Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°5

Formes normales

Exercice 1 Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.

1. $\neg(\neg x \vee y)$
2. $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$

Exercice 2 Déterminez une forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :

1. $\neg(p \leftrightarrow q)$
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
3. $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Exercice 3 Soit $\psi : \mathit{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence :

- $\psi(x) = 2$
- $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- $\psi(\neg p) = \psi(p)$

1. Montrer que $\psi(p) \geq 2$ pour toute formule p.
2. Considérons les règles de transformation suivantes :

$$\begin{align} X \wedge (Y \vee Z) &\rightsquigarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \tag{1}\\ (X \vee Y) \wedge Z &\rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \tag{2}\\ (X \wedge Y) \wedge Z &\rightsquigarrow X \wedge (Y \wedge Z) \tag{3}\\ (X \vee Y) \vee Z &\rightsquigarrow X \vee (Y \vee Z) \tag{4} \end{align}$$

Montrer que pour toute formule $p \in \mathit{Form}$: Si p se transforme en q par l'application d'une des règles précédentes, alors $\psi(p) > \psi(q)$, où ψ est la fonction définie dans l'exercice 3.

Exercice 4 Nous disons (pour cet exercice) qu'une formule propositionnelle est en *forme anormale* quand elle ne contient ni une sous-formule de la forme $\neg\neg p$, ni de la forme $(\neg p \vee \neg q)$, ni $(\neg p \wedge \neg q)$.

1. Donner des règles de réécriture qui permettent de transformer toute formule donnée en une formule équivalente en forme anormale. Expliquer, en quelques lignes (pas de preuve formelle),
   (a) pourquoi le processus de réécriture termine toujours,
   (b) pourquoi la formule obtenue à la fin est équivalente à la formule de départ,
   (c) pourquoi la formule obtenue à la fin est en forme anormale.
2. Est-ce qu'il y a deux formules en forme anormale qui sont logiquement équivalentes mais qui diffèrent par plus que seulement les lois de commutativité, d'associativité, et d'idempotence ?

Exercice 5 **[Preuve du théorème 15]** Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe une variable x telle que la clause disjonctive d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.

Exercice 6 **[Pour aller plus loin]** On considère la formule $E = ((y \wedge z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)))$ où x, y et z sont des variables propositionnelles.

1. Déterminer une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ (en particulier, pas de $\neg$).
2. Donner une DNF de E, aussi réduite que possible.
3. Montrer que les formules $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ et $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$ sont logiquement équivalentes.