Université Paris-Diderot — Outils Logiques
Licence — Année 2017-2018

TD de Rappel

Induction sur les nombres naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels est le plus petit ensemble qui contient le nombre 0 et qui est tel que, dès qu'il contient un nombre n, il contient aussi le nombre $n + 1$ [1].

Voici quelques exemples d'énoncés portant sur les nombres naturels (dans ces énoncés, la variable n désigne un nombre naturel, c'est pour cela qu'on dit que ces enoncés “portent sur les nombres naturels”) :

1. $n^2 - 3n + 2 = 0$
2. Un ensemble contenant n éléménts a 2^n sous-ensembles.
3. La somme des n premiers nombres impairs est n^2.
4. $u_n = 2^{n-1}$ où la suite u_n est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

En remplaçant la variable n par un nombre naturel dans ces énoncés, on en obtient des *instances* (c'est à dire des cas particuliers), qui peuvent être vraies ou fausses. Par exemple, l'instance $9 - 6 + 2 = 0$ du premier énoncé, obtenue en remplaçant n par 3, est fausse, tandis que l'instance $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ du troisième énoncé, obtenue en remplaçant n par 4, est vraie.

Preuve par induction sur $\mathbb{N}$: Pour montrer qu'un énoncé $\mathcal{P}(n)$ portant sur les nombres naturels est vrai, c'est à dire pour montrer que toutes ses instances sont vraies, on peut procéder comme suit :

- On prouve que l'instance $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*base de l'induction*).
- On prouve ensuite que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si l'instance $\mathcal{P}(m)$ est vraie alors l'instance $\mathcal{P}(m + 1)$ l'est aussi (*étape inductive*).

Exercice 1 Pour chaque énoncé de la liste ci-dessus, trouver l'ensemble de nombre naturels qui le vérifient, en utilisant une preuve par induction le cas écheant.

1. Donc, vu que $\mathbb{N}$ contient 0, il contient aussi $0+1 = 1$, et donc, vu qu'il contient 1, il contient aussi $1+1 = 2$, et donc vu qu'il contient 2, il contient aussi $2 + 1 = 3$, et ainsi de suite. Comme $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble qui satisfait cette “propriété de clôture”, il ne contient aucun élément qui ne soit pas atteignable ainsi, donc $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.