Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°0

Syntaxe des formules

Exercice 1 Déterminez si les mots suivants sont des formules. Dans les cas où la réponse est non, dire si on peut quand même donner une signification au mot, ou s'il y a de l'ambiguïté :
- $x\#y$
- x, y
- (x)
- $(x \wedge x)$
- $x \wedge x$
- $x \wedge y \wedge z$
- $x \wedge y \wedge z \vee x'$
- $(x \wedge y \wedge z) \vee x'$
- $((x \wedge y) \vee (x \vee z))$

Exercice 2 Dessiner l'arbre syntaxique des formules suivantes :
- x
- $(x \wedge y)$
- $((x \wedge y) \vee z)$
- $((x \wedge y) \vee (x \vee z))$
- $(((x \wedge y) \vee z) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \vee z)))$
- $(((x \wedge y) \wedge z) \wedge w)$

Exercice 3 Formaliser les phrases suivantes en logique propositionnelle.

1. Je serai heureux ;
   J'étudie la logique ;
   Si j'étudie la logique, alors je serai heureux ;
   j'étudie la logique si et seulement si je serai heureux.

2. S'il pleut, on annulera le pique-nique ;
   S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique-nique sera annulé ;
   Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas ;
   Uniquement s'il pleut Marie insistera pour aller à la plage ;

3. Le soleil brille si les nuages sont grises ;
   Seulement si les nuages sont grises le soleil brille ;
   Le soleil brille ou les nuages ne sont pas grises ;
   Le soleil brille et le soleil ne brille pas ;

Exercice 4 **(Première induction sur les formules)** Soit p une formule de la logique propositionnelle. On désigne par $\mathtt{N}(p)$ le nombre de variables de la formule p, en tenant compte des éventuelles répétitions. Par exemple :

$$\mathtt{N}((x_1 \vee x_2)) = \mathtt{N}((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Autrement dit, $\mathtt{N}(p)$ désigne le nombre d'*occurrences de variables* dans la formule p.

Par ailleurs, on désigne par $\mathtt{A}(p)$ le nombre de parenthèses dans p. Par exemple

$$\mathtt{A}(x_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathtt{A}((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

1. Donner des définitions récursives des fonctions $\mathtt{N}$ et $\mathtt{A}$.
2. Montrer par induction la propriété suivante :
   Propriété : toute formule propositionnelle $p \in Form$ vérifie $\mathtt{N}(p) \leq \mathtt{A}(p) + 1$.