Chapitre 6
Modélisation en logique propositionnelle
Cours 2
Contraintes de Comptage

Contraintes comptage

Pour un sous-ensemble $Y \subseteq X$ de variables et un entier n une des trois formes :

1. au moins n des variables dans Y sont vraies;
2. au plus n des variables dans Y sont vraies;
3. exactement n des variables dans Y sont vraies.

Exemple : Coloration de la carte d'Australie

Précisément 2 des régions sont colorées en rouges.
On a $n = 2$ et

$$Y = \{\texttt{[WA,r]}, \texttt{[NT,r]}, \texttt{[SA,r]}, \texttt{[QLD,r]}, \texttt{[NSW,r]}, \texttt{[VIC,r]}, \texttt{[TAS,r]}\}$$

Contraintes comptage

Pour un sous-ensemble $Y \subseteq X$ de variables et un entier n une des trois formes :

1. au moins n des variables dans Y sont vraies;
2. au plus n des variables dans Y sont vraies;
3. exactement n des variables dans Y sont vraies.

Exemple : Coloration de la carte d'Australie

Précisément 2 des régions sont colorées en rouges.
On a $n = 2$ et

$$Y = \{\texttt{[WA,r]}, \texttt{[NT,r]}, \texttt{[SA,r]}, \texttt{[QLD,r]}, \texttt{[NSW,r]}, \texttt{[VIC,r]}, \texttt{[TAS,r]}\}$$

Comment coder les contraintes de comptage ?

La contrainte *exactement n parmi les variables de Y sont vraies* est équivalente à la conjonction de

- au moins n parmi les variables de Y sont vraies;
- au plus n parmi les variables de Y sont vraies.

Supposons que $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Au moins n parmi les variables de Y sont vraies

Cas $n = 1$

$$y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$$

Cas $n = 2$

engendrer toutes les paires de deux variables différentes de Y, et exprimer le fait qu'au moins une de ces paires est entièrement colorée en rouge :

$$(y_1 \wedge y_2) \vee \ldots \vee (y_1 \wedge y_m) \vee (y_2 \wedge y_3) \vee \ldots \vee (y_2 \wedge y_m) \vee \ldots \vee (y_{m-1} \wedge y_m)$$

Plus précisément :

$$\bigvee_{\substack{i_1=1,\ldots,m-1 \\ i_2=i_1+1,\ldots,m}} (y_{i_1} \wedge y_{i_2}) \qquad \text{i.e.} \qquad \bigvee_{\substack{i_1,i_2=1,\ldots,m \\ i_1<i_2}} \bigwedge_{j=1,2} y_{i_j}$$

Au moins n parmi les variables de Y sont vraies

Cas $n = 1$

$$y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$$

Cas $n = 2$

engendrer toutes les paires de deux variables différentes de Y, et exprimer le fait qu'au moins une de ces paires est entièrement colorée en rouge :

$$(y_1 \wedge y_2) \vee \ldots \vee (y_1 \wedge y_m) \vee (y_2 \wedge y_3) \vee \ldots \vee (y_2 \wedge y_m) \vee \ldots \vee (y_{m-1} \wedge y_m)$$

Plus précisément :

$$\bigvee_{\substack{i_1 = 1,\ldots,m-1 \\ i_2 = i_1+1,\ldots,m}} (y_{i_1} \wedge y_{i_2}) \qquad \text{i.e.} \qquad \bigvee_{\substack{i_1, i_2 = 1,\ldots,m \\ i_1 < i_2}} \bigwedge_{j=1,2} y_{i_j}$$

Comment coder les contraintes de comptage ?

Cette construction se généralise à un nombre n quelconque :

$$\bigvee_{\substack{i_1,\dots,i_n=1,\dots,m \\ i_1<\dots<i_n}} \bigwedge_{j=1,\dots,n} y_{i_j}$$

Comment construire une formule équivalente en forme CNF ?

Considérons par exemple le cas $n = 2$:

Au moins 2 variable de Y sont vraies si et seulement si pour n'importe quelle sélection de $m-1$ variables de Y, au moins une dans cette sélection est vraie.

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\dots,i_{m-1}=1,\dots,m \\ i_1<\dots<i_{m-1}}} \bigvee_{j=1,\dots,m-1} y_{i_j}$$

Comment coder les contraintes de comptage ?

Cette construction se généralise à un nombre n quelconque :

$$\bigvee_{\substack{i_1,\ldots,i_n=1,\ldots,m\\ i_1<\ldots<i_n}} \bigwedge_{j=1,\ldots,n} y_{i_j}$$

Comment construire une formule équivalente en forme CNF ?

Considérons par exemple le cas $n = 2$:

Au moins 2 variable de Y sont vraies si et seulement si pour n'importe quelle sélection de $m-1$ variables de Y, au moins une dans cette sélection est vraie.

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-1}=1,\ldots,m\\ i_1<\ldots<i_{m-1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,m-1} y_{i_j}$$

Construction directe de la CNF équivalente

Plus généralement, sont équivalents :

- au moins n parmi les variables de Y sont vraies
- pour n'importe quelle sélection de $m - n + 1$ variables de Y, au moins une dans cette sélection est vraie.

La formule :

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-n+1}=1,\ldots,m \\ i_1<\ldots<i_{m-n+1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,m-n+1} y_{i_j}$$

Construction directe de la CNF équivalente

Plus généralement, sont équivalents :

- au moins n parmi les variables de Y sont vraies
- pour n'importe quelle sélection de $m - n + 1$ variables de Y, au moins une dans cette sélection est vraie.

La formule :

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{m-n+1}=1,\ldots,m \\ i_1<\ldots<i_{m-n+1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,m-n+1} y_{i_j}$$

Au moins deux régions de l'Australie sont rouges :

Nous avons $m = 7$ et $n = 2$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[VIC,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[VIC,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[VIC,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[VIC,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[WA,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[VIC,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big) \\
\wedge & \big(\texttt{[NT,r]} \vee \texttt{[SA,r]} \vee \texttt{[QLD,r]} \vee \texttt{[NSW,r]} \vee \texttt{[VIC,r]} \vee \texttt{[TAS,r]}\big)
\end{array}
$$

Au plus n des variables dans Y sont vraies

Équivalent à :

- *au moins $m - n$ des variables dans Y sont fausses*
- Dans toute sélection de $m - (m - n) + 1 = n + 1$ variables de Y il y a une qui est fausse

La formule

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{n+1}=1,\ldots,m \\ i_1<\ldots<i_{n+1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,n+1} \neg y_{i_j}$$

Au plus n des variables dans Y sont vraies

Équivalent à :

- *au moins $m - n$ des variables dans Y sont fausses*
- Dans toute sélection de $m - (m - n) + 1 = n + 1$ variables de Y il y a une qui est fausse

La formule

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{n+1}=1,\ldots,m \\ i_1<\ldots<i_{n+1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,n+1} \neg y_{i_j}$$

Au plus n des variables dans Y sont vraies

Équivalent à :

- *au moins $m - n$ des variables dans Y sont fausses*
- Dans toute sélection de $m - (m - n) + 1 = n + 1$ variables de Y il y a une qui est fausse

La formule

$$\bigwedge_{\substack{i_1,\ldots,i_{n+1}=1,\ldots,m \\ i_1<\ldots<i_{n+1}}} \bigvee_{j=1,\ldots,n+1} \neg y_{i_j}$$

Au plus deux régions de l'Australie sont rouges :

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg\texttt{[WA,r]} \vee \neg\texttt{[NT,r]} \vee \neg\texttt{[SA,r]}) \\
\wedge & (\neg\texttt{[WA,r]} \vee \neg\texttt{[NT,r]} \vee \neg\texttt{[QLD,r]}) \\
\wedge & (\neg\texttt{[WA,r]} \vee \neg\texttt{[NT,r]} \vee \neg\texttt{[NSW,r]}) \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\vdots \\
\wedge & (\neg\texttt{[NSW,r]} \vee \neg\texttt{[VIC,r]} \vee \neg\texttt{[TAS,r]})
\end{array}
$$

Remarques finales

- En logique propositionnelle, les variables ne peuvent prendre que deux valeurs différentes.
- D'où le besoin d'encodages avec plusieurs variables.
- Il y a aussi une technique utilisant des variables qui peuvent prendre plusieurs valeurs différentes (appelées des *variables à domaine fini*).
- Résolution de contraintes avec des variables de domaine fini : Voir les cours de programmation logique (et par contrainte) en M1 et M2.

Remarques finales

- En logique propositionnelle, les variables ne peuvent prendre que deux valeurs différentes.
- D'où le besoin d'encodages avec plusieurs variables.
- Il y a aussi une technique utilisant des variables qui peuvent prendre plusieurs valeurs différentes (appelées des *variables à domaine fini*).
- Résolution de contraintes avec des variables de domaine fini : Voir les cours de programmation logique (et par contrainte) en M1 et M2.

Remarques finales

- En logique propositionnelle, les variables ne peuvent prendre que deux valeurs différentes.
- D'où le besoin d'encodages avec plusieurs variables.
- Il y a aussi une technique utilisant des variables qui peuvent prendre plusieurs valeurs différentes (appelées des *variables à domaine fini*).
- Résolution de contraintes avec des variables de domaine fini : Voir les cours de programmation logique (et par contrainte) en M1 et M2.

Remarques finales

- En logique propositionnelle, les variables ne peuvent prendre que deux valeurs différentes.
- D'où le besoin d'encodages avec plusieurs variables.
- Il y a aussi une technique utilisant des variables qui peuvent prendre plusieurs valeurs différentes (appelées des *variables à domaine fini*).
- Résolution de contraintes avec des variables de domaine fini : Voir les cours de programmation logique (et par contrainte) en M1 et M2.