction d'une seule formule  $w$  est  $w$

## Convention

- ▶ La conjonction d'une seule formule  $w$  est  $w$
- ▶ La disjonction d'une seule formule  $w$  est  $w$

## Éléments neutres

- ▶ La conjonction de zéro formules donne **True**.
- ▶ Justification : Quand on ajoute zéro formules à une conjonction on devrait obtenir une formule équivalente.
- ▶ C.-à-d. : la conjonction de zéro formules est l'élément neutre de la conjonction : **True**
- ▶ Analogie à : la somme de zéro nombres est zéro  $\sum_{i=1}^{i=0} i = 0$
- ▶ La disjonction de zéro formules donne **False** (pareil)



## Éléments neutres

- ▶ La conjonction de zéro formules donne True.
- ▶ Justification : Quand on ajoute zéro formules à une conjonction on devrait obtenir une formule équivalente.
- ▶ C.-à-d. : la conjonction de zéro formules est l'élément neutre de la conjonction : True
- ▶ Analogie à : la somme de zéro nombres est zéro  $\sum_{i=1}^{i=0} i = 0$
- ▶ La disjonction de zéro formules donne False (pareil)

## Éléments neutres

- ▶ La conjonction de zéro formules donne `True`.
- ▶ Justification : Quand on ajoute zéro formules à une conjonction on devrait obtenir une formule équivalente.
- ▶ C.-à-d. : la conjonction de zéro formules est l'élément neutre de la conjonction : `True`
- ▶ Anologue à : la somme de zéro nombres est zéro  $\sum_{i=1}^{i=0} i = 0$
- ▶ La disjonction de zéro formules donne `False` (pareil)

## Éléments neutres

- ▶ La conjonction de zéro formules donne True.
- ▶ Justification : Quand on ajoute zéro formules à une conjonction on devrait obtenir une formule équivalente.
- ▶ C.-à-d. : la conjonction de zéro formules est l'élément neutre de la conjonction : True
- ▶ Analogie à : la somme de zéro nombres est zéro  $\sum_{i=1}^{i=0} i = 0$
- ▶ La disjonction de zéro formules donne False (pareil)

## Éléments neutres

- ▶ La conjonction de zéro formules donne True.
- ▶ Justification : Quand on ajoute zéro formules à une conjonction on devrait obtenir une formule équivalente.
- ▶ C.-à-d. : la conjonction de zéro formules est l'élément neutre de la conjonction : True
- ▶ Analogie à : la somme de zéro nombres est zéro  $\sum_{i=1}^{i=0} i = 0$
- ▶ La disjonction de zéro formules donne False (pareil)

## Simplification de la définition

1. Une **clause conjonctive** est une conjonction de zéro ou plus littéraux.
2. Une formule est en **forme disjonctive normale** si elle est la disjonction de zéro ou plus clauses conjonctives.

## Simplification de la définition

1. Une **clause conjonctive** est une conjonction de zéro ou plus littéraux.
2. Une formule est en **forme disjonctive normale** si elle est la disjonction de zéro ou plus clauses conjonctives.

## NNF et DNF

- ▶ Toute formule en DNF est aussi en NNF
- ▶ Il y a des formules en NNF qui ne sont pas DNF.
- ▶ Exemple :

$$x \wedge (\neg y \vee \neg z)$$

## NNF et DNF

- ▶ Toute formule en DNF est aussi en NNF
- ▶ Il y a des formules en NNF qui ne sont pas DNF.
- ▶ Exemple :

$$x \wedge (\neg y \vee \neg z)$$



## NNF et DNF

- ▶ Toute formule en DNF est aussi en NNF
- ▶ Il y a des formules en NNF qui ne sont pas DNF.
- ▶ Exemple :

$$x \wedge (\neg y \vee \neg z)$$

## Transformation en DNF

- ▶ D'abord mettre la formule en NNF
- ▶ Puis appliquer tant que possible les règles :

$$X \wedge (Y \vee Z) \rightsquigarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (4)$$

$$(X \vee Y) \wedge Z \rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad (5)$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightsquigarrow X \wedge (Y \wedge Z) \quad (6)$$

$$(X \vee Y) \vee Z \rightsquigarrow X \vee (Y \vee Z) \quad (7)$$

## Transformation en DNF

- ▶ D'abord mettre la formule en NNF
- ▶ Puis appliquer tant que possible les règles :

$$X \wedge (Y \vee Z) \rightsquigarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (4)$$

$$(X \vee Y) \wedge Z \rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad (5)$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightsquigarrow X \wedge (Y \wedge Z) \quad (6)$$

$$(X \vee Y) \vee Z \rightsquigarrow X \vee (Y \vee Z) \quad (7)$$

## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

par règle 1

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

par règle 3

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

par règle 4

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

par règle 6 (2 fois)

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 5

## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 1

par règle 3

par règle 4

par règle 6 (2 fois)

par règle 5

## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

par règle 1

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

par règle 3

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

par règle 4

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

par règle 6 (2 fois)

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 5

## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 1

par règle 3

par règle 4

par règle 6 (2 fois)

par règle 5

## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 1

par règle 3

par règle 4

par règle 6 (2 fois)

par règle 5



## Exemple

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

$$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$$

$$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$$

$$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$$

par règle 1

par règle 3

par règle 4

par règle 6 (2 fois)

par règle 5

## Le théorème de terminaison

**Proposition :** Soit  $\psi : Form \rightarrow \mathbb{N}$  définie par récurrence :

- ▶  $\psi(x) = 2$  si  $x \in V$
- ▶  $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- ▶  $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2\psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- ▶  $\psi(\neg p) = \psi(p)$

Alors pour toute formule  $p \in Form$  : Si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une des règles 4 à 7 alors  $\psi(p) > \psi(q)$ .

Démonstration : exercice

## Le théorème de terminaison

**Proposition :** Soit  $\psi : Form \rightarrow \mathbb{N}$  définie par récurrence :

- ▶  $\psi(x) = 2$  si  $x \in V$
- ▶  $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- ▶  $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2\psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- ▶  $\psi(\neg p) = \psi(p)$

Alors pour toute formule  $p \in Form$  : Si  $p$  se transforme en  $q$  par une application d'une des règles 4 à 7 alors  $\psi(p) > \psi(q)$ .

Démonstration : exercice

## Mise en forme DNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF

## Mise en forme DNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF

## Mise en forme DNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF

## Mise en forme DNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF

## Mise en forme DNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF



## Démonstration du Théorème de mise en DNF (I)

1. Le processus termine : conséquence de la proposition (décroissance de la fonction  $\psi$ ).
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ : conséquence du fait que chaque étape de transformation est une équivalence (voir les lois de la logique propositionnelle)

## Démonstration du Théorème de mise en DNF (I)

1. Le processus termine : conséquence de la proposition (décroissance de la fonction  $\psi$ ).
2. La résultat est équivalent à la formule de départ : conséquence du fait que chaque étape de transformation est une équivalence (voir les lois de la logique propositionnelle)

## Démonstration du Théorème de mise en DNF (II)

On veut montrer qu'à la fin on obtient une DNF. Supposons par l'absurde qu'aucune transformation ne s'applique à  $p$ , mais  $p$  n'est pas en forme disjonctive normale.

- ▶ Si  $p$  n'est pas en forme normale de négation : ce n'est pas possible car aucune des règles 4 à 7 peut transformer une formule en forme normale de négation en une formule qui n'est pas en forme normale de négation.
- ▶ Si  $p$  contient une sous-formule  $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$  ou  $(p_1 \vee p_2) \vee p_3$  : Une des règles (6) ou (7) s'applique alors, contradiction.
- ▶ S'il y a en  $p$  une disjonction au-dessous d'une conjonction, c'est-à-dire  $p$  contient une sous-formule de la forme  $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$  ou de la forme  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3)$  : Une des règles (4) ou (5) s'applique alors, contradiction.

## Démonstration du Théorème de mise en DNF (II)

On veut montrer qu'à la fin on obtient une DNF. Supposons par l'absurde qu'aucune transformation ne s'applique à  $p$ , mais  $p$  n'est pas en forme disjonctive normale.

- ▶ Si  $p$  n'est pas en forme normale de négation : ce n'est pas possible car aucune des règles 4 à 7 peut transformer une formule en forme normale de négation en une formule qui n'est pas en forme normale de négation.
- ▶ Si  $p$  contient une sous-formule  $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$  ou  $(p_1 \vee p_2) \vee p_3$  : Une des règles (6) ou (7) s'applique alors, contradiction.
- ▶ S'il y a en  $p$  une disjonction au-dessous d'une conjonction, c'est-à-dire  $p$  contient une sous-formule de la forme  $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$  ou de la forme  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3)$  : Une des règles (4) ou (5) s'applique alors, contradiction.

## Démonstration du Théorème de mise en DNF (II)

On veut montrer qu'à la fin on obtient une DNF. Supposons par l'absurde qu'aucune transformation ne s'applique à  $p$ , mais  $p$  n'est pas en forme disjonctive normale.

- ▶ Si  $p$  n'est pas en forme normale de négation : ce n'est pas possible car aucune des règles 4 à 7 peut transformer une formule en forme normale de négation en une formule qui n'est pas en forme normale de négation.
- ▶ Si  $p$  contient une sous-formule  $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$  ou  $(p_1 \vee p_2) \vee p_3$  : Une des règles (6) ou (7) s'applique alors, contradiction.
- ▶ S'il y a en  $p$  une disjonction au-dessous d'une conjonction, c'est-à-dire  $p$  contient une sous-formule de la forme  $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$  ou de la forme  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3)$  : Une des règles (4) ou (5) s'applique alors, contradiction.

## Démonstration du Théorème de mise en DNF (II)

On veut montrer qu'à la fin on obtient une DNF. Supposons par l'absurde qu'aucune transformation ne s'applique à  $p$ , mais  $p$  n'est pas en forme disjonctive normale.

- ▶ Si  $p$  n'est pas en forme normale de négation : ce n'est pas possible car aucune des règles 4 à 7 peut transformer une formule en forme normale de négation en une formule qui n'est pas en forme normale de négation.
- ▶ Si  $p$  contient une sous-formule  $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$  ou  $(p_1 \vee p_2) \vee p_3$  : Une des règles (6) ou (7) s'applique alors, contradiction.
- ▶ S'il y a en  $p$  une disjonction au-dessous d'une conjonction, c'est-à-dire  $p$  contient une sous-formule de la forme  $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$  ou de la forme  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3)$  : Une des règles (4) ou (5) s'applique alors, contradiction.

## Explosion de la taille

Attention, la transformation d'une formule en forme disjonctive normale risque de faire croître la taille de la formule de façon exponentielle. Par exemple : la DNF de la formule

$$(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2)$$

est

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2) \\ \vee & (x_1 \wedge y_2) \\ \vee & (y_1 \wedge x_2) \\ \vee & (y_1 \wedge y_2) \end{aligned}$$

## Explosion de la taille

Attention, la transformation d'une formule en forme disjonctive normale risque de faire croître la taille de la formule de façon exponentielle. Par exemple : la DNF de la formule

$$(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2)$$

est

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2) \\ \vee & (x_1 \wedge y_2) \\ \vee & (y_1 \wedge x_2) \\ \vee & (y_1 \wedge y_2) \end{aligned}$$



## Explosion de la taille (2)

La mise en forme disjonctive normale de

$$(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge (x_3 \vee y_3)$$

donne

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ \vee & (x_1 \wedge x_2 \wedge y_3) \\ \vee & (x_1 \wedge y_2 \wedge x_3) \\ \vee & (x_1 \wedge y_2 \wedge y_3) \\ \vee & (y_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ \vee & (y_1 \wedge x_2 \wedge y_3) \\ \vee & (y_1 \wedge y_2 \wedge x_3) \\ \vee & (y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) \end{aligned}$$

## Explosion de la taille (3)

En général la mise en forme disjonctive normale de la formule

$$(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge \dots \wedge (x_n \vee y_n)$$

donne une formule avec  $2^n$  clauses conjonctives, chaque clause consistant en  $n$  littéraux.

## DNF et satisfaisabilité

**Théorème :** Une formule en forme disjonctive normale

$$(c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n)$$

est satisfaisable si et seulement s'il y a un  $i$  tel que la clause  $c_i$  ne contient pas à la fois une variable  $x$  et aussi sa négation.

## Démonstration

Une formule en DNF est satisfaisable si et seulement si elle contient au moins une clause conjonctive qui est satisfaisable.

Il reste à montrer qu'une clause conjonctive

$$c = (l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m)$$

est satisfaisable si et seulement si elle ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .

- ▶ Si  $c$  contient un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors évidemment  $c$  n'est pas satisfaisable.
- ▶ Si  $c$  ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors  $c$  est satisfaite par l'affectation  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un littéral en } c \\ 0 & \text{si } \neg x \text{ est un littéral en } c, \text{ ou si } x \notin \mathcal{V}(c) \end{cases}$$

## Démonstration

Une formule en DNF est satisfaisable si et seulement si elle contient au moins une clause conjonctive qui est satisfaisable.

Il reste à montrer qu'une clause conjonctive

$$c = (l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m)$$

est satisfaisable si et seulement si elle ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .

- ▶ Si  $c$  contient un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors évidemment  $c$  n'est pas satisfaisable.
- ▶ Si  $c$  ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors  $c$  est satisfaite par l'affectation  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un littéral en } c \\ 0 & \text{si } \neg x \text{ est un littéral en } c, \text{ ou si } x \notin \mathcal{V}(c) \end{cases}$$

## Démonstration

Une formule en DNF est satisfaisable si et seulement si elle contient au moins une clause conjonctive qui est satisfaisable.

Il reste à montrer qu'une clause conjonctive

$$c = (l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m)$$

est satisfaisable si et seulement si elle ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .

- ▶ Si  $c$  contient un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors évidemment  $c$  n'est pas satisfaisable.
- ▶ Si  $c$  ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors  $c$  est satisfaite par l'affectation  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un littéral en } c \\ 0 & \text{si } \neg x \text{ est un littéral en } c, \text{ ou si } x \notin \mathcal{V}(c) \end{cases}$$

## Démonstration

Une formule en DNF est satisfaisable si et seulement si elle contient au moins une clause conjonctive qui est satisfaisable.

Il reste à montrer qu'une clause conjonctive

$$c = (l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m)$$

est satisfaisable si et seulement si elle ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .

- ▶ Si  $c$  contient un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors évidemment  $c$  n'est pas satisfaisable.
- ▶ Si  $c$  ne contient pas à la fois un littéral  $x$  et aussi  $\neg x$  alors  $c$  est satisfaite par l'affectation  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un littéral en } c \\ 0 & \text{si } \neg x \text{ est un littéral en } c, \text{ ou si } x \notin \mathcal{V}(c) \end{cases}$$

## Méthode pratique pour décider la satisfaisabilité?

- ▶ Idée naïve : transformer la formule en DNF, puis appliquer le théorème pour savoir si elle est satisfaisable.
- ▶ Problème : la formule mise en DNF peut être « exponentiellement » plus grande. Cet algorithme n'est pas plus efficace que la méthode par table de vérité.



## Méthode pratique pour décider la satisfaisabilité?

- ▶ Idée naïve : transformer la formule en DNF, puis appliquer le théorème pour savoir si elle est satisfaisable.
- ▶ Problème : la formule mise en DNF peut être « exponentiellement » plus grande. Cet algorithme n'est pas plus efficace que la méthode par table de vérité.

## Question (version 1)

*Question 1 : Est-il possible que deux formules **différentes** en forme disjonctive normale soient équivalentes ?*

Réponse : oui ! La différence peut être dans l'ordre des littéraux ou des clauses :

$$\begin{aligned} & (x \wedge y) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (\neg z \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \end{aligned}$$

## Question (version 1)

*Question 1 : Est-il possible que deux formules **différentes** en forme disjonctive normale soient équivalentes ?*

Réponse : oui ! La différence peut être dans l'ordre des littéraux ou des clauses :

$$(x \wedge y) \vee (\neg z \wedge \neg y)$$

$$\vDash (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y)$$

$$\vDash (\neg z \wedge \neg y) \vee (y \wedge x)$$

## Question (version 1)

*Question 1 : Est-il possible que deux formules **différentes** en forme disjonctive normale soient équivalentes ?*

Réponse : oui ! La différence peut être dans l'ordre des littéraux ou des clauses :

$$\begin{aligned} & (x \wedge y) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (\neg z \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \end{aligned}$$

## Question (version 1)

*Question 1 : Est-il possible que deux formules **différentes** en forme disjonctive normale soient équivalentes ?*

Réponse : oui ! La différence peut être dans l'ordre des littéraux ou des clauses :

$$\begin{aligned} & (x \wedge y) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \\ \equiv & (\neg z \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \end{aligned}$$

## Question (version 2) ?

*Question 2 : Est-il possible que deux formules en forme disjonctive normale **avec plus de différence que simplement l'ordre des littéraux ou l'ordre des clauses**, soient équivalentes ?*

Réponse : oui !

$$(x \wedge y)$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

## Question (version 2) ?

*Question 2 : Est-il possible que deux formules en forme disjonctive normale avec plus de différence que simplement l'ordre des littéraux ou l'ordre des clauses, soient équivalentes ?*

Réponse : oui !

$$(x \wedge y)$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

## Subsommation

### Definition

Une clause conjonctive  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$  **subsume** une clause conjonctive  $k_1 \wedge \dots \wedge k_m$  si pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  il existe un  $j$  avec  $1 \leq j \leq m$  tel que  $k_j = l_i$ .

C-à-d : Une clause  $c$  subsume une clause  $d$  si  $c$  est « incluse » en  $d$  à l'ordre des littéraux et à des éventuelles répétitions près.

Exemples :

- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge x \wedge \neg y$
- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge \neg y \wedge z \wedge x$ .



## Subsommption

### Definition

Une clause conjonctive  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$  **subsume** une clause conjonctive  $k_1 \wedge \dots \wedge k_m$  si pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  il existe un  $j$  avec  $1 \leq j \leq m$  tel que  $k_j = l_i$ .

C-à-d : Une clause  $c$  subsume une clause  $d$  si  $c$  est « incluse » en  $d$  à l'ordre des littéraux et à des éventuelles répétitions près.

Exemples :

- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge x \wedge \neg y$
- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge \neg y \wedge z \wedge x$ .

## Subsommption

### Definition

Une clause conjonctive  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$  **subsume** une clause conjonctive  $k_1 \wedge \dots \wedge k_m$  si pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  il existe un  $j$  avec  $1 \leq j \leq m$  tel que  $k_j = l_i$ .

C-à-d : Une clause  $c$  subsume une clause  $d$  si  $c$  est « incluse » en  $d$  à l'ordre des littéraux et à des éventuelles répétitions près.

Exemples :

- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge x \wedge \neg y$
- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge \neg y \wedge z \wedge x$ .

## Subsommption

### Definition

Une clause conjonctive  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$  **subsume** une clause conjonctive  $k_1 \wedge \dots \wedge k_m$  si pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  il existe un  $j$  avec  $1 \leq j \leq m$  tel que  $k_j = l_i$ .

C-à-d : Une clause  $c$  subsume une clause  $d$  si  $c$  est « incluse » en  $d$  à l'ordre des littéraux et à des éventuelles répétitions près.

Exemples :

- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge x \wedge \neg y$
- ▶  $x \wedge \neg y$  subsume  $z \wedge \neg y \wedge z \wedge x$ .

## Propriété de la subsumption

**Proposition :** Si la clause conjonctive  $c$  subsume la clause conjonctive  $d$  alors  $d \models c$ .

Par exemple  $x \wedge \neg y \wedge z \models x \wedge \neg y$ .

## Clauses subsumées sont redondantes

**Théorème :** Soient  $c_1, \dots, c_n$  des clauses conjonctives. Si  $c_j$  subsume  $c_i$  pour  $i \neq j$  alors

$$c_1 \vee \dots \vee c_{i-1} \vee c_i \vee c_{i+1} \vee \dots \vee c_n \models c_1 \vee \dots \vee c_{i-1} \vee c_{i+1} \vee \dots \vee c_n$$

Exemple :

$$(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y \wedge z_1 \wedge \neg z_2) \models (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

## Clauses subsumées sont redondantes

**Théorème :** Soient  $c_1, \dots, c_n$  des clauses conjonctives. Si  $c_j$  subsume  $c_i$  pour  $i \neq j$  alors

$$c_1 \vee \dots \vee c_{i-1} \vee c_i \vee c_{i+1} \vee \dots \vee c_n \models c_1 \vee \dots \vee c_{i-1} \vee c_{i+1} \vee \dots \vee c_n$$

Exemple :

$$(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y \wedge z_1 \wedge \neg z_2) \models (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

## Question (version 3)

*Question 3 : Est-il possible que deux formules en forme disjonctive normale avec plus de différence que simplement l'ordre des littéraux ou l'ordre des clauses, **et où aucune clause subsume une autre dans la même formule**, soient équivalentes ?*

## Réponse à la question, version 3

Oui ! Exemple :

$$\begin{array}{l} \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \vdash \neg y \vee (y \wedge \neg x) \end{array}$$

Ces deux formules sont équivalentes à

$$(\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y)$$



## Réponse à la question, version 3

Oui ! Exemple :

$$\begin{aligned} & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \Leftrightarrow & \neg y \vee (y \wedge \neg x) \end{aligned}$$

Ces deux formules sont équivalentes à

$$(\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y)$$

## Réponse à la question, version 3

Oui ! Exemple :

$$\begin{aligned} & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \Leftrightarrow & \neg y \vee (y \wedge \neg x) \end{aligned}$$

Ces deux formules sont équivalentes à

$$(\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y)$$

## Réponse à la question, version 3

Oui ! Exemple :

$$\begin{aligned} & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \Leftrightarrow & \neg y \vee (y \wedge \neg x) \end{aligned}$$

Ces deux formules sont équivalentes à

$$(\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y)$$

## Preuve de la première équivalence

$$\neg x \vee (x \wedge \neg y)$$

$$\equiv (\neg x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (x \wedge \neg y)$$

$$\equiv (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y)$$

True est l'élément neutre de  $\wedge$

Distributivité

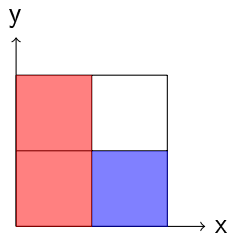
## Preuve de la première équivalence

$$\begin{aligned} & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \equiv & (\neg x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (x \wedge \neg y) && \text{True est l'élément neutre de } \wedge \\ \equiv & (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y) && \text{Distributivité} \end{aligned}$$

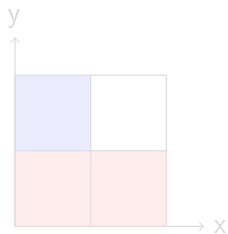
## Preuve de la première équivalence

$$\begin{aligned} & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \\ \text{H} & (\neg x \wedge (y \vee \neg y)) \vee (x \wedge \neg y) && \text{True est l'élément neutre de } \wedge \\ \text{H} & (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y) && \text{Distributivité} \end{aligned}$$

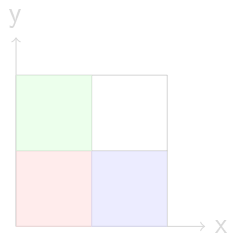
## Illustration

 $\neg x$ 

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

 $\neg y$ 

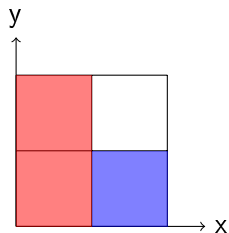
$$\vee (\neg x \wedge y)$$

 $(\neg x \wedge \neg y)$ 

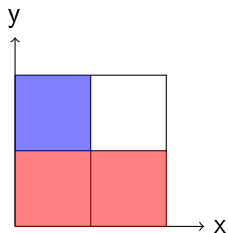
$$\vee (x \wedge \neg y)$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$

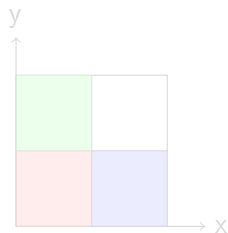
## Illustration

 $\neg x$ 

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

 $\neg y$ 

$$\vee (\neg x \wedge y)$$

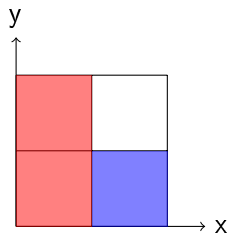
 $(\neg x \wedge \neg y)$ 

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$

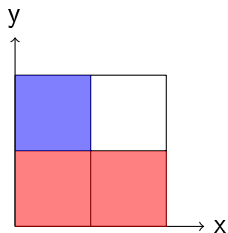


## Illustration



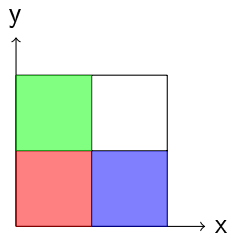
$$\neg x$$

$$\vee (x \wedge \neg y)$$



$$\neg y$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$



$$(\neg x \wedge \neg y)$$

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$

Il y a encore une autre ...

... formule en DNF qui est équivalente à  $\neg x \vee (x \wedge \neg y)$ , et qui est même plus courte :

$$\neg x \vee \neg y \tag{8}$$

Il y a encore une autre ...

... formule en DNF qui est équivalente à  $\neg x \vee (x \wedge \neg y)$ , et qui est même plus courte :

$$\neg x \vee \neg y \quad (8)$$

## Preuve de l'équivalence

$$\neg x \vee \neg y$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge (x \vee \neg x))$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge x) \vee (\neg y \wedge \neg x)$$

$$\vDash \neg x \vee (x \wedge \neg y)$$

True est l'élément neutre de  $\wedge$

Distributivité

car  $\neg x$  subsume  $\neg y \wedge \neg x$

## Preuve de l'équivalence

$$\begin{aligned} & \neg x \vee \neg y \\ \vDash & \neg x \vee (\neg y \wedge (x \vee \neg x)) \\ \vDash & \neg x \vee (\neg y \wedge x) \vee (\neg y \wedge \neg x) \\ \vDash & \neg x \vee (x \wedge \neg y) \end{aligned}$$

True est l'élément neutre de  $\wedge$

Distributivité

car  $\neg x$  subsume  $\neg y \wedge \neg x$

## Preuve de l'équivalence

$$\neg x \vee \neg y$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge (x \vee \neg x))$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge x) \vee (\neg y \wedge \neg x)$$

$$\vDash \neg x \vee (x \wedge \neg y)$$

True est l'élément neutre de  $\wedge$

Distributivité

car  $\neg x$  subsume  $\neg y \wedge \neg x$

## Preuve de l'équivalence

$$\neg x \vee \neg y$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge (x \vee \neg x))$$

$$\vDash \neg x \vee (\neg y \wedge x) \vee (\neg y \wedge \neg x)$$

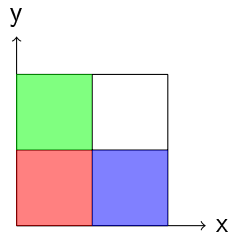
$$\vDash \neg x \vee (x \wedge \neg y)$$

True est l'élément neutre de  $\wedge$

Distributivité

car  $\neg x$  subsume  $\neg y \wedge \neg x$

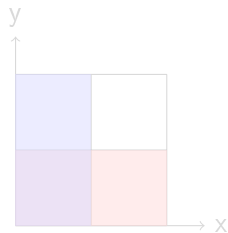
## Illustration



$$(\neg x \wedge \neg y)$$

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$

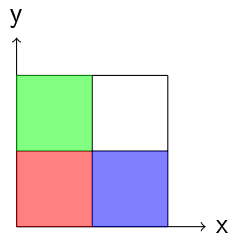


$$\neg y$$

$$\vee \neg x$$



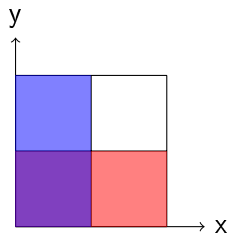
## Illustration



$$(\neg x \wedge \neg y)$$

$$\vee (x \wedge \neg y)$$

$$\vee (\neg x \wedge y)$$



$$\neg y$$

$$\vee \neg x$$

## DNF minimale

- ▶ Taille d'une formule en DNF : nombre d'occurrences de littéraux
- ▶ Exemple :  $(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)$  a taille 4.
- ▶ DNF minimale : DNF, qui est de taille minimale parmi toutes les DNF équivalentes
- ▶  $\neg x \vee \neg y$  est une DNF minimale.

## DNF minimale

- ▶ Taille d'une formule en DNF : nombre d'occurrences de littéraux
- ▶ Exemple :  $(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)$  a taille 4.
- ▶ DNF minimale : DNF, qui est de taille minimale parmi toutes les DNF équivalentes
- ▶  $\neg x \vee \neg y$  est une DNF minimale.

## DNF minimale

- ▶ Taille d'une formule en DNF : nombre d'occurrences de littéraux
- ▶ Exemple :  $(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)$  a taille 4.
- ▶ DNF minimale : DNF, qui est de taille minimale parmi toutes les DNF équivalentes
- ▶  $\neg x \vee \neg y$  est une DNF minimale.

## DNF minimale

- ▶ Taille d'une formule en DNF : nombre d'occurrences de littéraux
- ▶ Exemple :  $(x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)$  a taille 4.
- ▶ DNF minimale : DNF, qui est de taille minimale parmi toutes les DNF équivalentes
- ▶  $\neg x \vee \neg y$  est une DNF minimale.

## Parenthèse : minimaliser des DNF

- ▶ Problème très étudié dans le contexte de l'architecture des circuits.
- ▶ Algorithme le plus célèbre dû à **Quine** et **McCluskey**
- ▶ Voir le cours d'architecture d'ordinateurs.

## Parenthèse : minimaliser des DNF

- ▶ Problème très étudié dans le contexte de l'architecture des circuits.
- ▶ Algorithme le plus célèbre dû à **Quine** et **McCluskey**
- ▶ Voir le cours d'architecture d'ordinateurs.

## Parenthèse : minimaliser des DNF

- ▶ Problème très étudié dans le contexte de l'architecture des circuits.
- ▶ Algorithme le plus célèbre dû à **Quine** et **McCluskey**
- ▶ Voir le cours d'architecture d'ordinateurs.



## Question (version 4) ?

*Est-ce que les DNF **minimales** sont uniques, à l'ordre des littéraux et des clauses près ?*

## Il n'y a toujours pas d'unicité

$$(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Cette formule est équivalente aux deux formules plus petites en forme disjonctive normale

$$(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)$$

$$(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)$$

## Forme conjonctive normale

Analogue à la forme disjonctive normale :

### Definition

1. Une **clause disjonctive** est une disjonction de zéro ou plus littéraux.
2. Une formule est en **forme conjonctive normale** (abrégé CNF) si elle est la conjonction de zéro ou plus clauses disjonctives.

## Exemples CNF

- ▶  $(x \vee y) \wedge (\neg z \vee y \vee \neg z)$
- ▶  $(x \vee \neg y \vee z)$  (qui est aussi en DNF !)
- ▶  $(x \wedge \neg y \wedge z)$  (qui est aussi en DNF !)

## Exemples CNF

- ▶  $(x \vee y) \wedge (\neg z \vee y \vee \neg z)$
- ▶  $(x \vee \neg y \vee z)$  (qui est aussi en DNF !)
- ▶  $(x \wedge \neg y \wedge z)$  (qui est aussi en DNF !)

## Exemples CNF

- ▶  $(x \vee y) \wedge (\neg z \vee y \vee \neg z)$
- ▶  $(x \vee \neg y \vee z)$  (qui est aussi en DNF !)
- ▶  $(x \wedge \neg y \wedge z)$  (qui est aussi en DNF !)

## Mise en forme CNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme conjonctive normale.

Procédure est analogue à celle de la mise en forme disjonctive normale, sauf que les deux premières règles de transformation (4) et (5) sont à remplacer par

$$X \vee (Y \wedge Z) \rightsquigarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \quad (9)$$

$$(X \wedge Y) \vee Z \rightsquigarrow (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \quad (10)$$

## Mise en forme CNF

**Théorème :** Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme conjonctive normale.

Procédure est analogue à celle de la mise en forme disjonctive normale, sauf que les deux premières règles de transformation (4) et (5) sont à remplacer par

$$X \vee (Y \wedge Z) \rightsquigarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \quad (9)$$

$$(X \wedge Y) \vee Z \rightsquigarrow (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \quad (10)$$



## CNF et validité

**Théorème :** Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout  $i$  il existe une variable  $x$  telle que la clause  $d_i$  contient à la fois le littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .

## Subsomption de clauses disjonctives

### Definition

Une clause disjonctive  $l_1 \vee \dots \vee l_n$  **subsume** une clause disjonctive  $k_1 \vee \dots \vee k_m$  si pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  il existe un  $j$  avec  $1 \leq j \leq m$  tel que  $k_j = l_i$ .

Par exemple,  $x \vee \neg y$  subsume  $x \vee \neg y \vee z$ .

## Subsommation de clauses disjonctives

**Proposition :** Si la clause disjonctive  $c$  subsume la clause disjonctive  $d$  alors  $c \models d$ .

Remarquez que le sens de la conséquence est inverse à celui de la proposition sur la subsommation des clauses conjonctives.

Par exemple  $x \vee \neg y \models x \vee \neg y \vee z$ .

## Les clauses subsumées sont redondantes

**Théorème :** Soient  $c_1, \dots, c_n$  des clauses disjonctives. Si  $c_j$  subsume  $c_i$  pour  $i \neq j$  alors

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_{i-1} \wedge c_i \wedge c_{i+1} \wedge \dots \wedge c_n \models c_1 \wedge \dots \wedge c_{i-1} \wedge c_{i+1} \wedge \dots \wedge c_n$$

## Satisfaisabilité et Validité

Formule en	DNF	CNF
Satisfaisabilité :	trivial	algorithme efficace ?
Validité :	algorithme efficace ?	trivial

Voir le chapitre 5 pour un algorithme efficace en pratique.