Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°2

Sémantique

Exercice 1 (Partiel 2009)

1. Montrer que $(((x \vee y) \to z) \to (x \vee y)) \models ((x \vee y) \vee z)$
2. Est-ce qu'on a que $((x \vee y) \vee z) \mathrel{\dashv\vDash} (((x \vee y) \to z) \to (x \vee y))$?
3. Écrire une formule équivalente à $(((x \vee y) \to z) \to (x \vee y))$ en utilisant seulement la négation et la conjonction.

Exercice 2 Soient q_1, q_2 deux formules telles que $q_1 \mathrel{\dashv\vDash} q_2$, $x_1 \dots x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1 \dots p_n$ des formules propositionnelles quelconques. Montrer que $q_1[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n] \mathrel{\dashv\vDash} q_2[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]$.

Exercice 3 En appliquant les théorèmes vus en cours montrer les équivalences suivantes :

1. $\neg((p \vee q) \wedge (r \to p)) \mathrel{\dashv\vDash} \neg(p \vee q) \vee \neg(r \to p)$.
2. $\neg(\neg(p' \to q)) \wedge (\neg r \vee \neg s) \mathrel{\dashv\vDash} (p' \to q) \wedge \neg(r \wedge s)$

Exercice 4 (Examen 2011) Si σ_1 et σ_2 sont deux affectations données, on dit que σ_1 est plus petite que σ_2, et on écrit $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, si pour toute variable x du calcul propositionnel, $\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x)$. Autrement dit, σ_1 est plus petite que σ_2 si σ_2 associe la valeur 1 à toutes les variables auxquelles σ_1 associe la valeur 1, et éventuellement à d'autres. Par exemple, $[x \mapsto 1, y \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1]$, et $[x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 1]$, mais $[x \mapsto 1, y \mapsto 1] \not\sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 0]$ (rappel : ces affectations associent la valeur 0 à toutes les variables qui n'apparaissent pas dans la liste).

Voici représentée graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 4 affectations différentes pour les variables x et y (un trait entre deux affectations signifie que la première, celle placée plus bas dans le dessin, est plus petite que la deuxième).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & [x \mapsto 1, y \mapsto 1] & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
[x \mapsto 1, y \mapsto 0] & & & & [x \mapsto 0, y \mapsto 1] \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & [x \mapsto 0, y \mapsto 0] & &
\end{array}
$$

Une formule ϕ du calcul propositionnel est *monotone* si pour toute paire d'affectations σ_1, σ_2, si $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, alors la valeur de vérité $[\![\phi]\!]\sigma_1$ est plus petite que (ou égale à) la valeur de vérité $[\![\phi]\!]\sigma_2$. Autrement dit, ϕ est monotone si

$$\text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \text{ si } \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2 \text{ alors } [\![\phi]\!]\sigma_1 \leq [\![\phi]\!]\sigma_2$$

1. Représenter graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 8 affectations différentes pour les variables x, y et z, comme dans la figure ci-dessus.
2. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge z)$ est monotone (indication : dans le dessin du point précedent, écrire à côté de chaque affectation la valeur de verité de la formule relativement à l'affectation en question, et conclure.)
3. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge \neg z)$ n'est pas monotone.
4. Donnez un exemple, aussi simple que possible, de formule monotone de la forme $\neg\phi$.
5. Si ϕ est monotone, alors $\neg\phi$ est aussi monotone. Prouver cet énoncé, ou donner un contre-exemple.
6. On considère le calcul propositionnel *privé de la négation*. Formellement, soit $\mathcal{F}$ le plus petit ensemble de chaînes de caractères tel que :
   - $V \subseteq \mathcal{F}$
   - Si $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ alors $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$
   - Si $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ alors $(\phi \vee \psi) \in \mathcal{F}$

   Les notions d'affectation, d'interprétation etc. pour les formules de $\mathcal{F}$ sont les mêmes que celles définies pour les formules correspondantes de $Form$.

   Montrer par induction *sur les éléments de l'ensemble* $\mathcal{F}$ que toutes les formules de ce calcul restreint sont monotones.