Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°4

Révision avant partiel

Exercice 1 (Partiel 2016) Considérons les trois propositions suivantes :

x_N : «Nicolas est coupable»
x_S : «Sandra est coupable»
x_R : «Romain est coupable»

1. Écrire une formule pour modéliser chacune des phrases suivants :
   - F_A : «Sandra est coupable et Romain est innocente » ;
   - F_B : «Si Nicolas est coupable, alors Romain l'est aussi» ;
   - F_C : «Romain est innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable» ;
2. Les 3 formules sont-elles compatibles ? justifiez en donnant l'affectation correspondante.
3. Une formule se déduit des 2 autres, laquelle ? justifiez.
4. Si tous sont innocents, quelle(s) formule(s) est(sont) fausse(s) ? justifiez.
5. Si toutes les formules sont vraies, qui sont le(s) coupable(s) ? justifiez.

Exercice 2 (Partiel 2016) Considérons une nouvelle fonction d'interprétation d'une formule p par rapport à une affectation v qui se comporte de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} \{\!\{x\}\!\}v & = & \mathbf{NOT}(v(x)) \\ \{\!\{\neg q\}\!\}v & = & \mathbf{NOT}(\{\!\{q\}\!\}v) \\ \{\!\{q_1 \wedge q_2\}\!\}v & = & \mathbf{OR}(\{\!\{q_1\}\!\}v, \{\!\{q_2\}\!\}v) \\ \{\!\{q_1 \vee q_2\}\!\}v & = & \mathbf{AND}(\{\!\{q_1\}\!\}v, \{\!\{q_2\}\!\}v) \end{array}$$

où **NOT**, **AND** et **OR** sont les fonctions suivantes vues en cours :

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl} \mathbf{NOT}(0) & = & 1 & \mathbf{AND}(0,0) & = & 0 & \mathbf{OR}(0,0) & = & 0 \\ \mathbf{NOT}(1) & = & 0 & \mathbf{AND}(0,1) & = & 0 & \mathbf{OR}(0,1) & = & 1 \\ & & & \mathbf{AND}(1,0) & = & 0 & \mathbf{OR}(1,0) & = & 1 \\ & & & \mathbf{AND}(1,1) & = & 1 & \mathbf{OR}(1,1) & = & 1 \end{array}$$

1. Calculer la valeur de $\{\!\{((\neg x \wedge y) \vee \neg z)\}\!\}v$, où v est l'affectation $[x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 1]$.
2. En sachant que $[\![p]\!]v$ dénote la fonction d'interprétation vue en cours, considérons la propriété suivante : pour toute formule p et toute affectation v, $\{\!\{p\}\!\}v = [\![\neg p]\!]v$.
   (a) Vérifier la propriété pour $p = ((\neg x \wedge y) \vee \neg z)$ et $v = [x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 1]$.
   (b) Démontrez la propriété par induction sur les formules propositionnelles.

Exercice 3 (Partiel 2011) On rappelle la définition de l'ensemble $\mathcal{V}(p)$ des variables d'une formule propositionnelle :

- $\mathcal{V}(x) = \{x\}$, pour $x \in V$.
- $\mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p)$.
- $\mathcal{V}((p \wedge q)) = \mathcal{V}((p \vee q)) = \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q)$.

Une *affectation finie* pour p est une fonction de $\mathcal{V}(p)$ dans $\{0, 1\}$. Si $\mathcal{V}(p)$ a n éléments, il existe 2^n affectations finies pour p. Par exemple, les 4 affectations finies pour la formule $\neg(x_1 \wedge x_2)$ sont données sous forme de tableau ci dessous :

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Une formule p qui vaut 1 par rapport à toutes ses affectations finies est une tautologie [1], et une formule qui vaut 0 par rapport à toutes ses affectations finies est une contradiction. Nous dirons qu'une formule est *instable* si elle vaut 1 par rapport à la moitié de ses affectations finies, et 0 par rapport à l'autre moitié [2].

1. Montrer que $((x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3))$ est instable.
2. Donner un exemple *aussi simple que possible* de formule instable.
3. Montrer que la négation d'une formule instable est instable.
4. Donner un exemple de deux formules instables dont la disjonction est une tautologie, et de deux formules instables dont la conjonction est une contradiction.

Exercice 4 (Partiel 2012) Si v est une affectation, $\overline{v}$ désigne l'affectation complémentaire de v, autrement dit :

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; v(x) = 1 \\ 1 & si \;\; v(x) = 0 \end{cases}$$

Par exemple, le complémentaire de l'affectation qui envoie toutes les variables vers 0 est l'affectation qui envoie toutes les variables vers 1, et le complémentaire de l'affectation $[x \mapsto 1, y \mapsto 1]$ est l'affectation qui envoie x et y vers 0 et toutes les autres variables vers 1.

Nous dirons qu'une formule propositionnelle p est *auto-duale* si, pour toute affectation v, $[\![p]\!]v = [\![p]\!]\overline{v}$. Par exemple, on voit facilement que si x est une variable propositionnelle, alors la formule x n'est pas auto-duale : pour le montrer, il suffit de considérer les affectations complémentaires $[x \mapsto 1]$ et $\overline{[x \mapsto 1]}$, et de remarquer que $[\![x]\!][x \mapsto 1] = 1$ et $[\![x]\!]\overline{[x \mapsto 1]} = 0$

Pour chaque formule de la liste suivante, dire s'il s'agit d'une formule auto-duale ou pas (justifier vos réponses [3]) :

1. $x \vee y$ 2. $(x \vee \neg x)$ 3. $\neg(\neg x \wedge y)$ 4. $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))$

Pour chaque énoncé de la liste suivante, dire s'il est vrai, et dans ce cas donner une preuve, ou faux, et dans ce cas donner un contre-exemple :

1. Si p est auto-duale, $\neg p$ l'est aussi.
2. Si p est auto-duale et q une formule quelconque, $(q \to p)$ est auto-duale.

---

1. Pour la précision, il faudrait dire que p vaut 1 par rapport à toutes les extensions possibles de chacune de ses affectations finies.
2. Remarquer que le nombre d'affectation finies d'une formule est toujours pair.
3. Comprendre de quelle manière on peut déduire l'auto-dualité (ou la non auto-dualité) d'une formule à partir de sa table de vérité est la clef pour répondre correctement à cette série de questions.