Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°1

Sémantique et raisonnement par induction sur les formules

Exercice 1 Considérons les quatre formules suivantes :

$$p_1 = ((x \lor y) \land z) \qquad p_2 = ((\neg x \lor y) \land (\neg y \lor z))$$
$$p_3 = ((\neg z \land \neg y) \lor (x \land y)) \quad p_4 = (\neg(\neg x \lor y) \lor y)$$

1. Calculer l'interprétation de chaque formule p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) par rapport à chacune des affectations ci-dessous :

$$v_1 = [x \mapsto 1, y \mapsto 1] \quad v_2 = [x \mapsto 1, z \mapsto 1] \quad v_3 = [y \mapsto 1, t \mapsto 1]$$

2. Dire lesquelles de ces quatres formules sont satisfaisables/falsifiables/valides/contradictoires.

Exercice 2 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables propositionnelles. On désigne par $|p|_($ le nombre de parenthèses ouvrantes, par $|p|_)$ le nombre de parenthèses fermantes et par $|p|_\neg$ le nombre de symboles de négation figurant dans une formule p (cf. cours). On appelera également $|p|$ la longueur de p.

1. Donner des définitions récursives des fonctions $|\_|_($, $|\_|_)$, $|\_|_\neg$ et $|\_|$.
2. Montrer par induction la propriété suivante :
   Propriété : toute formule propositionnelle $p \in Form$ vérifie $|p| = |p|_\neg + 2 \cdot |p|_(+ 2 \cdot |p|_) + 1$

Exercice 3 On définit, pour toute formule $p \in \mathsf{Form}$, les trois fonctions définies par :
- $|p|_{()}$ = le nombre de parenthèses dans p,
- $|p|_\land$ = le nombre de symboles « $\land$ » dans p,
- $|p|_\lor$ = le nombre de symboles « $\lor$ » dans p.

Par exemple, si p est la formule $((x \land y) \lor (\neg x \land \neg z))$ alors $|p|_{()} = 6$, $|p|_\land = 2$, et $|p|_\lor = 1$.

1. Donner des définitions récursives des trois fonctions ci-dessus.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathsf{Form}$ on a $|p|_{()} = 2(|p|_\land + |p|_\lor)$.

Exercice 4 On définit l'ensemble E comme le plus petit ensemble de chaînes de caractères qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) la chaîne vide ϵ appartient à E

(b) si $m \in E$, alors $(m) \in E$

Par ailleurs, on définit également l'ensemble $F = \{(^n)^n | n \in \mathbf{N}\}$, où a^n est le caractère a répété n fois.

1. Montrer que F satisfait (a) et (b). En déduire que $E \subseteq F$.
2. Montrer que $F \subseteq E$ (pour chaque élément de F, on montrera qu'il appartient à E en le construisant explicitement à partir de (a) et de (b)).
3. Conclure.