La fonction logistique $\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{rx(1-x)}$

Quelques résultats sur les suites récurrentes

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Pierre Letouzey

TIPE Maths 97

I Pourquoi cette fonction ?

C'est dans le domaine de la démographie que l'on rencontre pour la première fois la fonction logistique f : à l'origine il s'agit d'un modèle d'évolution d'une population naturelle (d'où le nom de logistique), proposé par le mathématicien belge **Pierre-François Verhulst** vers 1840. Ses idées de base :

– l'effectif N de la population ne peut dépasser un maximum N_{max}, et $\mathrm{N}_{max} - \mathrm{N}$ s'interprète comme la « place libre » dans le milieu.
– l'accroissement naturel est alors proportionnel à la place libre : $\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{N}}{dt} = k(\mathrm{N}_{max} - \mathrm{N})$. En normalisant par $x = \mathrm{N}/\mathrm{N}_{max}$ et $r = k\mathrm{N}_{max}$, on obtient

$$dx/dt = f(x) \tag{1}$$

Lorsqu'on résout cette équation différentielle, on trouve que $x \to 1$ pour $t \to \infty$: l'effectif se stabilise à N_{max}, qui est donc une sorte d'effectif optimal. Ce modèle **continu** a son interêt, mais une convergence toute simple n'est pas passionnante...

Par contre lorsque l'on utilise f dans un modèle **discret**[1] du type

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

on voit alors apparaître toute une dynamique inattendue. Mitchell Feigenbaum (cf. [Fe] dans la bibliographie), grâce à une calculatrice, vers 1970, découvre l'apparition du chaos dans ce système dynamique. Le modèle discret se révèle donc être plus riche que le modèle continu, et aussi plus réaliste : les biologistes observent souvent chez les animaux d'importantes variations d'effectifs d'une année sur l'autre (cf. [S] ch. 13).

Pour r dans[2] $[0,4]$, et $\mathrm{I} = [0,1]$ on pose donc $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \to & \mathrm{I} \\ x & \mapsto & rx(1-x) \end{array}$ et pour $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$ pour tout n. (NB : $f^n(x)$ désigne ici l'itéré n-ième de x par f : $f^n(x) = f(f(...f(x)...))$). Pour les définitions et les notations, voir Annexe A.

[1] Au passage (2) n'est pas exactement la forme discrète de (1) : si $x_n = x(t)$ et $\tau = t_{n+1} - t_n$ alors (1) nous donne $x_{n+1} \approx x_n + \tau dx/dt \approx x_n + f(x_n)$. Mais on itère encore un trinôme du 2^{nd} degré et la conjugaison topologique nous assure qu'on aura une dynamique similaire (cf. Annexe B).

[2] On se limite a $r \in [0,4]$ pour avoir $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. L'étude pour $r > 4$ est une autre histoire...

II Présentation Générale

1 Les petites valeurs de r : jusqu'ici tout va bien...

1. $\mathbf{r} \in [\mathbf{O}, \mathbf{1}[$: le seul point fixe de f dans I est 0, et il est **attractif**. En effet on a $f'(0) = r < 1$.
2. $\mathbf{r} = \mathbf{1}$: 0 est quasi-stable. (x_n) converge encore, mais de façon “lente” : $x_n \sim 1/n$.
3. $\mathbf{r} \in]\mathbf{1}, \mathbf{3}[$: On a deux points fixes, 0 qui est **répulsif** car $f'(0) = r$, et $\lambda(r) = 1 - 1/r$ qui est **attractif** vu que $f'(\lambda(r)) = 2 - r$.
4. $\mathbf{r} = \mathbf{2}$: On a $f'(\lambda(2)) = 0$. On dit alors que $\lambda(2)$ est un point fixe **hyperstable** :
   - Dans le cas habituel d'un point fixe p vérifiant $0 < |f'(p)| < 1$, il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $|x_n - p| \sim \mathrm{K}|f'(p)|^n$: on a **convergence géométrique**.
   - Si maintenant p est hyperstable (ie. $f'(p) = 0$), on peut alors obtenir $\mathrm{K} > 0$ et $\delta \in]0, 1[$ tels que $|x_n - p| \sim \mathrm{K}\delta^{2^n}$: la convergence est très rapide. Ici on a même l'expression des termes de la suite (x_n) pour tout x_0 dans I, ce qui est exceptionnel : $x_n = (1 - (1 - 2x_0)^{(2^n)})/2$.
5. $\mathbf{r} = \mathbf{3}$: $\lambda(r) = 2/3$ est quasi-stable. (x_n) converge, mais lentement : $x_n - 2/3 \sim \pm(-1)^n/(3n)$
6. $\mathbf{r} \in]\mathbf{3}, \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{6}}[$: les points fixes 0 et $\lambda(r)$ sont répulsifs. Par contre, on a un **cycle attracteur d'ordre 2** : $\{h_+, h_-\} = \{\frac{r+1\pm\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}\}$. Son domaine de stabilité est $]3, 1+\sqrt{6}[$. Et on a hyperstabilité pour $r = 1+\sqrt{5}$. Il y a eu en $r = 3$ une **bifurcation** vers un cycle de période double : on parle de **doublement de période** (cf. fig. 1).
7. **Après** $\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{6}}$: on observe numériquement l'apparition d'un cycle d'ordre 4, mais impossible de calculer les valeurs exactes : les points de ce cycle sont racines de f^4, polynôme de degré 16.

2 Le diagramme de Feigenbaum

On obtient la fig. 2 à partir des résultats précédents en plaçant r en abscisse et les valeurs d'adhérence de (x_n) en ordonné. L'idée est alors de continuer pour $r > 1+\sqrt{6}$. L'ordinateur prend alors le relais : pour estimer les valeurs d'adhérence (ou au moins celles qui sont « attractives »), on calcule les 200 premières valeurs de la suite, et pour ne garder que le comportement à long terme, on n'affiche que, disons, de x_{100} à x_{200} (cf. fig. 3 et 4).

Au passage, pour faire ce diagramme de Feigenbaum, on prend toujours $x_0 = 1/2$. Ce n'est pas un hasard : le théorème de la partie III assure en effet que s'il existe un cycle attractif, 1/2 sera dans son bassin d'attraction. D'où l'interêt de ce point comme valeur initiale.

Revenons à la fig. 4 : après $r = 1+\sqrt{6}$, on observe dans un premier temps une répétition du phénomène de bifurcation. On parle alors de cascade de doublements de période. Et à chaque fois le même processus :

- Après la n-ième bifurcation, on a un cycle attractif d'ordre $k = 2^n$, et $(f^k)'$ vaut 1 sur ce cycle
- Puis lorsque r croît encore, on passe par un cycle hyperstable (dérivée 0), dont 1/2 fait partie
- Enfin lorsque la dérivée arrive à -1, on a une nouvelle bifurcation.

La distance entre deux bifurcations décroît très vite (en fait le quotient des distances successives tend vers la constante de Feigenbaum $\delta = 4.66920...$). Après $r = 3.568...$, les bifurcations laissent place au chaos : il n'y a plus convergence vers un cycle, et graphiquement les points x_{100} à x_{200} « remplissent » les intervalles où ils sont concentrés. On remarque aussi des « fenêtres » au milieu du chaos, où l'on a de nouveau convergence. Voir par exemple la partie IV.1 sur la fenêtre correspondant à $r = 1 + \sqrt{8}$.

III Un théorème sur les orbites stables

Il est dû à Pierre Fatou (cf. [H] p. 106). On le trouve dans deux sujets de concours, ENS Ulm 87 et ENSAE 91, et aussi dans [D]. Il s'agit de démontrer que pour toute valeur de r, **la suite (x_n) associée ne peut avoir plus d'une orbite stable**. Le sujet d'Ulm est même plus complet, puisqu'il établit que le résulat reste vrai même en cas de quasi stabilité.

En fait, les fonctions étudiées sont tantôt f, tantôt $x \mapsto 1-\lambda x^2$, tantôt $x \mapsto x^2+c$. Mais ces trois fonctions sont conjuguées topologiquement (cf. Annexe B). Pour une démonstration détaillée, on peut se reporter aux corrigés des deux sujets, ou encore à [D], chap. 1.11. Mais la démarche, commune à toutes les preuves, vaut d'être exposée :

- Toutes utilisent, implicitement ou explicitement, la dérivée schwarzienne :

$$\mathrm{S}f(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x)}{f'(x)})^2$$

  définie pour toute application f de I dans I et de classe C^3 et pour tout x de I tel que $f'(x) \neq 0$ (si $f'(x) = 0$ on parle de point critique).
- On remarque ensuite que la fonction logistique f appartient à l'ensemble E des applications dont la **dérivée schwarzienne est négative** (lorsque celle-ci est définie).
- E est stable par composition : si f et g sont dans E, alors $f \circ g$ aussi.
- Pour $f \in \mathrm{E}$, si $|f'|$ admet un minimum local en x alors $f'(x) = 0$.
- On en déduit que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| > \inf(|f'(a)|, |f'(b)|)$
  En particulier, si de plus $a < x < c$ sont trois points fixes, le théorème des accroissements finis donne deux points de dérivée 1 de part et d'autre de x, et donc $f'(x) > 1$: x est instable.
- Puis pour $f \in \mathrm{E}$, et p point périodique stable (ou même quasi stable, cf. Ulm) de période n, on montre que :
  - soit $[\inf(\mathrm{I}), p] \in \mathrm{W}s(p)$
  - soit $[p, \sup(\mathrm{I})] \in \mathrm{W}s(p)$
  - soit il existe un point critique y dans $\mathrm{W}s(\mathrm{O}(p))$.
- Enfin dans le cas de la fonction logistique f on montre que le troisième cas est en fait toujours réalisé. Or cette fonction n'a qu'un point critique, 1/2. Donc **s'il existe une orbite stable, alors son bassin d'attraction contient le point critique $1/2$**.
- Le théorème d'unicité découle aisément de ce résultat : si on a deux orbites stables O et O′, de périodes k et k', on prend $k_0 = pgcd(k, k')$, et d'après ce qui précède, on a

$$\lim_{n\to\infty} f^{nk}(1/2) \in \mathrm{O}$$

$$\lim_{n\to\infty} f^{nk'}(1/2) \in \mathrm{O}'$$

  et

$$\lim_{n\to\infty} f^{nk'}(1/2) = \lim_{n\to\infty} f^{nk_0}(1/2) = \lim_{n\to\infty} f^{nk'}(1/2)$$

  Il existe donc un point commun aux deux orbites : elles sont par conséquent égales.

IV Deux cas particuliers

1 Les cycles d'ordre trois

La recherche de cycles d'ordre trois est particulièrement intéressante : le théorème de Sarkovskii ([H] chap. 5) affirme en effet, dans sa version faible, **que si une fonction continue a un point périodique de période première trois, alors elle a des points périodiques avec n'importe quelle période**. Si on tient un cycle d'ordre trois, on est alors dans une situation étrange : il existe des cycles d'ordre quelconque, mais un seul au plus de ces cycles est attracteur.

Pour trouver les cycles d'ordre trois, on doit résoudre $f^3(x) = x$, équation polynômiale de degré huit, avec les racines évidentes 0 et λ. On peut résoudre explicitement en passant par le sytème $\{y = x^2 + c; z = y^2 + c; x = z^2 + c\}$ (la forme $g : x \mapsto x^2 + c$ simplifie un peu les calculs... cf Annexe B). On utilise alors les fonctions symétriques $s = x + y + z$, $d = xy + xz + yz$ (ou $c = x^2 + y^2 + z^2$, ce qui revient au même) et $p = xyz$. Après calculs ([Fr] Ap. 1), on arrive à $s_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{-7-4c})/2$ ou $s = 3/2$. Les points x, y et z sont alors les racines (éventuelles) de $\mathrm{X}^3 - s\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X} - p$, avec $d(s)$ et $p(s)$. Encore un peu de calcul (vive Maple !) : $s = 3/2$ ne donne rien, mais par contre, pour $c \leqslant -7/4$ (soit $r \geqslant 1 + \sqrt{8}$), les deux solutions s_1 et s_2 donnent bien deux cycles distincts O_1 et O_2 (cf. fig. 5). Et pour ce qui est de la stabilité de ces deux cycles, on calcule $(g^3)'(x) = g'(x).g'(y).g'(z) = 8 + 4c \pm 4c\sqrt{7-4c}$. En $c = -7/4$ (soit $r = 1 + \sqrt{8}$) on a une dérivée 1 pour O_1 et O_2 , mais pour $c < -7/4$, O_1 est instable, tandis que O_2 est stable jusqu'à $c = -1.768..$ ($r = 3.8415...$). Ce cycle O_2 se transforme alors en un cycle d'ordre six, puis douze... : on retrouve une cascade de doublements de période, comme on peut le voir sur la fig. 4. C'est la fin de cette «fenêtre» de stabilité.

2 Le chaos pour $r = 4$

Dans ce cas particulier, on peut facilement montrer que f est chaotique pour $r = 4$, au sens de la définition suivante ([D] chap. 1.8) : pour $f : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I}$, on dit que f est **chaotique sur** I ssi

(i) f est topologiquement transitive

(ii) f est sensible aux conditions initiales

(iii) les points périodiques de f sont denses dans I.

Avec :

- f est **topologiquement transitive** ssi quels que soient les ouverts U et V de I, il existe k tel que $f^k(\mathrm{U}) \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$: les itérés se « promènent » dans tout l'intervalle I.
- f présente une sensibilité aux conditions initiales ssi il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{I}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, \exists n, |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$. Deux points proches peuvent donc s'éloigner lors de l'itération par f : Les calculs approchés perdent toute valeur...

Pour $r = 4$, on peut relier f à l'application $g : \theta \mapsto 2\theta$ du cercle unité S^1 (ie $\mathbb{R}$ modulo 2π). Posons pour cela $h(\theta) = (1 - \cos(\theta))/2$. On a alors :

$$(h \circ g)(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = 1 - \cos^2(\theta) = 4(\frac{1}{2} - \frac{\cos(\theta)}{2})(\frac{1}{2} + \frac{\cos(\theta)}{2}) = (f \circ h)(\theta)$$

h n'est pas une conjugaison (cf Annexe B), car il lui manque l'injectivité, mais c'est une sorte de « semi-conjugaison », qui garde des proriétés intéressantes. On prouve facilement que g est chaotique (cf. [D]), puis on transpose vers f. Par exemple si U et V sont deux ouverts de I, on peut choisir deux ouverts U' et V' de S^1 dont les images par h sont U et V. Et comme il existe k tel que $g^k(\mathrm{U}') \cap \mathrm{V}' \neq \varnothing$ alors $f^k(\mathrm{U}) \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$.

V Conclusion

Il reste beaucoup à dire sur cette fonction et ses liens avec la physique. Ainsi, le chaos n'existe pas que pour $r = 4$! Les constantes de Feigenbaum, juste évoquées ici, méritent une étude complète, ainsi que le domaine $r > 4$. Des théorèmes et des outils plus puissants existent, comme par exemple la renormalisation. Mais on ne peut que s'étonner de la diversité des questions qu'a pu susciter une simple parabole !

Annexes

Annexe A : Definitions

- p est un **point fixe** de f ssi $f(p) = p$.
- Un point fixe p de f est dit **stable, quasi stable ou instable** selon que $|f'(p)|$ est inférieur, égal ou supérieur à 1. Si p est stable, alors il est **attractif** : il existe un voisinage V de p tel que $\forall x \in \mathrm{V}, f^n(x) \to p$ lorsque $n \to \infty$. Si p est instable, alors il est **répulsif** : il existe un voisinage V de p dont les points distincts de p « sortent » de ce voisinage lorsqu'on les itère par f.
- Un point p est dit périodique de période première n si $f^n(p) = p$ et $\forall k \in \{1, .., n-1\}, f^k(p) \neq p$.
- Pour p périodique de période n, l'orbite (ou le cycle) $\mathrm{O}(p)$ est l'ensemble des itérés de p. On a $\mathrm{Card}(\mathrm{O}(p)) = n$ et $\mathrm{O}(p) = \{p, f(p), ..., f^{n-1}(p)\}$. On parle aussi de point périodique stable, quasi-stable, instable : un point périodique de f de période n est un point fixe de f^n.
- En utilisant la relation $(f^n)' = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(p))$ on démontre facilement que tous les points d'une même orbite sont des points périodiques de même période, et surtout **de même nature** (stable, instable...). Il est donc légitime de parler d'orbite stable ou instable.
- Le **bassin d'attraction** $\mathrm{W}s(p)$ d'un point périodique p de période k est l'ensemble des points x tels que $f^{nk}(x) \to p$ lorsque $n \to \infty$. Le bassin d'attraction d'un cycle tout entier est l'union des différents bassins des points du cycle.

Annexe B : La conjugaison topologique

Donnons tout d'abord la définition : pour $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathrm{J}$, on dit que f et g sont conjuguées topologiquement s'il existe un **homéomorphisme** $t : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ tel que $(t \circ f) = (g \circ t)$. Et alors :

- Pour tout n, $t \circ f^n = g^n \circ t$
- p est un point périodique de f de période n ssi $t(p)$ est un point périodique de g de période n.
- Si p est un point périodique de bassin d'attraction $\mathrm{W}s(p)$, alors le bassin de $t(p)$ est $t(\mathrm{W}s(p))$.
- Si f,g et t sont C^1, t' ne s'annulant pas (t est alors un C^1-difféomorphisme), pour p point périodique de f de période n, on a $(f^n)'(p) = (g^n)'(t(p))$: p et $t(p)$ sont donc de même nature.

La conjuguaison traduit donc le fait que f et g on la même dynamique. Il est alors équivalent d'étudier l'une ou l'autre des formes suivantes, qui appartiennent toutes à la famille quadratique : $x \mapsto rx(1-x)$, $x \mapsto 1 - \lambda x^2$, $x \mapsto x^2 + c$, ou encore $x \mapsto 2\mu x + 2x^2$... En effet il existe toujours une fonction affine reliant deux formes données.

Annexe C : Bibliographie

[D] **Devaney** R, An Introduction to Chaotic Dynamical System, Addison-Wesley,1989

[Fe] **Feigenbaum** M, Universal behavior in nonlinear systems, Los Alamos Science,1980

[Fr] **Frøyland** J, Intoduction to Chaos and Coherence, IOP Publishing, 1992

[H] **Homlgren** R, A First Course in Discrete Dynamical Systems, Springer-Verlag,1994

[S] **Stewart** I, Does God Play Dices ? : the mathematics of chaos, Penguin, 1989