Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°6

Deux exercices d'examen sur les formes normales

Exercice 1 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les formules contenant uniquement les opérateurs $\{\texttt{True}, \texttt{False}, \oplus\}$ et soit $z \in V$ une variable propositionnelle donnée. On considère les règles de transformation suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \texttt{True} & \rightsquigarrow & (z \vee \neg z) \\ \texttt{False} & \rightsquigarrow & (z \wedge \neg z) \\ (X \oplus Y) & \rightsquigarrow & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \end{array}$$

qu'on utilise pour transformer chaque formule de l'ensemble $\mathcal{F}$ en une formule du calcul propositionnel vu en cours (ne contenant aucune occurrence de True, False et $\oplus$).

1. Compléter les séquences de transformations suivantes :

p_1		p_2		p_3
$(\texttt{False} \oplus x)$	$\rightsquigarrow$		$\rightsquigarrow$	
$(x \oplus \texttt{True})$	$\rightsquigarrow$		$\rightsquigarrow$	

2. Est-ce que les formules dans la colonne p_2 sont dans l'ensemble $\mathcal{F}$? Pourquoi ?
3. On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les formules construites à partir d'un ensemble de variables V et des opérateurs $\{\texttt{True}, \texttt{False}, \neg, \vee, \wedge, \oplus\}$. On considère également la fonction Φ sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \Phi(x) & := & 0 & \Phi(\neg p) & := & \Phi(p) \\ \Phi(\texttt{True}) & := & 1 & \Phi(p \vee q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(\texttt{False}) & := & 1 & \Phi(p \wedge q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ & & & \Phi(p \oplus q) & := & 2 \cdot \Phi(p) + 2 \cdot \Phi(q) + 1 \end{array}$$

   (a) Pour chaque séquence de transformations $p_1 \rightsquigarrow p_2 \rightsquigarrow p_3$ du point 1, vérifier que $\Phi(p_1) > \Phi(p_2) > \Phi(p_3)$.

   (b) Montrer par induction sur les formules de $\mathcal{G}$ que : $p \rightsquigarrow q$ implique $\Phi(p) > \Phi(q)$.

   (c) Comment conclure que toute séquence de transformations $\rightsquigarrow$ à partir d'une formule quelconque de l'ensemble $\mathcal{G}$ est de longueur finie ?

Exercice 2 Soient $x_1, ..., x_n \in V$ $(n > 0)$ des variables propositionnelles. Une *clause disjonctive complète et ordonnée sur* $x_1, .., x_n$ est une disjonction de litteraux de la forme $(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ où, pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $l_i = x_i$, soit $l_i = \neg x_i$.

Nous allons écrire n-*cdco* pour abréger "clause disjonctive complète et ordonnée sur $x_1, .., x_n$". Par exemple, $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ est une 3-cdco.

1. Écrire toutes les 2-cdco.
2. Combien y a-t-il de n-cdco distinctes ?
3. Montrer que si d et d' sont deux n-cdco distinctes, alors $d \not\models d'$, c'est à dire, exhiber une affectation v telle que $[\![d]\!]v = 1$ et $[\![d']\!]v = 0$.

Soit c_n la formule en forme conjonctive normale obtenue par conjonction de toutes les n-cdco (l'ordre est inessentiel). Ainsi par exemple, à l'ordre des 2-cdco près, on a :

$$c_2 = ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2))$$

5. Soit d une n-cdco et soit c_n^{-d} la forme conjonctive normale obtenue en retirant d de c_n.
   - Donner $c_2^{-(x_1 \vee x_2)}$.
   - Montrer que c_n^{-d} est satisfaisable pour tout n et tout d, c'est à dire, exhiber une affectation v telle que $[\![c_n^{-d}]\!]v = 1$.
6. Montrer que c_n est une contradiction pour tout n, c'est à dire que pour toute affectation v on a $[\![c_n]\!]v = 0$.