Université Paris-Diderot
Licence

Outils Logiques
Année 2017-2018

TD n°7

Algorithme DPLL

Exercice 1 Appliquer l'algorithme DPLL sur la formule suivante :

$$\begin{array}{rrcrcl} f = & (p \vee q \vee r) & \wedge & (p \vee \neg q \vee \neg r) & \wedge & (p \vee \neg w) \\ & \wedge\, (\neg q \vee \neg r \vee \neg w) & \wedge & (\neg p \vee \neg q \vee r) & \wedge & (u \vee x) \\ \wedge & (u \vee \neg x) & \wedge & (q \vee \neg u) & \wedge & (\neg r \vee \neg u) \end{array}$$

Exercice 2 Soient $x_1, ..., x_n \in V$ $(n > 0)$ des variables propositionnelles. Une *clause disjonctive complète et ordonnée sur les variables* $x_1, .., x_n$ est une disjonction de litteraux de la forme $(l_1 \vee \ldots \vee l_n)$ où, pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $l_i = x_i$, soit $l_i = \neg x_i$.

Nous allons écrire *n-cdco* pour abréger "clause disjonctive complète et ordonnée sur $x_1, .., x_n$". Par exemple, $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ est une 3-cdco.

1. Écrire toutes les 2-cdco.
2. Combien y a-t-il de n-cdco distinctes ?
3. Montrer que si d et d' sont deux n-cdco distinctes, alors $d \not\models d'$, c'est à dire, exhiber une affectation v telle que $[\![d]\!]v = 1$ et $[\![d']\!]v = 0$.

Soit c_n la formule en forme conjonctive normale obtenue par conjonction de toutes les n-cdco (l'ordre est inessentiel). Ainsi par exemple, à l'ordre des 2-cdco près, on a :

$$c_2 = ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2))$$

4. Écrire la formule c_3 et appliquer à cette formule la fonction DPLL vue en cours *en suivant les indications ci-dessous.*

   Dessiner l'arbre des appels récursifs de la fonction :
   - les nœuds de l'arbre seront étiquetés par des formes conjonctive normales (les arguments de DPLL, donc c_3 sera l'étiquette de la racine de l'arbre) et les arêtes par les valeurs de vérité des variables de pivot.
   - l'ordre des choix des variables de pivot est imposé : d'abord x_1, puis x_2 et enfin x_3.
   - les feuilles de l'arbre seront soit de formes conjonctive normales contenant la clause disjonctive vide (echec), soit la forme conjonctive normale sans aucune clause disjonctive (succès).
   - le résultat renvoyé par chaque appel de DPLL sera écrit à côté du nœud correspondant à l'appel en question (donc par exemple, le résultat de l'appel initiale `dpll(`c_3`)` sera écrit à côté de la racine de l'arbre).
5. Soit d une n-cdco et soit c_n^{-d} la forme conjonctive normale obtenue en retirant d de c_n.
   - Donner $c_2^{-(x_1 \vee x_2)}$.
   - Montrer que c_n^{-d} est satisfaisable pour tout n et tout d, c'est à dire, exhiber une affectation v telle que $[\![c_n^{-d}]\!]v = 1$.
6. Montrer que c_n est une contradiction pour tout n, c'est à dire que pour toute affectation v on a $[\![c_n]\!]v = 0$.