

TD n°8

Modélisation

Exercice 1 Mickaël, Nicole, Oléandre, Pietro, Radja et Samira vont ensemble au cinéma. Le multiplex propose les films suivants : Avatar, Batman, Catwoman, et Django.

Tous les films sont projetés au même moment dans des salles différentes. Chacun des six amis veut voir un des quatre films. Certains ont des préférences, par exemple quant aux films qu'ils veulent ou ne veulent pas voir.

On cherche à modéliser ces contraintes au moyen d'une formule de la logique propositionnelle. Celle-ci devra être telle que toute affectation satisfaisant la formule indiquera une répartition du groupe d'amis sur les films proposés (répartition tenant compte de leurs préférences respectives).

1. Définir l'ensemble des variables propositionnelles que vous allez utiliser par la suite. Expliquer ce qu'est supposé représenter la vérité d'une de ces variables.
2. Exprimer par une formule propositionnelle le fait que chaque personne du groupe va voir exactement un des films proposés.
3. Avatar et Batman sont montrés en version originale, Catwoman et Django en version française. Exprimer que si Mickaël voit un film en version originale alors Samira ira également voir un film en version originale.
4. Exprimer par une formule propositionnelle le fait que Nicole et Radja voient le même film.
5. Exprimer le fait que les six amis ne vont pas tous voir le même film.

Dans cet exercice, toutes les formules doivent être en *forme conjonctive normale*.

Exercice 2 Ahmed, Béatrice, Chanda et Dong se trouvent dans un centre de vacances. Le centre offre les cours de sport suivants : Judo, Karaté, Musculation, et Natation. On demande de modéliser en logique propositionnelle le problème de chercher pour chacune des personnes un choix d'un ou de plusieurs cours de sport, sous des contraintes qui sont énumérées ci-dessous.

Utiliser pour votre modélisation des variables de la forme $[P, S]$ où P est une personne, et S un sport. Une telle variable est vraie si la personne P s'inscrit au cours de sport S . Pour chacune des contraintes suivantes donner une formule en forme conjonctive normale qui l'exprime :

1. Chacun doit s'inscrire à au moins un cours de sport.
2. Personne ne peut s'inscrire à tous les cours de sport.
3. Ahmed et Chanda ne sont pas inscrit dans le même cours.
4. Tout inscrit en Karaté doit également s'inscrire en Musculation.

Exercice 3 Une instance I du jeu de sudoku de côté n^2 est constitué d'une grille de dimensions $n^2 \times n^2$, dont chaque case est soit vide, soit pré-remplie par un entier de 1 à n^2 . Une solution de I est un remplissage de la grille qui respecte les contraintes suivantes :

1. Contrainte de *ligne* : chaque valeur de 1 à n^2 doit apparaître exactement une fois sur chaque ligne.

2. Contrainte de *colonne* : chaque valeur de 1 à n^2 doit apparaître exactement une fois sur chaque colonne.
3. Contrainte de *carré* : pour chaque $0 \leq k, l \leq (n-1)$, chaque valeur de 1 à n^2 doit apparaître exactement une fois dans la sous-grille carrée $C_{k,l}$ contenant les cases $\{(i, j) \mid nk + 1 \leq i \leq n(k+1), nl + 1 \leq j \leq n(l+1)\}$.
4. Contrainte de *case pré-remplie* : les cases pré-remplies doivent garder leur valeur.

Proposez un choix de variables propositionnelles et un encodage de chacune des contraintes, de telle manière que chaque instance de sudoku I soit modélisée par une formule du calcul propositionnel F_I , en forme normale conjonctive, telle que chaque solution de I corresponde à une affectation vérifiant F_I , et vice-versa¹.

Exercice 4 On veut faire construire une maison. La construction de la maison consiste en plusieurs tâches, chacune ayant une durée d'une ou plusieurs journées. Toute tâche doit être exécutée par l'entreprise qui en est spécialiste, et certaines des tâches peuvent commencer seulement quand certaines autres tâches (appelés ses dépendances) sont déjà terminées :

Tache	Description	Durée	Dépendances	Entreprise
1	Murs	7	—	SARL A
2	Charpente	3	1	SARL B
3	Toiture	1	2	SARL B
4	Tuyauterie	8	1	SARL A
5	Peinture Façade	2	3,4	SARL A
6	Fenêtres	1	3,4	SARL B
7	Jardin	1	3,4,	SARL B
8	Plafonds	3	1	SARL A
9	Électricité	2	6,8	SARL C
10	Peinture intérieure	1	9	SARL C

- Construire une formule en forme conjonctive normale qui est vraie si et seulement si il est possible de construire la maison en 20 jours.
- Construire une formule en forme conjonctive normale qui est vraie si et seulement si il est possible de construire la maison en 20 jours, mais avec la restriction supplémentaire qu'aucune entreprise ne peut travailler sur deux tâches à la fois.

Remarquez que pour chacun de ces deux problèmes, une solution indique quelle tâche doit commencer quel jour.

Indication : Il convient de noter la durée d'une tâche i par $d(i)$, l'ensemble des ses dépendances par $D(i)$, et l'entreprise spécialiste pour cette tâche par $e(i)$. Par exemple, on a $d(7) = 1$, $D(5) = \{3, 4\}$, et $e(2) = B$.

1. Dans le sudoku classique n est égale à 3, et chaque instance a exactement une solution.