



Université Paris.Diderot (Paris 7) et Université Bordeaux I

UFR d'Informatique

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

Docteur de l'Université Paris Diderot, spécialité informatique

# TRESSES, ANIMAUX, CARTES : À L'INTERACTION ENTRE COMBINATOIRE ET PROBABILITÉ

présentée et soutenue publiquement par

Marie ALBENQUE

le 3 décembre 2008

devant le jury composé de

Christian	CHOFFRUT	Examineur
Patrick	DEHORNOY	Examineur
Christian	KRATTENTHALER	Rapporteur
Jean-François	LE GALL	Examineur
Jean	MAIRESSE	Directeur de thèse
Jean-François	MARCKERT	Directeur de thèse
Gilles	SCHAEFFER	Rapporteur



Tout au long de cette thèse, Jean a su me guider et m'encourager. J'ai trouvé dans ses nombreuses questions et son sens du détail un moteur stimulant notamment lors de la rédaction de ce manuscrit, je l'en remercie chaleureusement.

Je ne remercierai jamais assez Jean-François d'avoir accepté de relever le défi que constituait l'encadrement de cette thèse à distance. Sa réactivité et ses qualités pédagogiques téléphoniques m'ont bien souvent fait oublier les 600kms qui séparent Paris de Bordeaux. Le plus remarquable lorsque l'on travaille avec Jean-François, outre ses qualités indéniables de chercheur, est sa foi en les « belles mathématiques » qui s'accompagne d'un enthousiasme communicatif : il n'en fallait pas moins pour maintenir au top mon moral souvent vacillant ! Pour tous ses conseils, ses encouragements et son soutien sans faille, je lui témoigne aujourd'hui ma profonde gratitude et une amitié sincère.

Je remercie vivement Gilles Schaeffer et Christian Krattenthaler d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit et de participer au jury de cette thèse. Je remercie également Gilles de m'avoir invitée à mes premières journées ALEA qui m'ont définitivement convertie aux probabilités discrètes et de m'avoir ensuite donné à plusieurs reprises l'occasion d'exposer mes travaux au LIX.

Ma découverte des probabilités s'est déroulée sous les meilleurs auspices grâce au cours de Jean-François Le Gall « Intégration et Probabilités » et à son encadrement de mon mémoire de maîtrise qui reste un de mes meilleurs souvenirs de ma scolarité à l'ENS. Ses conseils avisés m'ont été très précieux tout au long de mes études ; c'est un véritable honneur de le voir participer à ce jury.

Patrick Dehornoy m'a invité à Caen pour présenter mes résultats devant une assemblée d'algébristes, sa gentillesse a eu raison de mes angoisses devant une telle invitation. Ses grandes qualités pédagogiques et ses nombreux conseils sont parvenus à faire de la rédaction de sa « leçon » sur les tresses un exercice agréable et m'ont rendu bien des services lors de la rédaction de ce manuscrit. Je le remercie chaleureusement d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie vivement Christian Choffrut d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Philippe a réussi à trouver à mes résultats des conséquences algébriques dont j'étais loin de soupçonner l'existence et à me supporter comme co-auteure : je ne sais pas ce qui est le plus remarquable, mais l'en remercie également ! Son enthousiasme, son sens de l'humour et sa capacité à trouver des bijections ont rendu nos séances de travail particulièrement agréables.

Noëlle Delgado et Michèle Wasse ont su aplanir toutes les difficultés administratives que j'ai pu rencontrer au cours de cette thèse ; je ne saurais les remercier assez de leur disponibilité et de leur efficacité.

Je remercie également toutes les personnes du LIAFA, de PPS et du LABRI qui font de ces labos des endroits où il fait bon travailler. Une pensée toute particulière à la fine équipe de rédacteurs de l'été : Sylvain, Samuel et Nicolas qui ont transformé la corvée de rédaction estivale en un moment (presque) agréable et à Christine et Séverine pour nos discussions de « filles » au milieu de tous ces informaticiens et, par ordre d'apparition, merci à Laura, Mathias, Fabien, Samuel, Mathilde, Philippe, Claire, Glenn, Cezara, Constantin et à tous ceux que j'oublie : bonne route à tous!

Même si j'ai passé l'essentiel de mon temps à Paris, je n'oublie pas les Bordelais qui m'ont chaleureusement accueillie à chacune de mes visites au LABRI.

Mes aller-retour Paris-Bordeaux ont été rendus possibles et agréables par Patrick qui a accepté de m'héberger à chacune de mes visites et qui en a profité pour me faire découvrir la scène musicale bordelaise : merci !

La fin de la rédaction — moment critique en soi — aurait pu tourner à la catastrophe, si je n'avais pu compter sur le soutien indéfectible de toute la *Marx Do family* qui m'a une fois de plus hébergée alors que je me retrouvais sans-abri : Antoine, Benjamin, Corentin, Jérémie, Julien, Sylvain, Thomas, merci d'avoir supporté le squattage régulier de votre canapé. Un énorme merci également à Carole, Élise et Vincent sans qui le désencrassage de mon appartement aurait été bien difficile.

Il reste bien des personnes sans qui ces trois années auraient été plus ternes : Lucas, mon binôme de probas de toujours, les violettes devenues vertes avec le temps et tout particulièrement Nath et Caro, les membres de GRENAT qui ont presque réussi à me faire aimer la géologie et tous les autres : Cyril, Faustine, Joe, Juliette, Laure, Laurent, Mathieu, Mathilde, Stéphane, Tali, . . .

Il manque évidemment à cette liste toute ma famille auprès de laquelle je suis assurée de trouver un réconfort et un soutien constant : mon père, mes sœurs Élise et Pauline, mon frère Étienne et bien sûr ma mère qui m'a toujours encouragée, stimulée et soutenue dans mes choix durant toutes mes études et bien avant.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Des tresses et des animaux</b>	<b>15</b>
<b>1 Combinatoire de monoïdes</b>	<b>17</b>
1 Inventaire : monoïdes, POSET et fonction de Möbius . . . . .	18
1.1 Rappels sur les monoïdes . . . . .	18
1.2 Les POSET et la fonction de Möbius . . . . .	22
2 Monoïde des empilements de pièces . . . . .	25
2.1 Empilements de pièces . . . . .	25
2.2 Équivalence entre empilements et monoïdes de Cartier-Foata . . .	27
2.3 Énumération d'empilements . . . . .	28
3 Énumération de tresses positives . . . . .	30
3.1 Présentation du monoïde de tresses . . . . .	30
3.2 Définition d'un ensemble de tresses « triviales » . . . . .	31
3.3 Série de croissance des tresses positives . . . . .	32
3.4 Définition d'une involution sur $T \times B^+$ . . . . .	33
4 Extension à une classe de monoïdes . . . . .	34
4.1 Preuve du théorème 1.28 . . . . .	36
4.2 Preuve du corollaire 1.29 par inclusion-exclusion . . . . .	37
4.3 Quelques exemples de monoïdes . . . . .	38
5 Application aux monoïdes de tresses duaux . . . . .	39
5.1 Présentation de $B_n^{+\star}$ . . . . .	40
5.2 Un peu d'arithmétique dans $B_n^{+\star}$ . . . . .	41
5.3 Des configurations d'arêtes aux forêts alternantes non-croisées . . .	42
5.4 Forêts alternantes-non croisées et arbres unaires-binaires . . . . .	44
5.5 Où l'on retrouve la fonction de Möbius . . . . .	47
6 Perspectives et problèmes ouverts . . . . .	49
6.1 Hauteur des empilements . . . . .	49
6.2 Combinatoire du groupe . . . . .	51
6.3 Tresser aléatoirement . . . . .	57
<b>2 Gaz markoviens et énumération d'animaux dirigés</b>	<b>61</b>
1 État de l'art . . . . .	62
1.1 Terminologie sur les graphes . . . . .	62
1.2 Animal : Définition . . . . .	63
1.3 Quelques rappels de percolation . . . . .	64
1.4 Animaux et percolation . . . . .	66

2	Animaux dirigés . . . . .	67
2.1	Définition . . . . .	67
2.2	Premiers résultats d'énumération d'animaux dirigés . . . . .	68
2.3	Animaux dirigés et modèles de gaz . . . . .	69
2.4	Animaux dirigés et empilements . . . . .	71
3	Modèles de gaz . . . . .	73
3.1	Modèle de gaz sur un cylindre . . . . .	73
3.2	Modèle de gaz sur le graphe entier . . . . .	76
4	Convergence de graphes et animaux . . . . .	79
4.1	Définition d'une topologie sur les graphes marqués . . . . .	80
4.2	Compatible avec les animaux . . . . .	81
5	Chaînes de Markov cycliques et animaux . . . . .	82
5.1	Définition des chaînes de Markov cycliques . . . . .	82
5.2	Premières propriétés des chaînes de Markov cycliques . . . . .	83
5.3	Convergences des chaînes de Markov cycliques . . . . .	83
6	Résultats d'énumération . . . . .	85
6.1	La famille de réseaux $(L_R)_{R \subset \mathbb{N}}$ . . . . .	85
6.2	Le réseau triangulaire . . . . .	88
6.3	La famille de réseaux $T_n$ . . . . .	91

## II Des cartes planaires 95

### 3 Comportement asymptotique de cartes planaires en pile 97

1	Cartes planaires . . . . .	98
1.1	Quelques rappels sur les graphes . . . . .	98
1.2	Cartes planaires . . . . .	99
1.3	Énumération de cartes planaires . . . . .	101
2	Convergence de cartes planaires aléatoires . . . . .	102
2.1	Topologie de la convergence locale . . . . .	102
2.2	Topologie de Gromov-Hausdorff . . . . .	103
2.3	Petit historique des résultats de convergence . . . . .	104
3	Triangulations en pile . . . . .	105
3.1	Définition des triangulations en pile . . . . .	105
3.2	Lois de probabilités sur les triangulations en pile . . . . .	105
3.3	Petit historique sur la convergence des triangulations en pile . . . . .	106
3.4	Triangulations en pile et arbres ternaires . . . . .	106
4	Arbres aléatoires et convergence . . . . .	107
4.1	Rappels sur les arbres planaires . . . . .	107
4.2	Arbres de Galton-Watson . . . . .	108
4.3	Convergence locale des arbres ternaires . . . . .	109
4.4	Arbre continu d'Aldous . . . . .	110
5	Triangulations en pile et arbres ternaires . . . . .	112
5.1	Bijection entre les triangulations en pile et les arbres ternaires . . . . .	112
5.2	Distance dans la triangulation . . . . .	113
5.3	Loi induite sur les arbres . . . . .	114
6	Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi uniforme	115
6.1	Convergence pour Gromov-Hausdorff . . . . .	115
6.2	Convergence locale sous la loi uniforme . . . . .	116
6.3	Comportement asymptotique du degré sous la loi uniforme . . . . .	118

7	Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi historique	118
7.1	Convergence comme espace métrique . . . . .	118
7.2	Comportement asymptotique du degré de la racine . . . . .	119
8	Quadrangulations en pile . . . . .	120
8.1	Un premier modèle de quadrangulations en pile . . . . .	120
8.2	Un modèle de quadrangulations en pile proche des arbres binaires	121
<b>4</b>	<b>Some families of increasing planar maps</b>	<b>123</b>
1	Introduction . . . . .	124
1.1	Contents . . . . .	125
1.2	Literature about stack-triangulations . . . . .	126
1.3	Literature about convergence of maps . . . . .	127
2	Stack-triangulations . . . . .	129
2.1	Planar maps . . . . .	129
2.2	Formal construction of stack-triangulations . . . . .	129
2.3	Combinatorial facts . . . . .	131
2.4	Induced distribution on the set of ternary trees . . . . .	137
3	Topologies . . . . .	138
3.1	Topology of local convergence . . . . .	138
3.2	Gromov-Hausdorff topology . . . . .	138
4	Local convergence of stack-triangulations under $U_{2n}^\Delta$ . . . . .	139
4.1	Galton-Watson trees conditioned by the size . . . . .	139
4.2	Local convergence of uniform ternary trees . . . . .	140
4.3	Local convergence of stacked-triangulations . . . . .	140
5	Asymptotic under the Gromov-Hausdorff topology . . . . .	143
5.1	Gromov-Hausdorff convergence of rescaled GW trees . . . . .	144
5.2	Gromov-Hausdorff convergence of stack-triangulations . . . . .	145
6	Asymptotic behavior of the typical degree . . . . .	147
7	Asymptotic behavior of stack-triangulations under $Q_{2n}^\Delta$ . . . . .	150
7.1	Poisson-Dirichlet fragmentation . . . . .	152
7.2	Some features of large maps under $Q^\Delta$ . . . . .	154
8	Two families of increasing quadrangulations . . . . .	156
8.1	A first model of growing quadrangulations . . . . .	156
8.2	A family of stack-quadrangulations . . . . .	157
8.3	The function $\Lambda'$ . . . . .	159
9	Appendix . . . . .	162
9.1	Proof of the Theorems of Section 5 . . . . .	162
	<b>Bibliographie</b>	<b>176</b>
	<b>Index</b>	<b>177</b>
	<b>Index des notations</b>	<b>179</b>



# Introduction

Cette thèse est formée de deux parties indépendantes. La première se situe dans le domaine de la combinatoire énumérative et la seconde dans le domaine des grandes cartes planaires aléatoires qui forme une branche de la théorie des probabilités. Si les liens entre ces deux domaines ne sont pas évidents à première vue, nous allons néanmoins essayer de montrer que ceux-ci sont nombreux en illustrant sur des exemples variés les interactions fructueuses entre la combinatoire et les probabilités.

## Quelques interactions entre combinatoire et probabilités

### Combinatoire énumérative

La combinatoire est l'étude de la structure d'objets discrets. Le premier problème auquel on s'intéresse est l'énumération de tels objets : c'est le sujet de la combinatoire énumérative. Quel que soit le contexte dans lequel un problème d'énumération apparaît, le cadre est toujours à peu près le suivant. Un ensemble  $\mathcal{A}$  d'objets est donné tel qu'à chaque objet de  $\mathcal{A}$  est associée une taille sous forme d'un entier naturel. On suppose que la taille est une fonction suffisamment discriminante pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments de taille  $n$ , la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  du nombre d'éléments de taille  $n$  est la suite d'énumération de l'ensemble  $\mathcal{A}$ . La combinatoire énumérative tente de répondre à la question : quelle est la valeur de  $a_n$  ?

Les premiers termes de la suite d'énumération peuvent être calculés « à la main » en engendrant tous les objets de petite taille, cependant cette approche n'est guère raisonnable pour de grandes valeurs de  $n$  ; le nombre d'objets de taille  $n$  est souvent une fonction exponentielle de la taille. L'objet de la combinatoire énumérative est de donner une expression permettant d'évaluer efficacement le nombre d'objets de taille  $n$ .

Avant de poursuivre, présentons quelques exemples significatifs de la diversité des contextes dans lesquels peuvent surgir des problèmes d'énumération. En informatique, l'analyse de la complexité en moyenne d'un algorithme ([Knu00], [FS95]) nécessite de calculer le coût de l'algorithme sur chaque entrée. Il faut donc énumérer toutes les entrées d'une taille fixée. En physique statistique, l'étude de systèmes à l'équilibre thermodynamique passe par le calcul de leur fonction de partition. Celle-ci est une somme sur tous les états d'énergie que le système peut occuper et il est donc parfois nécessaire d'énumérer ces états [Bax82]. En mathématiques, de nombreux problèmes de probabilités discrètes se ramènent au dénombrement des événements favorables. Mais d'autres branches des mathématiques peuvent également mener à des problèmes combinatoires, c'est notamment le cas en théorie des nombres ou en combinatoire algébrique ; les calculs de dimension d'un espace vectoriel se ramènent souvent à l'énumération des éléments d'une base.

## 2 Introduction

Il existe différentes réponses satisfaisantes à la question : quelle est la valeur de  $a_n$ ? Illustrons-les sur l'exemple simple des arbres binaires. La figure 1 contient une énumération exhaustive des arbres binaires de taille inférieure à 3, où la taille est définie comme le nombre de sommets internes. Au vu de cette figure, le début de la suite d'énumération est 1, 1, 2, 5.

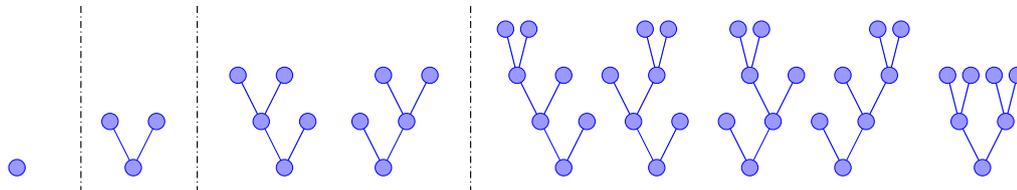


Fig. 1 – Énumération exhaustive des arbres binaires de taille inférieure à 3.

La première manière de répondre à la question d'énumération est de chercher à obtenir une décomposition d'un arbre binaire. Pour  $n \geq 1$ , un arbre binaire de taille  $n$  est formé d'une racine dont les sous-arbres gauche et droit sont également des arbres binaires de taille respective  $k$  et  $n-1-k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ . Cette observation mène à une première réponse acceptable à la question d'énumération sous la forme de l'équation de récurrence suivante :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}.$$

Un deuxième objectif est la recherche d'une formule close pour  $a_n$ . Dans le cas des arbres binaires, on peut résoudre l'équation de récurrence (comme on le verra dans la suite les séries génératrices permettent de le faire quasiment instantanément) ce qui permet de voir que les arbres binaires sont comptés par les nombres de Catalan :

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (0.1)$$

Une autre manière d'obtenir ce résultat serait de construire une bijection entre les arbres binaires et d'autres classes combinatoires que l'on sait énumérer ; il existe par exemple des bijections avec des chemins de Dyck de longueur  $2n$ . Ce deuxième type de raisonnement — qui forme la branche « bijective » de la combinatoire — est souvent préféré à l'énumération brute car il renseigne plus en général sur la structure des objets qu'un pur résultat énumératif. Cependant, il nécessite d'avoir conjecturé la suite d'énumération, c'est pourquoi il intervient souvent dans un deuxième temps, une fois que la suite d'énumération a été calculée par des méthodes énumératives.

Une troisième façon de répondre à une question d'énumération est de donner le comportement asymptotique de la suite  $(a_n)$ . Dans le cas des arbres binaires, l'équivalent de Stirling permet d'obtenir :

$$a_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}.$$

Ce type de réponse constitue souvent un premier pas dans la résolution de problèmes combinatoires compliqués, puisque l'analyse asymptotique est souvent plus accessible que l'analyse exacte. Néanmoins, même dans les cas où l'on dispose d'une formule close exacte, l'analyse asymptotique n'est pas dénuée d'intérêt, bien au contraire !

Tout d'abord les résultats asymptotiques sont souvent plus parlants que les résultats exacts puisqu'ils donnent l'ordre de grandeur des quantités. Cela permet par exemple

de quantifier à quel point une contrainte est restrictive ou de regrouper dans des mêmes classes les familles d'objets dont la taille est asymptotiquement équivalente.

De manière plus générale, les résultats asymptotiques permettent d'étudier le comportement de grands objets aléatoires. On reviendra dans la suite sur les motivations à étudier de tels objets, mais on peut déjà citer comme champs d'applications l'analyse d'algorithmes, l'étude de transitions de phases en physique statistique ou l'établissement de principes d'universalité.

Nous terminons cette présentation de la combinatoire énumérative par quelques mots sur les séries génératrices. Les séries génératrices sont des séries formelles qui permettent de coder l'information contenue dans une suite d'énumération  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Selon le type d'objets énumérés, on préférera utiliser la série génératrice ordinaire :

$$O(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

la série génératrice exponentielle (par exemple pour énumérer des objets étiquetés) :

$$E(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!},$$

ou la série de Dirichlet (par exemple pour des problèmes reposant sur des notions de divisibilité) :

$$D(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^z}.$$

Ces séries permettent de représenter de manière plus compacte les suites d'énumération et introduisent un formalisme puissant. Illustrons-le sur l'exemple simple des arbres binaires ; la relation de récurrence :

$$a_n = \sum_{k \geq 0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

implique que la série ordinaire  $O(z)$  des arbres binaires vérifie l'équation fonctionnelle  $O(z) = 1 + zO(z)^2$ . En résolvant cette équation, on obtient

$$O(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z},$$

ce qui permet d'obtenir directement l'expression (0.1) en écrivant le développement en série entière de cette fonction.

L'étude de la série génératrice est particulièrement intéressante dans les cas où l'on ne dispose pas de formule close pour  $a_n$ . En voyant la série génératrice comme une fonction analytique en la variable complexe  $z$ , on peut obtenir des résultats sur le comportement asymptotique de ses coefficients. Flajolet et Sedgewick donnent un large panorama de cette branche de la combinatoire, appelée « combinatoire analytique », dans [FS08] et montrent comment les résultats classiques d'analyse complexe se traduisent en des informations sur le comportement asymptotique de  $a_n$  et notamment que ce dernier est dicté par le comportement de la série génératrice au voisinage de son cercle de convergence.

## Probabilités et dénombrement

Combinatoire et probabilités discrètes sont naturellement reliées ; les problèmes de probabilités discrètes dont les événements sont en nombre fini et équiprobables se ramènent au dénombrement de tous les événements possibles et des « événements favorables ».

Plaçons-nous dans un cadre un peu plus général et supposons que notre ensemble  $\mathcal{A}$  d'objets soit muni, en plus de sa fonction de taille, d'une statistique supplémentaire  $s$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Selon les objets étudiés, cette statistique pourra par exemple être la hauteur finale ou la hauteur maximale d'une marche aléatoire après  $n$  pas, la largeur ou la hauteur d'un arbre binaire, etc. Si l'on tire un objet uniformément parmi les objets de taille  $n$ , alors la statistique  $s$  devient une variable aléatoire  $S_n$  dont la loi est donnée par :

$$P(S_n = k) = \frac{a(n, k)}{a_n},$$

où  $a(n, k)$  est le nombre d'objets de taille  $n$  et dont la valeur de  $s$  est  $k$ . L'étude de la série génératrice bivariée  $A(t, u) = \sum_n \left( \sum_k a(n, k) u^k \right) t^n$  permet alors d'obtenir les moments de  $S_n$ . Pour  $u = 1$  on retrouve la série génératrice ordinaire univariée :

$$A(t, 1) = \sum a_n t^n$$

et l'espérance de  $S_n$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$u \frac{\partial}{\partial u} A(t, u) = \sum_n \left( \sum_k k a(n, k) u^k \right) t^n \quad \Rightarrow \quad u \frac{\partial}{\partial u} A(t, u) \Big|_{u=1} = \sum_n a_n \mathbb{E}(S_n) t^n.$$

## La méthode probabiliste ou comment les probabilités simplifient (parfois) la combinatoire

Si des calculs de probabilités se ramènent parfois à du dénombrement, introduire de l'aléa dans des problèmes déterministes permet dans certains cas de les simplifier. Voir les objets comme des variables aléatoires permet souvent de faciliter leur étude et également de disposer de tout l'arsenal du petit probabiliste constitué de résultats de convergence et d'approximation puissants.

### La méthode probabiliste

La « méthode probabiliste », initiée par Erdős [Erd47], repose sur le principe informel suivant : pour prouver qu'il existe dans une classe un objet vérifiant certaines propriétés, on définit un espace de probabilité adapté à cette classe et l'on montre que la probabilité qu'un objet satisfasse les propriétés requises est strictement positive. Cette méthode introduite pour répondre à une question de théorie des graphes a ensuite été étendue à de nombreux autres domaines ([AS00]).

Un exemple illustrera de manière plus convaincante cette méthode que l'énoncé de son principe général. Soit  $K_n$  le graphe complet sur  $n$  sommets, on cherche à montrer qu'il existe pour tout  $n$  un coloriage à deux couleurs des arêtes de  $K_n$  tel qu'il existe au plus  $\binom{n}{4} 2^{-5}$  copies monochromatiques de  $K_4$  dans  $K_n$ .

Considérons un coloriage aléatoire de  $K_n$  où chaque arête est coloriée en bleu ou en rouge avec probabilité  $1/2$  et indépendamment des autres arêtes. La probabilité qu'une copie de  $K_4$  soit monochromatique est égale à  $2 \cdot 2^{-6}$  ( $K_4$  possède 6 arêtes), l'espérance

du nombre de copies monochromatiques de  $K_4$  est donc  $\binom{n}{4} 2^{-5}$ . La probabilité qu'un coloriage vérifie les conditions requises est donc strictement positive et en particulier un tel coloriage existe.

L'introduction du modèle aléatoire permet ici de réduire le problème combinatoire à un simple problème de calcul d'espérance, mais on pourrait également utiliser des outils probabilistes plus sophistiqués (inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, principe de grandes déviations, ...).

Le principal défaut de cette méthode et qu'elle n'est pas constructive : elle se contente de prouver l'existence d'une solution mais sans en exhiber. Dans le cas des coloriages de  $K_n$ , en énumérant tous les coloriages possibles, on finirait par trouver une solution au problème, mais ce n'est pas raisonnable en pratique car le nombre de coloriages de  $K_n$  est super exponentiel.

En fait, de la même façon que l'on a transformé un modèle déterministe en un modèle probabiliste, on peut obtenir un algorithme déterministe à partir de ce dernier. Décrivons rapidement comment obtenir un coloriage solution de  $K_n$  en un temps polynomial et de manière déterministe. Celui-ci est construit de manière itérative : à chaque étape, on colorie une des arêtes de  $K_n$  et on attribue à chaque copie de  $K_4$  un poids. Ce poids est égal à la probabilité que cette copie de  $K_4$  soit monochromatique si chacune des arêtes qui n'est pas encore colorée est coloriée en rouge ou en bleu avec probabilité  $1/2$  et ce indépendamment des autres arêtes. Le poids du coloriage partiel est défini comme la somme des poids de chacune des copies de  $K_4$ . A chaque fois que l'on colorie une arête, on choisit sa couleur pour que le poids du coloriage résultant soit minimal. Un calcul simple permet d'assurer que le coloriage ainsi obtenu (en temps polynomial) est solution au problème.

Cet exemple illustre le procédé général de « *randomisation* » et de « *derandomisation* » qui consiste en des allers-retours entre le déterminisme et l'aléatoire, on en présente d'autres exemples issus de l'analyse d'algorithmes.

### Analyse d'algorithmes en moyenne et poissonisation

Dans le début de cette introduction a été évoquée l'analyse du coût moyen d'un algorithme comme une application possible de la combinatoire. Une façon probabiliste de reformuler ce problème est de considérer que les entrées sont tirées uniformément parmi les entrées de taille  $n$ , le coût de l'algorithme est alors une variable aléatoire dont l'espérance est le coût moyen de l'algorithme.

Les méthodes de poissonisation et de dépoissonisation (voir par exemple [JS98]) sont une autre manière d'introduire de l'aléa dans des problèmes déterministes pour étudier les performances de certains algorithmes ou pour étudier des problèmes combinatoires plus généraux. Cette méthode s'illustre particulièrement bien sur les modèles classique d'urnes. Supposons que  $n$  boules soient jetées uniformément dans  $m$  urnes, on cherche à répondre aux questions : combien d'urnes sont vides? Combien faut-il jeter de boules pour que toutes les urnes soient remplies?... L'absence d'indépendance entre les urnes constitue la difficulté majeure de ce problème. Pour la contourner, on suppose que le nombre de boules est maintenant aléatoire et suit une loi de Poisson de moyenne  $n$ . Les propriétés de la loi de Poisson impliquent que les urnes contiennent chacune un nombre de boules qui ne dépend pas du contenu des autres urnes. L'analyse de cette version « poissonisée » est donc bien plus simple. Il reste ensuite à dépoissoniser, pour en déduire des propriétés du modèle déterministe initial.

## Limites d'échelle ou comment combinatoire et probabilités s'entremêlent

Un thème de recherche récurrent en théorie des probabilités est la quête d'objets limites continus. Plus formellement, soit  $\mathcal{A}$  un ensemble d'objets et  $\mathcal{A}_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  formé des objets de taille  $n$  et  $\mu_n$  une loi de probabilité sur  $\mathcal{A}_n$ , ce que l'on appelle « convergence des objets de  $\mathcal{A}$  vers un objet limite continu » est en fait la convergence en distribution de la suite  $(\mu_n)$  vers une loi de probabilité  $\mu$  sur un espace où les objets sont continus. Par abus de langage, on appelle objet limite continu à la fois la mesure limite  $\mu$  et les objets continus distribués selon cette loi. L'idée sous-jacente est que les objets discrets peuvent être regroupés en « classes d'universalité » telles que tous les objets d'une même classe, correctement normalisés, convergent vers la même mesure limite dont l'exemple le plus célèbre est sûrement le mouvement brownien. Ces comportements limites sont souvent appelés « limites d'échelle » car la convergence d'objets discrets vers un objet limite continu est en fait la convergence d'objets discrets renormalisés par la valeur moyenne de certains paramètres.

Les motivations sont multiples. D'un point de vue purement probabiliste, cela permet d'introduire des objets limites continus souvent intéressants en tant que tels. D'un point de vue combinatoire, ce point de vue apporte un éclairage nouveau sur les objets puisqu'il permet de regrouper en classes d'universalité tous les objets qui ont le même comportement asymptotique.

Ce type de résultat est également particulièrement intéressant car il porte sur la convergence des objets eux-mêmes, tandis qu'en combinatoire classique, seul le comportement asymptotique de certaines de leurs statistiques (comme leur hauteur, leur diamètre, ...) est étudié. Les limites d'échelle entraînent elles la convergence de toutes ces statistiques (du moins celles qui dépendent continûment de l'objet) et en ce sens les limites d'échelle peuvent être considérées comme des résultats combinatoires à part entière. L'absence de frontière nette entre les résultats qui relèvent de la combinatoire et ceux qui relèvent des probabilités est également accentuée par l'absence de frontière nette entre les communautés de personnes qui s'intéressent à ces problèmes. Concluons cette discussion théorique par un exemple concret ou des résultats combinatoires sont déduits de la convergence des objets discrets vers un objet limite continu. Notons  $F_n(x)$  la probabilité que la hauteur d'un arbre binaire choisi uniformément parmi les arbres binaires de taille  $n$  soit au plus égale à  $x$ , le comportement asymptotique de  $F_n$  peut être obtenu comme corollaire de la convergence des arbres binaires sous la loi uniforme vers l'arbre continu d'Aldous ([Ald91],[MM03]) redémontrant ainsi le résultat suivant précédemment obtenu par des méthodes purement combinatoires [Kem79], [FO82]:

$$F_n(x) = P\left(\frac{H_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow F(x/2),$$

où

$$F(x) = \frac{2\pi^{5/2}}{x^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 e^{-\pi^2 k^2/x^2}.$$

Si certains de ces objets, comme le mouvement brownien ou l'arbre continu d'Aldous, sont bien connus, la recherche et l'étude d'objets limites sont encore aujourd'hui des domaines de recherche très actifs. On verra dans la suite qu'établir la convergence des modèles classiques de cartes planaires vers une carte brownienne constituerait une avancée majeure dans les travaux sur les cartes planaires aléatoires.

Un autre domaine de recherche très actif aujourd'hui et dans lequel interviennent des objets limites « universels » est l'étude du SLE (pour « *Schramm-Loewner Evolution* »),

introduit par Schramm [Sch00] et ensuite étudié conjointement par Lawler, Schramm et Werner dans une série d'articles (entre autres [LSW01a],[LSW01b],[LSW02],[LSW04]). La médaille Fields reçue par Werner en 2006 récompense notamment ces travaux.

Le  $SLE_\kappa$  est une loi de probabilités sur des courbes planaires, limite de nombreux objets discrets. Il est notamment prouvé que  $SLE_2$  est la limite d'échelle des marches aléatoires à boucles effacées et que  $SLE_{8/3}$  est celle des marches aléatoires auto-évitantes. Une application combinatoire simple mais significative de ces travaux est la suivante : étant donnée deux particules réalisant une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^2$  et partant toutes les deux du même sommet, quelle est la probabilité qu'après  $n$  pas, le seul point commun à leur trajectoire soit leur origine? On savait depuis longtemps que cette probabilité se comportait en  $n^{-a}$ , mais la valeur exacte de l'exposant  $a = 5/8$  n'a pu être calculée rigoureusement que grâce aux résultats obtenus sur le SLE.

À présent que nous avons illustré la variété des interactions entre combinatoire et probabilités, nous en donnons de nouveaux exemples avec les résultats obtenus dans cette thèse.

## Contributions de la thèse

Nous commençons par présenter les résultats obtenus dans les deux premiers chapitres qui portent sur l'énumération de monoïdes pour le premier et d'animaux dirigés pour le second. Nous décrivons ensuite les résultats obtenus sur certains modèles de cartes planaires présentés dans les chapitres 3 et 4.

### Empilements généralisés et fonctions de Möbius de monoïdes de tresses

Le chapitre 1 porte sur la combinatoire de certains monoïdes présentés par générateurs et relations en accordant une attention particulière aux monoïdes de tresses. Le principal résultat de ce chapitre consiste en une généralisation de la théorie des empilements de pièces due à Viennot et afin de situer le contexte dans lequel s'inscrit ce résultat, nous commençons par présenter cette théorie.

Les monoïdes partiellement commutatifs (ou monoïde de traces ou monoïdes de Cartier-Foata) sont des monoïdes admettant une présentation de la forme :

$$M = \langle s_1, s_2, \dots \mid s_i s_j = s_j s_i \text{ pour tout } (i, j) \in R \rangle,$$

où  $R$  est un sous-ensemble symétrique de  $\mathbb{N}^2$ . Les éléments de  $M$  sont donc des classes d'équivalence de mots sur l'alphabet  $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots\}$ , éventuellement infini, où deux mots sont équivalents si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite de commutations  $s_i s_j = s_j s_i$  où  $(i, j)$  appartient à  $R$ .

La combinatoire de ces monoïdes est connue depuis les travaux communs de Cartier et Foata [CF69] qui en calculent la fonction de Möbius et en déduisent leur série génératrice, lorsque l'alphabet  $\mathcal{S}$  est fini. Les éléments sont énumérés selon leur longueur, c'est-à-dire selon le nombre de lettres d'un mot appartenant à la classe d'équivalence.

À la fin des années 80, Viennot [Vie86] introduit ce que l'on appelle aujourd'hui la « théorie des empilements » ; les éléments de monoïdes de traces sont vus comme des empilements de pièces. Pour fixer les idées, nous décrivons cette représentation pour l'exemple simple du monoïde partiellement commutatif  $M$  défini par :

$$M = \langle a, b, c \mid ac = ca \rangle.$$

À chacune des lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$  est associé un type de pièce et à chaque mot sur  $\{a, b, c\}$  est associée la suite de pièces correspondantes. Sur la figure 2 sont représentées les suites de pièces associées aux deux mots  $acbacac$  et  $cabcaac$ . On imagine que ces pièces sont soumises à la gravité à la manière d'un jeu de « tetris » et on appelle *empilement* la pile de pièces obtenue. Deux suites de pièces conduisent au même empilement si et seulement si les mots qui leur sont associés sont équivalents dans  $M$ , c'est effectivement le cas sur la figure 2.

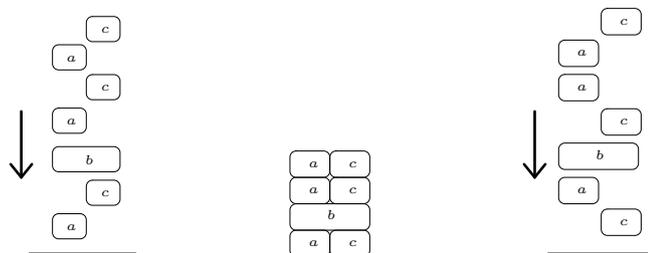


Fig. 2 – Deux mots équivalents codent deux suites de pièces conduisant au même empilement.

Cette nouvelle présentation permet non seulement de retrouver de manière directe les résultats de Cartier et Foata, mais également d'apporter un éclairage nouveau sur la combinatoire et la structure algébrique de ces monoïdes. La meilleure compréhension apportée par cette représentation permet de plus de les manipuler plus efficacement et la théorie des empilements s'est imposée comme un outil puissant, ingrédient principal de nombreux résultats combinatoires.

C'est justement afin de mieux comprendre la combinatoire du monoïdes de tresses positives que nous avons cherché à étendre la théorie des empilements à ce monoïde. Outre la représentation géométrique sous forme de piles de pièces, les résultats de Viennot reposent sur la définition d'un ensemble d'*empilements triviaux* et sur la construction d'une involution portant sur des couples formés d'un empilement trivial et d'un empilement quelconque et vérifiant de bonnes propriétés. Cette involution permet notamment de ramener le calcul de la série génératrice des monoïdes de traces au calcul, bien plus simple, d'une série génératrice pondérée sur les empilements triviaux (cette série est en fait un polynôme puisque l'ensemble des empilements triviaux est fini).

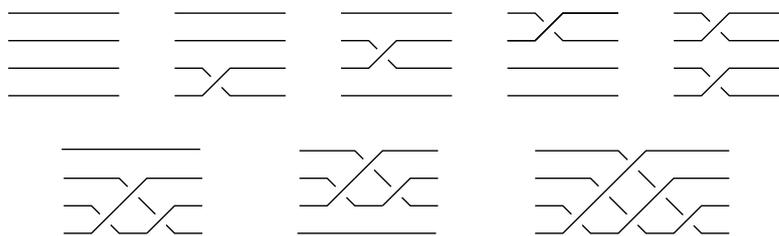


FIG. 3 – L'ensemble des tresses triviales sur quatre brins

En définissant un ensemble de « tresses triviales » analogue à l'ensemble des empilements triviaux et en construisant une involution sur les couples formés d'une tresse triviale et d'une tresse quelconque, nous avons ainsi étendu la théorie des empilements aux monoïdes de tresses. Sur la figure 3 est représenté l'ensemble des tresses triviales

sur quatre brins. Nous avons ensuite cherché à généraliser cette approche à d'autres monoïdes, ceci a donné lieu à la première contribution majeure de ce chapitre :

- L'extension de la théorie des empilements à une large classe de monoïdes, comprenant en particulier les monoïdes de tresses classiques et duaux et plus généralement tous les monoïdes de Garside (Théorème 1.28).

Dans le cas des tresses classiques, ceci permet notamment de retrouver la valeur de leur série génératrice, précédemment obtenue dans [Bro01] et [Kra05] par inclusion-exclusion. Cet ensemble de résultats a donné lieu à la publication de [Alb07].

En collaboration avec Philippe Nadeau, nous nous sommes ensuite plus particulièrement intéressés à l'application de ce résultat au monoïde de tresses dual introduit par Birman, Ko et Lee [BKL98], ce qui nous a permis d'obtenir :

- Le calcul de la série génératrice du monoïde de tresses dual à  $n$  brins (Théorème 1.35) démontrant ainsi une conjecture de Krammer. Ce résultat a été établi de manière bijective et repose notamment sur la construction d'une bijection entre les arbres unaires-binaires et les forêts alternantes non-croisées (Théorème 1.41).

## Animaux dirigés et modèles de gaz

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'énumération d'animals dirigés selon leur aire et fait l'objet de l'article [Alb08] soumis pour publication.

Étant donné un graphe orienté, un *animal dirigé* sur ce graphe est un ensemble connexe de sommets. Connexe est ici pris en un sens dirigé : on se fixe un ensemble de sommets — c'est la *source* de l'animal — et on impose que chaque sommet de l'animal dirigé soit relié à un sommet de la source par un chemin qui n'emprunte que des sommets de l'animal dirigé (cf figure 4). L'aire d'un animal est le nombre de sommets qui le constituent. Des approches variées ont été proposées pour énumérer les animaux dirigés

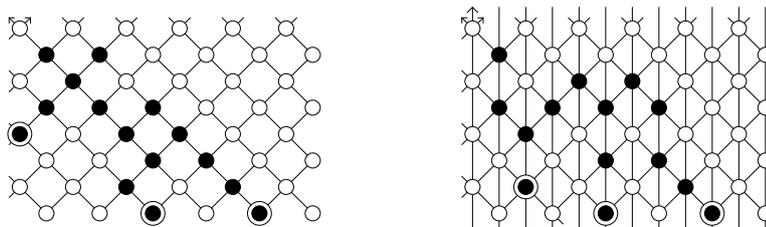


Fig. 4 – Exemple d'animals dirigés d'aire 15 sur le réseau carré (à gauche) et d'aire 14 sur le réseau triangulaire (à droite). Les sommets des animaux sont noirs et les sommets des sources sont cerclés. Les arêtes sont orientées vers le haut.

selon leur aire. On se consacre ici aux méthodes fondées sur l'utilisation de modèles de gaz. Ce point de vue, initié par Dhar [Dha83] dans les années 80, s'est révélé être un angle d'attaque efficace et assez systématique.

Les modèles de gaz ont été introduits en physique statistique pour modéliser la répartition d'un gaz. Une *occupation de gaz* sur un graphe est une fonction des sommets du graphe dans l'ensemble d'états {libre, occupé}. Un *modèle de gaz* est une loi de probabilité sur les occupations de gaz. La *densité* du gaz en un sommet est la probabilité que ce sommet soit occupé.

La principale contribution de [Dha83] est de construire des modèles de gaz dont la densité est reliée de manière simple aux séries génératrices des animaux dirigés. En calculant la densité de ces modèles pour les réseaux carré et triangulaire, il obtient ainsi la série génératrice des animaux dirigés sur ces réseaux.

Bousquet-Mélou [BM98], puis Bousquet-Mélou et Conway [BMC96] généralisent et systématisent les travaux de Dhar. Pour des raisons techniques, dans leurs travaux les gaz ne sont définis que sur une bande de largeur finie du graphe avec des conditions cycliques aux bords, les résultats sur l'énumération d'animaux dirigés étant ensuite déduits par passage à la limite. Le Borgne et Marckert [LBM07] parviennent à étendre la définition de ce modèle au graphe entier. Ceci leur permet d'étudier les propriétés stochastiques du gaz sur le graphe entier et notamment d'en obtenir une description markovienne sur le réseau carré. Ceci entraîne des résultats d'énumération d'animaux dirigés sur ce réseau pour des sources variées.

L'idée initiale du travail présenté dans cette thèse était de voir si une description markovienne du modèle de gaz défini dans [LBM07] pouvait être obtenue pour la famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 2}$ , généralisation du réseau carré introduite dans [BMC96] (c.f. figure 5). Cette idée était motivée à la fois par le résultat de [LBM07] et par la forme multiplicative de la distribution du gaz obtenue dans [BMC96] et [BM98]. Nous avons effectivement obtenu que la restriction du modèle de gaz à une ligne du réseau  $\mathcal{L}_m$  est une chaîne de Markov de mémoire  $m - 1$  (Corollaire 2.22).

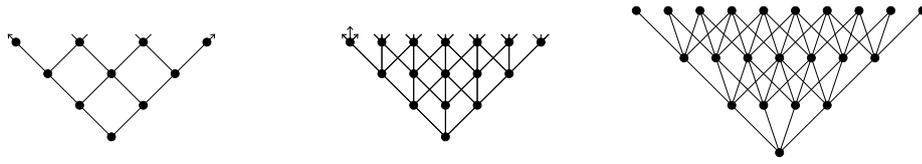


Fig. 5 – De gauche à droite, les réseaux  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$

Nous avons en fait largement dépassé cet objectif en obtenant :

- Une description markovienne du modèle de gaz de [LBM07] pour de nombreux graphes incluant notamment le réseau triangulaire (Théorèmes 2.23 et 2.24) et la famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)$  (Théorème 2.20).

Grâce au lien entre animaux dirigés et modèles de gaz cela nous a permis d'obtenir :

- Les séries génératrices des animaux dirigés sur le réseau triangulaire pour des sources variées (Proposition 2.25). Ce calcul généralise le résultat de [Dha83] limité aux animaux dirigés dont la source est réduite à un sommet. Pour les autres réseaux évoqués ci-dessus, leur série génératrice sont exprimées de manière implicite comme solutions d'équations algébriques.

Ces résultats reposent principalement sur l'introduction des deux notions suivantes :

- La définition d'une topologie sur un ensemble de graphes adaptée à l'étude des animaux dirigés. Cette topologie induit une notion de convergence sur les graphes. Sous certaines hypothèses raisonnables, cette convergence de graphes implique la convergence des lois fini-dimensionnelles du modèle de gaz et par suite la convergence formelle des séries génératrices des animaux dirigés (Théorème 2.14). Ceci permet alors de ramener l'étude des animaux dirigés sur le graphe limite à celle sur des graphes plus simples.

- L'introduction des chaînes de Markov cycliques (Définition 2.16) et leur étude. Le résultat principal porte sur la convergence des chaînes de Markov cycliques vers une chaîne de Markov classique (Théorème 2.18). Ceci permet de réinterpréter les résultats obtenus dans [BMC96] et [BM98] en termes de chaînes de Markov cycliques et d'obtenir ainsi qu'à la limite, la distribution du gaz sur une ligne est markovienne.

## Comportement asymptotique de cartes planaires en pile

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude du comportement asymptotique de certains modèles de cartes planaires aléatoires : les triangulations en pile et les quadrangulations en pile. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Jean-François Marckert et fait l'objet de la publication [AM08].

Une carte planaire est un plongement (i.e. un dessin sans croisement d'arêtes) d'un graphe planaire sur la sphère de dimension deux. Deux plongements correspondent à la même carte si l'on peut passer de l'un à l'autre par un homéomorphisme de la sphère préservant son orientation. Trois plongements de la même carte sont dessinés sur la figure 6.

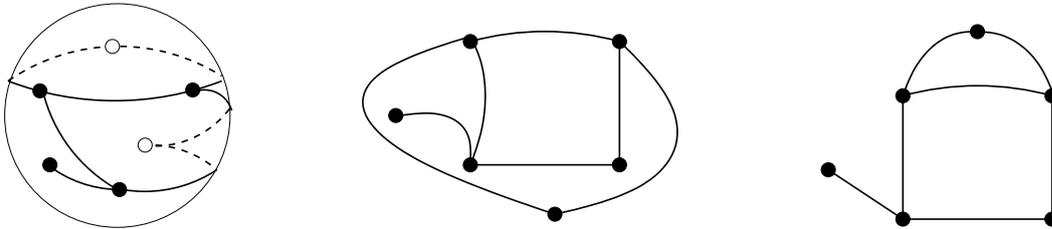


Fig. 6 – Trois plongements de la même carte: même s'ils sont dessinés dans le plan de la feuille, les plongements du milieu et de droite vivent en réalité sur la sphère et représentent donc bien la même carte.

Comme plongement de graphes planaires, les cartes héritent naturellement de la distance de graphe et donc d'une structure d'espace métrique et nous nous intéressons ici à leur convergence en tant qu'espaces métriques aléatoires. Deux notions pertinentes de convergence coexistent alors. La première est une notion locale ; un sommet particulier de la carte est distingué, on l'appelle la racine, et on étudie la convergence des boules centrées en la racine lorsque leur rayon tend vers l'infini. La seconde est une notion « globale » ; on étudie la convergence de la carte entière. Pour obtenir dans ce cas des résultats de convergence non triviaux, on est conduit à renormaliser la longueur d'une arête. En effet, dans les modèles raisonnables de cartes aléatoires, le rayon d'une carte n'est pas borné quand le nombre de sommets tend vers l'infini et on ne peut donc obtenir de résultats sur des paramètres globaux, par exemple sur le comportement asymptotique du rayon, que si les cartes sont renormalisées correctement (par exemple la longueur d'une arête doit être fixée à  $n^{-1/4}$  et non à 1 dans le modèle des quadrangulations uniformes ayant  $n$  faces, voir [CS04]).

Depuis les articles fondateurs d'Angel et Schramm [AS03], sur la convergence de cartes aléatoires sans renormalisation, et de Chassaing et Schaeffer [CS04], sur la convergence de cartes aléatoires renormalisées, l'étude de la convergence de grandes planaires aléatoires est un domaine très actif des mathématiques et de nombreuses familles de cartes planaires ont été étudiées (triangulations, quadrangulations sous la loi uniforme, ...).

Les questions qui semblent les plus intéressantes aujourd’hui concernent la convergence de grandes cartes renormalisées pour la topologie de Gromov-Hausdorff.

Le choix de la topologie de Gromov-Hausdorff pour décrire le comportement asymptotique de grandes cartes aléatoires semble être le plus pertinent. En effet, comme elle permet d’étudier la convergence de cartes en tant qu’espaces métriques elle conduit à des résultats sur la métrique de l’objet limite, par exemple sur la distance jointe de  $k$  points, sur les géodésiques ainsi que sur de nombreuses propriétés topologiques. Par ailleurs, la topologie de Gromov-Hausdorff est une topologie finie sur les espaces métriques et les résultats de convergence obtenus sont des résultats puissants, desquels on peut tirer des résultats sur le comportement asymptotique des grandes cartes finies.

Les motivations pour étudier la convergence de grandes cartes normalisées sont multiples. Il existe tout d’abord un intérêt purement probabiliste : on conjecture l’existence d’un objet limite continu universel vers lequel convergeraient toutes les familles raisonnables de cartes aléatoires correctement normalisées. Cette *carte brownienne*, si elle existe, serait un analogue deux-dimensionnel du mouvement brownien. L’étude de cet objet et de ces propriétés légitime à elle seule l’intérêt porté aux grandes cartes planaires. Par ailleurs, comme on l’a déjà mentionné, la convergence vers un objet continu permet une bonne compréhension des propriétés combinatoires des objets finis. Des illustrations de ce principe général se trouvent par exemple dans les résultats sur la hauteur de certains arbres déduits de leur convergence vers l’arbre continu d’Aldous, ou plus récemment dans les résultats sur les cartes planaires finies obtenus dans [LGP08] et [LG08].

On peut également mentionner que des motivations supplémentaires proviennent de la physique théorique. Le concept de surface aléatoire est central dans le domaine de la gravité quantique bidimensionnelle de la physique théorique [ADJ97]. Un des enjeux est de définir une notion de mesure de probabilités sur des surfaces. Comme les cartes planaires peuvent être vues comme une discrétisation de surfaces continues, une idée naturelle est de prendre comme loi sur les surfaces la loi limite (si elle existe et en un sens à préciser) sur les cartes planaires quand la longueur d’une arête tend vers zéro. Plus précisément, l’idée des physiciens est que la « bonne » loi à considérer serait la loi limite des triangulations renormalisées sous la loi uniforme. Établir la convergence des cartes vers un objet limite continu physiquement acceptable permettrait ainsi de justifier *a posteriori* l’intuition physicienne.

Nous nous sommes intéressés ici à une famille particulière de cartes planaires : les triangulations en pile enracinées. Une *triangulation en pile* est une triangulation construite de manière récursive en partant d’un triangle initial par ajouts successifs de sommets et d’arêtes comme représenté sur la figure 7. Ces modèles (ou certaines de leurs variantes) ont été étudiés dans [AHAdS05], [ZYW05], [ZCFR06], [DS07] et [ZCZ<sup>+</sup>08].

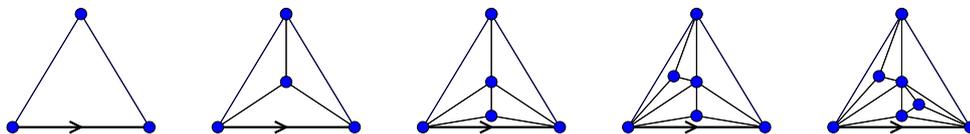


Fig. 7 – Construction récursive d’une triangulation en pile

Nous avons étudié de manière systématique le comportement asymptotique de ces cartes : sous différentes lois de probabilités, pour des topologies différentes, avec et sans renormalisation. Les résultats obtenus les plus significatifs nous semblent être les suivants :

- La convergence en distribution des triangulations en pile normalisées, sous la loi uniforme, vers l'arbre continu introduit par Aldous pour la topologie de Gromov-Hausdorff (Théorème 3.10).

Ce modèle est le premier modèle de cartes (exception faite des arbres) pour lequel la convergence pour la topologie de Gromov-Hausdorff a été établie et, à ce titre, c'est le résultat majeur de notre travail.

- La convergence en loi, pour une topologie locale sur les triangulations, des triangulations en pile sous la loi uniforme vers une triangulation infinie dont la distribution est donnée (Théorème 3.14).
- La convergence en probabilité de la matrice des distances renormalisées entre  $k$  sommets choisis aléatoirement dans une triangulation en pile sous la loi historique (Théorème 3.16).

La loi historique est la loi induite par la construction récursive des triangulations en pile : selon l'ordre d'insertion des sommets, plusieurs *histoires* peuvent conduire à la même triangulation en pile (par exemple, la triangulation en pile de la figure 7 admet trois histoires), la loi historique pondère par un poids proportionnel à son nombre d'histoires la probabilité d'une triangulation en pile donnée.

Nous avons également défini un modèle de quadrangulations en pile, similaire aux triangulations en pile, obtenues à partir d'un carré initial par ajouts successifs de sommets et d'arêtes (figure 8) et avons montré que :

- Tous les résultats obtenus pour les triangulations en pile s'étendent aux quadrangulations en pile (Théorèmes 4.40 et 4.42).

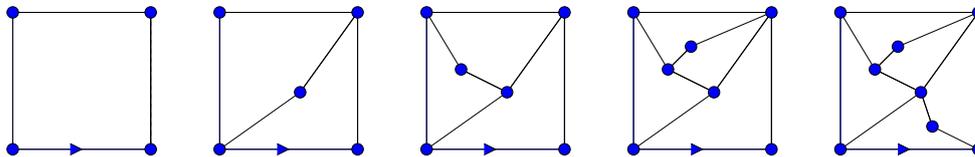


Fig. 8 – Construction récursive d'une quadrangulation en pile

## À l'interaction entre combinatoire et probabilité

Comme nous l'avons expliqué et argumenté au début de cette introduction, la combinatoire et la théorie des probabilités discrètes s'entremêlent dans de nombreux problèmes. Nous donnons de nouvelles illustrations de ce principe en nous appuyant sur les objets étudiés dans cette thèse.

Le premier chapitre portant sur la combinatoire des monoïdes n'illustre a priori que peu ce principe, puisqu'il ne contient aucun résultat probabiliste. Pourtant, la première motivation du travail qui y est décrit était de mieux comprendre la combinatoire des monoïdes (notamment des monoïdes de tresses) pour pouvoir étudier les marches aléatoires sur ceux-ci.

Le chapitre sur les animaux dirigés est un exemple particulièrement intéressant d'interactions fructueuses entre la combinatoire et les probabilités. L'introduction des modèles de gaz transforment les questions initiales, de nature combinatoire, en des questions

probabilistes. Néanmoins, le cadre combinatoire sous-jacent est fondamental : le fait que la convergence des graphes marqués impliquent effectivement la convergence des lois finidimensionnelles repose notamment sur un argument combinatoire portant sur la taille des animaux. Le modèle probabiliste pourrait également être un modèle d'étude intéressant en lui-même comme cas particulier d'automate cellulaire probabiliste.

Le chapitre sur les cartes présente des interactions plus classiques entre combinatoire et probabilités. L'existence d'une bijection entre les triangulations en pile et les arbres ternaires avec de bonnes propriétés permet de ramener l'étude des distances dans la triangulation à l'étude d'une certaine fonctionnelle de l'arbre. L'étude est ensuite probabiliste : les lois considérées sur les cartes induisent des lois sur les arbres qui à leur tour induisent des lois sur les fonctionnelles de l'arbre. Le cœur de la difficulté des résultats de convergence est de nature probabiliste et consiste à établir le comportement asymptotique de cette fonctionnelle. Une fois la convergence établie, la bonne connaissance (probabiliste) de l'arbre continu d'Aldous permet d'obtenir des résultats combinatoires nouveaux sur les triangulations en pile.

# Première partie

## DES TRESSES ET DES ANIMAUX



# 1

## Combinatoire de monoïdes

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Inventaire : monoïdes, poset et fonction de Möbius</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1	Rappels sur les monoïdes . . . . .	18
1.2	Les POSET et la fonction de Möbius . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Monoïde des empilements de pièces</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1	Empilements de pièces . . . . .	25
2.2	Équivalence entre empilements et monoïdes de Cartier-Foata . . . . .	27
2.3	Énumération d'empilements . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Énumération de tresses positives</b> . . . . .	<b>30</b>
3.1	Présentation du monoïde de tresses . . . . .	30
3.2	Définition d'un ensemble de tresses « triviales » . . . . .	31
3.3	Série de croissance des tresses positives . . . . .	32
3.4	Définition d'une involution sur $T \times B^+$ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Extension à une classe de monoïdes</b> . . . . .	<b>34</b>
4.1	Preuve du théorème 1.28 . . . . .	36
4.2	Preuve du corollaire 1.29 par inclusion-exclusion . . . . .	37
4.3	Quelques exemples de monoïdes . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Application aux monoïdes de tresses duaux</b> . . . . .	<b>39</b>
5.1	Présentation de $B_n^{+*}$ . . . . .	40
5.2	Un peu d'arithmétique dans $B_n^{+*}$ . . . . .	41
5.3	Des configurations d'arêtes aux forêts alternantes non-croisées . . . . .	42
5.4	Forêts alternantes-non croisées et arbres unaires-binaires . . . . .	44
5.5	Où l'on retrouve la fonction de Möbius . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Perspectives et problèmes ouverts</b> . . . . .	<b>49</b>
6.1	Hauteur des empilements . . . . .	49
6.2	Combinatoire du groupe . . . . .	51
6.3	Tresser aléatoirement . . . . .	57

---

A la fin des années 80, Viennot [Vie86] introduit ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des empilements pour redémontrer des résultats combinatoires sur les monoïdes de traces, résultats obtenus auparavant par Cartier et Foata par inclusion-exclusion. La théorie des empilements s'est ensuite imposée comme un outil puissant, élément principal de preuves élégantes intervenant dans de nombreux domaines de la combinatoire.

L'idée principale de ce chapitre est d'étendre cette notion d'empilements et les preuves bijectives qui en découlent à des monoïdes plus généraux. Les monoïdes visés initialement étaient les monoïdes de tresses dont j'ai effectivement obtenu la série génératrice par une

approche de type empilement (Théorème 1.24 et Corollaire 1.25), redémontrant ainsi des résultats de [Bro01] et [Kra05], obtenus par inclusion-exclusion. J'ai ensuite cherché à définir un ensemble de conditions que doit vérifier un monoïde pour que la machinerie des empilements puissent s'appliquer. En généralisant le travail de [Bro01], j'ai ainsi défini un ensemble de monoïdes passibles d'un traitement par empilement comme énoncé dans le Théorème 1.28 et le Corollaire 1.29. Cet ensemble de résultats a donné lieu à la publication [Alb07].

En collaboration avec Philippe Nadeau, ces résultats nous ont permis d'obtenir (Théorème 1.35) la série génératrice du monoïde de tresses dual de Birman-Ko-Lee, conjecturée par Krammer [Kra05], en établissant une bijection entre les forêts alternantes non-croisées et les arbres unaires-binaires (Théorème 1.41).

Dans ce chapitre, je commence par rappeler des notions élémentaires sur les monoïdes, les POSET et la fonction de Möbius (Section 1) et sur les empilements de pièces (Section 2). J'étends ensuite la théorie des empilements aux monoïdes de tresses classiques (Section 3) et à une classe générale de monoïdes (Section 4). Dans la Section 5 sont présentés les monoïdes de tresses duaux et le calcul de leur série génératrice. Enfin, je présente dans la section 6 des perspectives et des problèmes ouverts.

## 1 Inventaire : monoïdes, poset et fonction de Möbius

### 1.1 Rappels et définitions concernant les monoïdes présentés par générateurs et relations

Je rappelle dans cette partie quelques notions élémentaires sur les monoïdes et plus particulièrement sur les monoïdes définis via une présentation par générateurs et relations.

Un *monoïde* est un ensemble muni d'une loi interne associative pour laquelle il existe un élément neutre, noté 1.

#### 1.1.1 Monoïdes libres

On commence par rappeler la définition d'un monoïde libre. Soit  $S$  un ensemble non vide, dont les éléments seront appelés *lettres*. Un *mot* sur  $S$  est une suite finie  $w = s_1 \cdots s_n$  de lettres ; l'entier  $n$  est appelé la *longueur* de  $w$ . On note 1 le mot n'ayant aucune lettre, appelé mot vide ; sa longueur est 0.

On munit l'ensemble des mots de la loi de concaténation suivante : soient  $w = s_1 \cdots s_m$  et  $w' = s'_1 \cdots s'_n$  deux mots non vides, leur produit est  $w'' = ww' = s_1 \cdots s_m s'_1 \cdots s'_n$ . On pose également  $w \cdot 1 = 1 \cdot w = w$  pour tout mot  $w$ . L'ensemble des mots muni de cette opération est un monoïde, appelé *monoïde libre* construit sur  $S$ , on le note  $S^*$ . En utilisant cette notation, on confond l'ensemble des mots construits sur  $S$  avec le monoïde, c'est-à-dire l'ensemble muni de la loi de concaténation, le contexte est normalement suffisamment clair pour éviter les ambiguïtés.

Soient  $u$  et  $v$  deux mots, on dit que  $u$  est un *préfixe*, resp. *suffixe*, de  $v$  s'il existe un mot  $w$  tel que  $v = uw$ , resp.  $v = wu$ .

#### 1.1.2 Monoïdes présentés par générateurs et relations

Soit  $S$  un ensemble non vide et  $R$  un sous-ensemble de  $S^* \times S^*$  symétrique (i.e.  $(x, y) \in R$  implique  $(y, x) \in R$ ). On dit que deux mots  $w$  et  $w'$  sur  $S$  sont *R-adjacents* (ou adjacents) s'il existe deux mots  $u$  et  $v$  sur  $S$  et une paire de mots  $(z, z') \in R$  et tels

que  $w = uzv$  et  $w' = uz'v$ . Deux mots  $w$  et  $w'$  sont dits *R-équivalents* (ou équivalents) s'ils sont égaux ou s'il existe une suite de mots  $w_0, w_1, \dots, w_p$  telle que  $w_0 = w, w_p = w'$  et  $w_i$  et  $w_{i+1}$  sont *R*-adjacents pour  $0 \leq i < p$ . On note dans ce cas  $w \equiv w'$ .

La relation définie par « être *R*-équivalent » est une relation d'équivalence sur  $S^*$ . Cette relation est de plus compatible avec la concaténation : si  $u$  et  $u'$ , respectivement  $v$  et  $v'$ , sont *R*-équivalents alors  $uv$  et  $u'v'$  le sont également. Le monoïde dont les éléments sont les classes d'équivalence de mots et dont la loi interne est la concaténation est noté  $\langle S \mid R \rangle$ , c'est le monoïde défini (ou présenté) par l'ensemble de générateurs  $S$  et la relation  $R$ . Par exemple, le monoïde défini par  $\langle a \mid aaa \equiv 1 \rangle$  (autrement dit  $R = \{(1, aaa), (aaa, 1)\}$ ) est isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Par souci de simplification, on confond souvent un mot avec sa classe d'équivalence quand le contexte est clair. Si  $u$  et  $v$  sont deux mots distincts mais équivalents, on note par exemple souvent  $u = v$ , alors qu'en toute rigueur il faudrait écrire  $u \equiv v$ . On réserve cette dernière écriture aux cas où on insiste sur le fait qu'on considère un représentant particulier de la classe d'équivalence.

*Remarque 1.1.* Dans la littérature, la notation  $\langle S \mid R \rangle$  désigne généralement le *groupe* — par opposition au monoïde — engendré par  $S$  et  $R$ . Or, excepté dans la partie 6.2, on ne considère ici que des monoïdes présentés par générateurs et relations. C'est pourquoi on désignera généralement par  $\langle S \mid R \rangle$  le monoïde. Toutefois s'il existe un risque d'ambiguïté on notera  $\langle S \mid R \rangle^+$  le monoïde engendré par  $S$  et  $R$ .

### 1.1.3 Autour de la longueur et de l'énumération

La définition de la longueur d'un élément du monoïde libre peut être étendue à tout élément d'un monoïde présenté par générateurs et relations de la façon suivante.

**Définition 1.2.** Soit  $M = \langle S \mid R \rangle$  un monoïde engendré par générateurs et relations. Soit  $x$  un élément de  $M$ , on appelle *longueur* de  $x$  et on note  $|x|_S$  (ou  $|x|$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) la longueur (en tant que mot) d'un plus court représentant de  $x$ , autrement dit :

$$|x|_S = \min\{k \mid \exists s_1, \dots, s_k \in S \text{ tels que } x \equiv s_1 \dots s_k\} \quad (1.1)$$

*Remarque 1.3.* La longueur d'un élément dépend crucialement de l'ensemble  $S$  de générateurs choisi. Il existe de nombreux exemples de monoïdes pour lesquels on sait énumérer les éléments selon leur longueur uniquement pour certains ensembles de générateurs (et non nécessairement les plus pertinents, voir la section 6 pour de tels exemples).

Pour énumérer les éléments d'un monoïde  $M$ , on introduit la *série génératrice* (ou fonction génératrice). C'est la série formelle à coefficients entiers définie par :

$$F_M(t) = \sum_{m \in M} t^{|m|} = \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \quad (1.2)$$

où  $a_n$  est le nombre d'éléments de  $M$  de longueur  $n$ .

**Définition 1.4.** On dit que  $M = \langle S \mid R \rangle$  est une présentation homogène de  $M$  si les relations de  $R$  préservent la longueur, autrement dit si  $|x|_S = |y|_S$  pour tout couple d'éléments  $(x, y)$  de  $R$ .

La donnée d'une présentation homogène implique que deux éléments d'une même classe d'équivalence ont, en tant que mots, la même longueur et que la longueur d'un élément du monoïde est la longueur de n'importe lequel de ses représentants (moins formellement, cela revient à enlever le minimum dans l'équation (1.1)).

Cette hypothèse simplifie grandement l'énumération à longueur fixée, elle est une condition indispensable pour l'application de nos théorèmes. À noter que, si on considère des groupes et non plus des monoïdes, l'homogénéité n'est jamais vérifiée (il y a toujours des relations du type  $ss^{-1} = 1$  caractéristiques du groupe) : c'est une des raisons pour lesquelles la combinatoire des groupes est un problème d'un autre niveau de difficulté que celle des monoïdes (voir la section 6.2 à ce sujet).

#### 1.1.4 Série formelle sur un monoïde

Soit  $M$  un monoïde, on considère l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M, \mathbb{Z})$  de  $M$  dans  $\mathbb{Z}$  (dans cette partie, on pourrait plus généralement remplacer  $\mathbb{Z}$  par un anneau commutatif). Soit  $f$  une application de  $\mathcal{F}$ , si on note  $a_m$  l'image de  $m$  par  $f$ , on peut représenter  $f$  comme la série formelle sur  $M$  à coefficients entiers  $\sum a_m m$ .

**Définition 1.5.** Soit  $M$  un monoïde, on note  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$  l'ensemble

$$\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle = \left\{ \sum_{m \in M} a_m m, \text{ où } a_m \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } m \in M \right\}$$

des séries formelles sur  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

On munit l'ensemble  $\mathcal{F}$  (et donc  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$ ) d'une structure de groupe pour l'addition en posant

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ où } f, g \in \mathcal{F} \text{ et } x \in M.$$

Le produit naturel à définir sur  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$  est un produit de Cauchy (qui correspond à un produit de convolution pour les séries). On introduit pour cela la notion suivante de monoïde :

**Définition 1.6.** Soit  $M$  un monoïde, un élément  $u$  de  $M$  est appelé un atome si  $u \neq 1$  et si  $u = vw$  entraîne  $v = 1$  ou  $w = 1$ .

Le monoïde  $M$  est dit atomique si le nombre d'atomes de  $M$  est fini, s'ils engendrent  $M$  et si, de plus, pour tout  $u$  de  $M$ , il existe  $A_u \in \mathbb{N}$  tel que la longueur d'une décomposition de  $u$  comme produit d'atomes est bornée par  $A_u$ .

On peut noter qu'un monoïde qui admet une présentation homogène finie est atomique. Par ailleurs, si on appelle *décomposition* d'un élément  $x$  de  $M$  toute suite finie  $(x_1, \dots, x_q)$  d'éléments de  $M \setminus \{1\}$  telle que  $x = x_1 \cdots x_q$ , alors tout élément d'un monoïde atomique n'admet qu'un nombre fini de décompositions. Les monoïdes considérés jusqu'à la fin de cette partie seront toujours supposés atomiques.

Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{F}$ , on peut maintenant poser

$$(fg)(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1)g(x_2),$$

où la somme est finie puisque, par hypothèse, le nombre de décompositions de  $x$  est fini. Cette définition induit la définition du produit de Cauchy suivant sur les séries formelles

$$\left(\sum a_{m_1} m_1\right) \left(\sum b_{m_2} m_2\right) = \sum_m \left(\sum_{m_1 m_2 = m} a_{m_1} b_{m_2}\right) m.$$

Quel est l'intérêt d'introduire des séries formelles pour compter les éléments d'un monoïde ? Si  $M = \langle S \mid R \rangle$  est une présentation homogène, l'application

$$\sum_m c_m m \mapsto \sum_m c_m t^{|m|_S}$$

est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$  dans  $\mathbb{Z}[[x]]$ , l'anneau des séries formelles à coefficients entiers (en effet  $|m_1 m_2|_S = |m_1|_S + |m_2|_S$  dans ce cas). Ce morphisme est bien défini car il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de  $M$  d'une longueur fixée. Pour calculer la série génératrice d'un monoïde présenté de manière homogène, il « suffit » donc de connaître la série formelle  $\sum_{m \in M} m$ .

L'utilisation des séries formelles (par opposition aux séries génératrices) permet d'obtenir directement des résultats plus précis (et qui impliquent les résultats sur les séries génératrices) en travaillant au niveau des objets. Par ailleurs, pour des monoïdes dont la présentation n'est pas homogène et dont on ne connaît pas de série génératrice, le calcul de la série formelle  $\sum_{m \in M} m$  est un premier pas dans l'étude de leur combinatoire.

### 1.1.5 Un peu d'arithmétique

On termine cette introduction aux monoïdes en définissant les notions de divisibilité à gauche et à droite qui généralisent les notions de préfixe et de suffixe définies sur les mots.

Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $M$ , on dit que  $u$  est un diviseur à gauche de  $v$  — ou que  $v$  est un multiple à droite de  $u$  — et on note  $u \prec v$  si et seulement s'il existe  $w \in M$  et  $u', v'$  et  $w'$  des représentants respectifs de  $u, v$  et  $w$  tels que  $v' = u'w'$ . Dans ce cas, on pose  $u^{-1}v := w$ .

On dit que  $w$  est un *plus petit commun multiple* à droite (ou *ppcm* à droite) de  $u$  et  $v$  si  $w$  est un multiple à droite de  $u$  et de  $v$  et un diviseur à gauche de tout multiple à droite commun à  $u$  et  $v$ . De même  $w$  est un *plus grand commun diviseur* à gauche de  $u$  et  $v$  (ou *pgcd* à gauche) de  $u$  et  $v$  si  $w$  est un diviseur à gauche de  $u$  et de  $v$  et un multiple à droite de tout diviseur à gauche commun à  $u$  et  $v$ .

Diviseur à droite, multiple à gauche, ppcm à gauche et pgcd à droite sont définis symétriquement. On note  $v \succ u$  si  $u$  est un diviseur à droite de  $v$ .

Quelques hypothèses supplémentaires sur les monoïdes permettent d'assurer l'unicité des ppcm quand ils existent.

**Définition 1.7.** *Un monoïde  $M$  est dit simplifiable à gauche (respectivement à droite) si pour tous  $u, v$  et  $w$  de  $M$ ,  $uv = uw$  (respectivement  $vu = wu$ ) implique  $v = w$ .*

**Définition 1.8.** *Un monoïde  $M$  est dit conique si, pour tous  $u$  et  $v$  de  $M$ ,  $uv = 1$  entraîne  $u = v = 1$ .*

En particulier, un monoïde atomique est conique. Dans un monoïde  $M$  simplifiable à gauche (*resp.* à droite) et conique, la relation «être un diviseur à gauche» est un ordre partiel sur  $M$  et les ppcm à droite et pgcd à gauche (*resp.* ppcm à gauche et pgcd à droite) sont uniques quand ils existent. En effet, supposons que  $u$  et  $v$  admettent  $w$  et  $w'$  comme ppcm alors  $w = w'x$  et  $w' = wy$  pour des éléments  $x$  et  $y$  de  $M$  d'où  $w = wyx$ . Or, on a supposé que  $M$  est simplifiable à gauche, ce qui implique  $yx = 1$  et donc  $x = y = 1$  car  $M$  est conique.

## 1.2 Les POSET et la fonction de Möbius

Je rappelle dans cette partie les notions sur les POSET et la fonction de Möbius utilisées dans la suite du chapitre. Pour un exposé plus complet, on pourra se rapporter au chapitre 3 de [Sta97].

### 1.2.1 Quelques rappels sur les POSET

**Définition 1.9.** *Un ensemble partiellement ordonné ou POSET (pour partially ordered set) est la donnée d'un couple  $(P, \leq)$ , où  $P$  est un ensemble et  $\leq$  est un ordre (partiel) défini sur  $P$ , c'est-à-dire une relation binaire qui est :*

- (i) *réflexive, i.e.  $x \leq x$  pour tout  $x$  de  $P$ ,*
- (ii) *antisymétrique, i.e. si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$  pour tout  $x, y$  de  $P$ ,*
- (iii) *transitive, i.e. si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$  pour tout  $x, y, z$  de  $P$ .*

On note  $x < y$  si  $x \leq y$  et  $x \neq y$ . Par abus de notation, on confond souvent l'ensemble  $P$  avec le POSET  $(P, \leq)$ . Dans toute cette partie,  $P$  désignera un POSET et  $\leq$  la relation d'ordre dont il est muni.

Soient  $x \leq y$  deux éléments d'un POSET  $P$ , on définit l'intervalle  $[x, y]$  comme l'ensemble  $\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ . L'intervalle  $[x, x]$  est par définition égal au singleton  $\{x\}$ . Un POSET dont tous les intervalles sont finis est dit *localement fini*.

*Exemple 1.10.* • Soit  $S$  un ensemble fini et  $\mathcal{P}$  l'ensemble de ses parties,  $\mathcal{P}$  muni de l'inclusion est un exemple classique de POSET localement fini.

• Un monoïde présenté par générateurs et relations et simplifiable à gauche est un POSET pour la divisibilité à gauche.

Soient  $x, y \in P$  on dit que  $y$  recouvre  $x$  si et seulement si  $x < y$  et il n'existe aucun  $z \in P$  tel que  $x < z < y$ . Un POSET fini (et plus généralement localement fini) est complètement caractérisé par la donnée de ses recouvrements.

Le *diagramme de Hasse* d'un POSET est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $P$  et dans lequel il existe un arc de  $x$  vers  $y$  si et seulement si  $y$  recouvre  $x$ . Quand on représente un diagramme de Hasse, on omet souvent de dessiner les orientations des arcs en adoptant la convention qu'ils sont dirigés vers le haut. On a représenté sur la figure 1.1 les diagrammes de Hasse des POSET à 4 éléments.

On introduit à présent la classe importante de POSET que sont les *treillis*. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un POSET  $P$ , on appelle un *majorant commun* de  $x$  et de  $y$  un élément  $z$  tel que  $x \leq z$  et  $y \leq z$ . Un *plus petit majorant commun* de  $x$  et de  $y$  est un majorant commun  $z$  tel que tout autre majorant commun  $w$  de  $x$  et de  $y$  vérifie  $z \leq w$ . Un plus

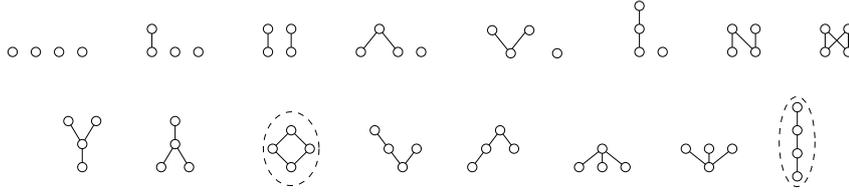


Fig. 1.1 – Les diagrammes de Hasse des POSET à 4 éléments. Les diagrammes entourés sont ceux qui correspondent à des treillis.

petit majorant commun, s’il existe, est clairement unique, on le note  $x \vee y$ . De manière symétrique, on définit, quand ils existent, un *minorant commun* et le *plus petit minorant commun* de  $x$  et de  $y$  et qu’on note  $x \wedge y$ .

**Définition 1.11.** *Un treillis  $L$  est un POSET dans lequel toute paire d’éléments admet un plus petit majorant commun et un plus grand minorant commun.*

Il est clair qu’un treillis fini possède un plus petit élément, noté  $\hat{0}$  et un plus grand élément, noté  $\hat{1}$ . Les treillis à 4 éléments sont représentés sur la figure 1.1.

Un *atome* d’un treillis fini  $L$  est un élément qui recouvre  $\hat{0}$  et  $L$  est dit *atomique* si tout élément de  $L$  est le plus petit majorant commun d’un ensemble d’atomes.

Un treillis  $L$  est dit *distributif* si pour tous  $x, y, z \in L$ , les propriétés (équivalentes) suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

### 1.2.2 Autour de la fonction de Möbius

On ne rappelle dans cette partie que la définition de la fonction de Möbius sur un POSET ainsi que quelques résultats autour de l’inversion de Möbius, de bonnes références sur ce sujet sont [Sta97, chap. 3], [Rot64] et [CF69, chap. 3].

**Définition 1.12.** *Soit  $P$  un POSET localement fini, on appelle fonction de Möbius  $\mu$  de  $P$ , la fonction définie de manière récursive par :*

$$\mu(x, x) = 1, \text{ pour tout } x \in P, \tag{1.3}$$

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), \text{ pour tout } x < y \text{ de } P \tag{1.4}$$

L’intérêt principal de la fonction de Möbius réside dans la formule d’inversion de Möbius :

**Proposition 1.13 (Formule d’inversion de Möbius).** *Soit  $P$  un POSET, tel que pour chacun de ses éléments  $x$ , l’ensemble  $V_x = \{y \mid y \leq x\}$  est fini. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $P$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors :*

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y), \text{ pour tout } x \in P,$$

*si et seulement si*

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x) \text{ pour tout } x \in P.$$

La formule d'inversion de Möbius est en fait un résultat élémentaire d'algèbre linéaire, son intérêt réside dans ses nombreuses applications qui permettent d'obtenir des résultats qui sont tout sauf élémentaires.

La difficulté principale pour pouvoir appliquer la formule d'inversion de Möbius repose souvent sur le calcul même de  $\mu$ . La proposition suivante permet de donner un outil souvent efficace en pratique pour calculer la fonction de Möbius.

**Proposition 1.14.** *Soit  $P$  un POSET fini et soient  $x < y$  deux éléments de  $P$ . On note  $c_i$  le nombre de chaînes  $x = x_0 < x_1 < \dots < x_i = y$  de longueur  $i$  entre  $x$  et  $y$  (par définition  $c_0 = 0$  et  $c_1 = 1$ ). Alors :*

$$\mu(x, y) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots.$$

D'autres méthodes plus sophistiquées existent pour calculer la fonction de Möbius pour des POSET FINIS. On pense par exemple au *cross-cut theorem* de Rota ([Rot64]), ou aux résultats de Blass et Sagan [BS97] et sur l'utilisation de NBB bases (voir section 5.5).

*Remarque 1.15.* Soit  $P$  un POSET muni d'un  $\hat{0}$ , il est souvent suffisant dans les applications de ne calculer que la valeur de la fonction de Möbius entre  $\hat{0}$  et les éléments de  $P$ . C'est pourquoi on pourra trouver des références où la fonction de Möbius  $\mu_P$  d'un POSET  $P$  (muni d'un  $\hat{0}$ ) est définie, pour  $x \in P$ , par  $\mu_P(x) = \mu(\hat{0}, x)$ .

Soit  $M$  un monoïde atomique et simplifiable à gauche. Dans ce cas, la relation  $\prec$  munit  $M$  d'une structure de POSET qui admet  $1$  (le neutre de  $M$ ) comme élément minimal. Soient  $x \prec y$  deux éléments de  $M$ , les intervalles  $[x, y]$  et  $[1, x^{-1}y]$  sont isomorphes, puisque  $M$  est simplifiable à gauche. Ceci entraîne que  $\mu(x, y) = \mu(1, x^{-1}y)$ . Dans ce cas, le calcul de la fonction de Möbius est donc équivalent au calcul de  $\mu(1, x)$ , pour tout  $x \in M$ . Dans ce contexte, l'inversion de Möbius peut être un outil pour la combinatoire des monoïdes :

**Proposition 1.16.** *Soit  $M$  un monoïde atomique et simplifiable à gauche. On pose  $\mu_M(x) = \mu(1, x)$ , où  $\mu$  désigne la fonction de Möbius sur  $M$ . Dans  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$ , on a :*

$$\left( \sum_{m \in M} \mu_M(m) m \right) \left( \sum_{m \in M} m \right) = 1. \quad (1.5)$$

*Démonstration.* Déjà, la fonction de Möbius de  $M$  est bien définie car la relation  $\prec$  munit  $M$  d'une structure de POSET (c.f. section 1.1.5).

Dans  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m_1} \mu_M(m_1)m_1\right)\left(\sum_{m_2} m_2\right) &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mu_M(m_1)m_1m_2 \\ &= \sum_m \left(\sum_{m_1m_2=m} \mu_M(m_1)\right)m \\ &= 1, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une application directe de l'inversion de Möbius. En effet, si on définit deux fonctions  $f$  et  $g$  par  $f = \mu_M$  et  $g(m) = 1$  si et seulement si  $m = 1$ , alors d'après la définition de la fonction de Möbius :

$$f(m) = \sum_{m_1 \preceq m} g(m_1)\mu(m_1, m) \text{ pour tout } m \in M.$$

En appliquant la proposition 1.13 aux fonctions  $f$  et  $g$ , on obtient alors

$$\delta_{1,m} = \sum_{m_1 \preceq m} \mu_M(m_1) = \sum_{m_1m_2=m} \mu_M(m_1)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker, ce qui permet de conclure. □

## 2 Monoïde des empilements de pièces

Je présente dans cette partie la théorie d'empilements de pièces due à Viennot ([Vie86]). Je reprends la description sous forme de POSET donnée par Krattenthaler dans [Kra00].

### 2.1 Empilements de pièces

De manière informelle, un *empilement* est ce qu'on imagine. On considère un ensemble de « pièces », notées  $b_1, b_2, \dots$  qu'on place les unes au-dessus des autres, éventuellement en les décalant horizontalement comme sur la figure 1.2, la même pièce pouvant apparaître plusieurs fois dans l'empilement. On imagine que les pièces tombent verticalement (l'empilement représenté sur la figure 1.2 est donc stable en ce sens). On voit alors que certaines paires de pièces vont être en concurrence ( $b_1$  et  $b_4$  dans l'exemple donné), tandis que d'autres n'interagissent pas (par exemple  $b_1$  et  $b_6$ ). Au niveau de l'empilement, la pièce  $b_4$  est nécessairement tombée avant la pièce  $b_1$ . En revanche, on ne peut rien dire sur les ordres d'arrivée respectifs de  $b_1$  et  $b_6$ . Il existe plusieurs façons de formaliser ces

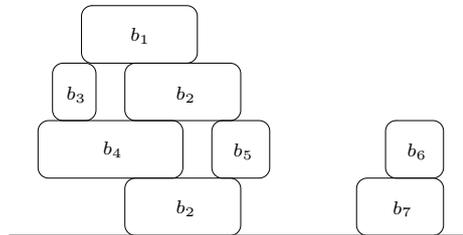


Fig. 1.2 – Un exemple d'empilement de pièces

remarques intuitives. Je présente ici un empilement comme un ensemble partiellement ordonné.

On définit le *squelette* d'un empilement en remplaçant chaque pièce par un sommet et en ajoutant un arc du sommet  $u$  au sommet  $v$  si et seulement si la pièce représentée par  $v$  repose sur  $u$ . Le squelette de l'empilement de la figure 1.2 est représenté sur la figure 1.3. Un squelette est en fait le diagramme de Hasse d'un POSET étiqueté.

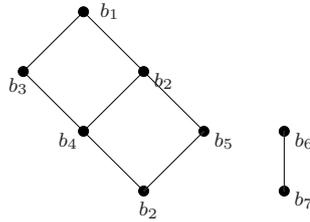


Fig. 1.3 – Squelette de l'empilement de la figure 1.2

On peut maintenant donner une définition rigoureuse des empilements.

**Définition 1.17.** Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble (de pièces) muni d'une relation binaire symétrique et réflexive  $\mathcal{R}$ . Un empilement est un triplet  $(P, \preceq, \ell)$  tel que  $(P, \preceq)$  est un POSET et  $\ell$  est un étiquetage des éléments de  $P$  par des éléments de  $\mathcal{B}$ , tel que :

- (i) Si  $x, y \in P$  et  $\ell(x)\mathcal{R}\ell(y)$ , alors soit  $x \preceq y$ , soit  $y \preceq x$ .
- (ii) La relation  $\preceq$  est la clôture transitive de la relation  $\mathcal{R}$ .

*Remarque 1.18.* En termes de pièces,  $\ell(x)\mathcal{R}\ell(y)$  traduit le fait que  $x$  et  $y$  sont en concurrence. La propriété (i) illustre donc que, dans un empilement, on saura déterminer dans ce cas si  $x$  est tombé avant ou après  $y$ .

Pour l'empilement représenté sur la figure 1.2, l'ensemble  $\mathcal{R}$  est constitué des relations suivantes (on omet les relations réflexives) :

$$b_1\mathcal{R}b_2, b_1\mathcal{R}b_3, b_1\mathcal{R}b_4, b_2\mathcal{R}b_4, b_2\mathcal{R}b_5, b_3\mathcal{R}b_4, b_6\mathcal{R}b_7.$$

*Exemple 1.19.* On considère l'ensemble de pièces  $\mathcal{B} = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$  muni de la relation  $\mathcal{R}$  d'équivalence, clôture transitive des relations  $d_i\mathcal{R}d_i$  et  $d_i\mathcal{R}d_{i+1}$  pour  $i \geq 1$ . On peut représenter une pièce  $d_i$  par deux points d'abscisses respectives  $i$  et  $i+1$  et reliés par une arête (voir la figure 1.4).

On appelle les pièces de  $\mathcal{B}$  des *dominos*, ces empilements sont reliés à l'énumération des animaux dirigés (c.f. section 2.4 du chapitre 2).

Les *pièces minimales* et les *pièces maximales* sont respectivement les pièces de l'empilement minimales et maximales pour l'ordre  $\preceq$ . Il est facile de voir qu'il existe au moins une pièce minimale et une pièce maximale. Géométriquement, les pièces minimales sont celles qui touchent le sol, tandis que les pièces maximales sont celles qu'on peut enlever sans toucher à d'autres pièces.

On appelle *pyramide* un empilement qui n'admet qu'une pièce minimale.

On munit l'ensemble des empilements d'une loi interne. Étant donnés deux empilements  $H_1$  et  $H_2$ , leur produit  $H_1H_2$  est défini de manière intuitive comme l'empilement

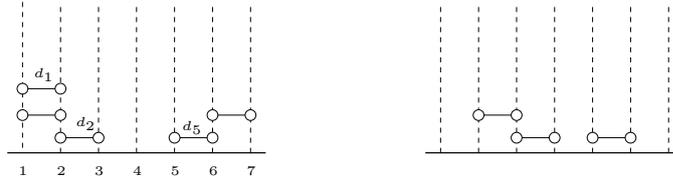


Fig. 1.4 – Deux empilements de dominos

obtenu en plaçant  $H_2$  au dessus de  $H_1$ . La formalisation de cette intuition conduit à la définition suivante (un exemple de produits de deux empilements est donné sur la figure 1.5).

**Définition 1.20.** Soient  $H_1 = (P_1, \preceq_1, \ell_1)$  et  $H_2 = (P_2, \preceq_2, \ell_2)$ . On définit le produit  $H_1 \circ H_2$  (ou plus simplement  $H_1 H_2$ ) comme l'empilement  $H_3 = (P_3, \preceq_3, \ell_3)$  où :

- (i)  $P_3 = P_1 \cup P_2$
- (ii) L'ordre partiel  $\preceq_3$  sur  $P_3$  est la clôture transitive de

$$\begin{cases} v_1 \preceq_3 v_2 & \text{si } v_1 \preceq_1 v_2 \\ v_1 \preceq_3 v_2 & \text{si } v_1 \preceq_2 v_2 \\ v_1 \preceq_3 v_2 & \text{si } v_1 \in P_1, v_2 \in P_2 \text{ et } \ell_1(v_1) \mathcal{R} \ell_2(v_2) \end{cases}$$

- (iii) Soit  $v \in P_3$  alors  $\ell_3(v) = \ell_1(v)$  (respectivement  $\ell_3(v) = \ell_2(v)$ ) si  $v \in P_1$  (respectivement  $v \in P_2$ ).

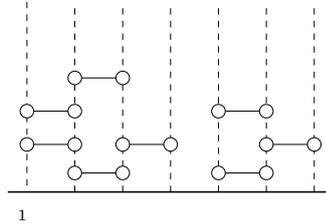


Fig. 1.5 – Le produit des deux empilements de dominos de la figure 1.4

Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble de pièces fixé muni d'une relation  $\mathcal{R}$ , on note  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , l'ensemble des empilements dont les pièces appartiennent à  $\mathcal{B}$ . Par définition, l'empilement vide, noté 1 appartient à  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , il correspond au neutre pour la loi  $\circ$  de la Définition 1.20. L'ensemble  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  muni de cette loi est un monoïde.

## 2.2 Équivalence entre empilements et monoïdes de Cartier-Foata

On donne ici la définition du *monoïde partiellement commutatif* introduit par Cartier et Foata dans [CF69] et appelé depuis *monoïde de Cartier-Foata*, puis on rappelle brièvement pourquoi les empilements tels qu'on vient de les définir sont équivalents à ces monoïdes. Ce monoïde est également connu sous le nom de *monoïde de traces*, on pourra trouver dans [Die95] un large panorama de ce monoïde et du groupe qui lui est associé (voir également la section 6.2.1, pour certains résultats sur la combinatoire du groupe).

Soit  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  un ensemble fini et  $C$  une partie de  $P \times P$  telle que  $(p_i, p_j) \in C$  entraîne  $p_i \neq p_j$  et  $(p_j, p_i) \in C$ . Le monoïde de Cartier-Foata  $L(P, C)$  est défini par la présentation de monoïde suivante:

$$L(P, C) = \langle P \mid p_i p_j = p_j p_i \text{ si et seulement si } (p_i, p_j) \in C \rangle. \quad (2.1)$$

Autrement dit, ce monoïde est constitué des classes d'équivalence de mots sur l'alphabet  $P$ , où deux mots sont équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite de relations de commutation « autorisées » (c.f. section 1.1).

Pour obtenir l'équivalence entre les empilements et les éléments d'un monoïde de Cartier-Foata, on encode les empilements par des mots sur l'alphabet  $\mathcal{B}$ .

Soit  $H = (P, \preceq, \ell)$  un empilement, on munit  $P$  d'un ordre total  $\leq$  cohérent avec  $\preceq$ , i.e. tel que  $x \preceq y$  implique  $x \leq y$  (on dit que  $\leq$  est une *extension linéaire de*  $\preceq$ ). On lit ensuite les étiquettes  $\ell(x)$  des éléments de  $P$  dans l'ordre des  $x$  croissants (pour l'ordre total  $\leq$ ), on obtient un mot sur  $\mathcal{B}$  qui code  $H$ . En général, il existe plusieurs façons de compléter l'ordre partiel  $\preceq$  en un ordre total et plusieurs mots peuvent donc coder le même empilement selon l'ordre choisi. Pour l'empilement de la figure 1.2, on peut par exemple obtenir :

$$b_2 b_7 b_4 b_5 b_6 b_3 b_2 b_1 \text{ ou } b_2 b_5 b_4 b_2 b_3 b_1 b_7 b_6.$$

On cherche naturellement à identifier les mots qui représentent les mêmes empilements. Il est en fait facile de voir que les empilements correspondent exactement aux classes d'équivalence de tels mots soumis aux relations  $xy = yx$  si et seulement si  $x \mathcal{R} y$ . En conséquence, les empilements de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  correspondent exactement aux éléments du monoïde  $L(\mathcal{B}, C)$  où  $(x, y) \in C$  si et seulement si  $x \mathcal{R} y$ .

### 2.3 Énumération d'empilements

On appelle *empilement trivial* un empilement dans lequel aucune pièce n'est en concurrence, i.e. pour toutes les pièces  $x$  et  $y$  de l'empilement  $x \mathcal{R} y$ . L'empilement « tassé » correspondant à un empilement trivial est donc de hauteur un.

**Théorème 1.21 (Viennot '86).** *Soit  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble de pièces de  $\mathcal{B}$ . Dans le monoïde  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , la somme formelle de tous les empilements dont les pièces maximales sont incluses dans  $\mathcal{M}$  est donnée par :*

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R}) \\ \text{pièces maximales} \subset \mathcal{M}}} H = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})} (-1)^{|T|} T \right)^{-1} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{M}, \mathcal{R})} (-1)^{|T|} T \right), \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  est l'ensemble des empilements triviaux formés avec des pièces de  $\mathcal{B}$ .

En particulier, la somme formelle de tous les empilements est donnée par

$$\sum_{H \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})} H = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})} (-1)^{|T|} T \right)^{-1}. \quad (2.3)$$

Le résultat (2.2) est une généralisation du résultat (2.3), déjà obtenu par Cartier et Foata (cf. équation (1) dans [CF69], Introduction, Part A), par le calcul de la fonction de Möbius de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  et l'application de l'inversion de Möbius sous sa forme donnée dans la proposition 1.16.

**Corollaire 1.22.** *En particulier, sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{F_{\mathcal{T}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{M}, \mathcal{R})}(-t)}{F_{\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})}(-t)}, \quad (2.4)$$

où  $a_n$  est le nombre d'empilements de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  de longueur  $n$  et dont les pièces maximales sont incluses dans  $\mathcal{M}$  et où  $F_M(t)$  est défini par la formule (1.2) et désigne la série génératrice de  $M$ .

*Preuve du Théorème 1.21.* La formule (2.3) étant une spécialisation de (2.2) on se contente de prouver cette dernière. En multipliant à gauche les deux membres de (2.2) par  $\sum_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})} (-1)^{|T|} T$ , on est ramené à prouver :

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R}), \\ \text{pièces maximales} \subset \mathcal{M}}} (-1)^{|T|} T \circ H = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{M}, \mathcal{R})} (-1)^{|T|} T. \quad (2.5)$$

On montre que la plupart des termes du membre de gauche de cette équation s'annulent deux à deux en construisant une involution  $\Psi$  sur les couples de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R}) \times \mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ .

On commence par munir l'ensemble des pièces  $\mathcal{B}$  d'un ordre total. Soit maintenant  $(H, T)$  un couple formé d'un empilement  $H$  de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  dont les pièces maximales sont incluses dans  $\mathcal{M}$  et d'un empilement trivial  $T$ . On considère l'ensemble des pièces minimales de  $T \circ H$  qui sont situées sous des pièces maximales de  $T \circ H$  appartenant à  $\mathcal{M}$ . On note  $b$  la plus petite (pour l'ordre total défini sur  $\mathcal{B}$ ) pièce de cet ensemble si ce dernier est non vide. On définit alors  $(H', T')$  l'image de  $(H, T)$  de la façon suivante :

$$\Psi(H, T) = (H', T') = \begin{cases} (b \circ H, T \setminus b) & \text{si } b \in T, \\ (H \setminus b, T \circ b^{-1} m) & \text{sinon (i.e. si } b \notin T). \end{cases}$$

Intuitivement, on fait circuler des pièces entre l'empilement  $T$  et l'empilement  $H$  (voir la figure 1.6) et rien ne change dans l'empilement total, i.e.  $T' \circ H' = T \circ H$ . En remarquant que  $|T| = |T'| \pm 1$ , on obtient  $(-1)^{|T'|} T' \circ H' = (-1)^{|T|} T \circ H$ .

Par ailleurs, il est facile de voir que, quand elle est définie, l'application  $\Psi$  est une involution, autrement dit  $\Psi(H', T') = (H, T)$  (en conservant les notations précédentes), sans point fixe. Cela permet de regrouper deux par deux tous les couples pour lesquels  $\Psi$  est défini. Les contributions de tous ces couples dans le terme de gauche de (2.5) vont donc s'annuler. En conséquence, le terme de gauche se réduit aux couples  $(H, T)$  pour lesquels  $\Psi$  n'est pas définie. On voit alors que ces couples sont exactement ceux pour lesquels  $H$  est l'empilement vide et  $T$  est uniquement constitué de pièces de  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{M}$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On représente sur la figure 1.6, des exemples d'application de la fonction  $\Psi$  pour le monoïde  $\langle b_1, b_2, b_3 \mid b_1 b_3 = b_3 b_1 \rangle$  muni de l'ordre total  $b_1 < b_2 < b_3$  sur les pièces, dans le cas où l'ensemble  $\mathcal{M}$  des pièces maximales autorisées est  $\{b_1, b_2\}$ .

Dans ce cas, l'ensemble des empilements triviaux est  $\{1, b_1, b_2, b_3, b_1 b_3\}$  et l'ensemble des empilements triviaux dont aucune pièce n'est incluse dans  $\mathcal{M}$  est  $\{1, b_3\}$ . La série génératrice des empilements dans ce cas est donc :

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R}) \\ \text{pièces maximales} \subset \{b_1, b_2\}}} t^{|H|} = \frac{1-t}{1-3t+t^2}$$

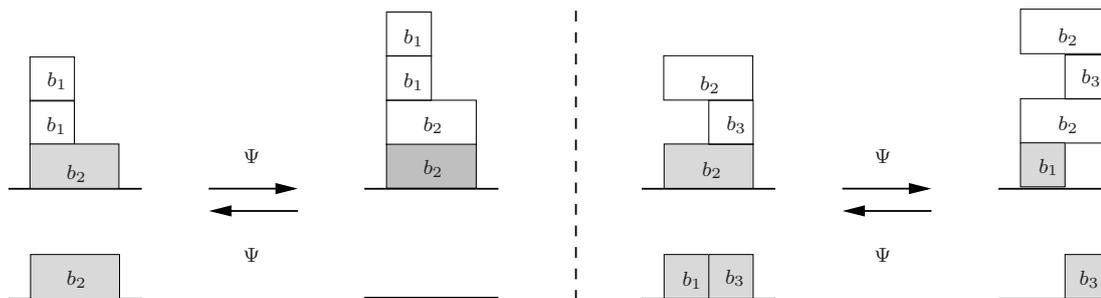


Fig. 1.6 – L’involution  $\Psi$  en action pour le monoïde  $\langle b_1, b_2, b_3 \mid b_1 b_3 = b_3 b_1 \rangle$  muni de l’ordre total  $b_1 < b_2 < b_3$  sur les pièces. L’ensemble  $\mathcal{M}$  des pièces maximales autorisées est  $\{b_1, b_2\}$ .

L’objectif de la suite de ce chapitre est d’étendre cette méthode de preuve à la classe de monoïdes la plus large possible. La plupart des résultats d’énumération qu’on obtient avaient été obtenus auparavant par des méthodes d’inclusion-exclusion. Donner une preuve bijective et plus visuelle du calcul des séries génératrices permet d’avoir une meilleure compréhension des objets qu’on manipule. Dans le cas des empilements classiques, preuve n’est plus à faire que l’approche géométrique qu’ils apportent a permis de simplifier énormément certaines preuves, voire d’obtenir de nouveaux résultats reposant sur cet aspect visuel. On pourra par exemple en trouver des illustrations pour l’énumération des animaux dirigés dans la section 2.4 du chapitre 2.

### 3 Énumération de tresses positives

La motivation initiale de ce travail était d’étendre la méthode de Viennot afin d’énumérer les tresses classiques positives (les résultats d’énumération antérieurs sont donnés dans la section 3.1). On donne dans la section 3.2 la définition d’un ensemble  $\mathcal{T}_n$  de tresses, analogue à l’ensemble des empilements triviaux. On construit ensuite une involution entre des couples formés d’une tresse de  $\mathcal{T}_n$  et d’une tresse quelconque. Ceci permet d’apparier ces couples et d’obtenir notamment la série génératrice des tresses classiques.

En fait, cette étude peut être vue comme une application directe du cadre général développé dans la section 4 et en particulier du théorème 1.28. Cependant, la construction de l’involution est un peu plus simple dans ce cas et me paraît être une bonne introduction à la preuve dans le cas général, c’est pourquoi je la détaille ici.

#### 3.1 Présentation du monoïde de tresses

Le monoïde de tresses sur  $n$  brins  $B_n^+$  est le monoïde présenté par l’ensemble de générateurs  $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  soumis aux relations suivantes :

$$B_n^+ = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle^+ \quad (3.1)$$

En termes de tresses, supposons qu’on ait numéroté  $n$  brins de 1 à  $n$ , le générateur  $\sigma_i$  correspond au croisement des brins  $i$  et  $i + 1$ , le brin  $i$  passant au-dessus. Les  $\sigma_i$  sont appelés les *générateurs d’Artin*. La représentation sous forme de tresses des relations qui apparaissent dans la présentation de  $B_4^+$  est donnée sur la figure 1.7.

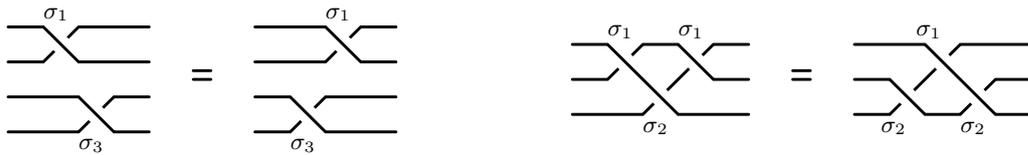


Fig. 1.7 – Représentation sous forme de tresses des relations  $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$  (à gauche) et  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$  (à droite).

Plusieurs idées ont été exploitées pour calculer la série génératrice de  $B_n^+$ . Les premières approches reposent sur l'existence pour chaque tresse d'une décomposition particulière qu'on appelle la *forme normale de Garside* (c.f. section 6.2.2). Dans [Bra91], Brazil exploite le fait que l'ensemble des formes normales forme un langage rationnel, autrement dit il est reconnaissable par un automate fini. La matrice d'adjacence de cet automate conduit directement à la série génératrice de  $B_n^+$ . Mais l'automate correspondant aux tresses sur  $n$  brins a  $n!$  états et un temps sur-exponentiel est donc nécessaire pour obtenir la série génératrice. Dans [Deh07], Dehornoy réduit le nombre d'états de l'automate à  $p(n)$  (où  $p(n)$  désigne le nombre de partitions de  $n$ ), ce qui accélère notablement le calcul.

L'avancée majeure vient des travaux de Bronfman ([Bro01]) et Krammer ([Kra05, chapitre 17]) qui obtiennent une méthode pour calculer la série génératrice en un temps linéaire en le degré de celle-ci. Leur preuve repose sur un principe d'inclusion-exclusion et est rappelée dans la section 4.2.

### 3.2 Définition d'un ensemble de tresses « triviales »

On définit l'ensemble  $\mathcal{T}_n$ , analogue pour les tresses de l'ensemble des empilements triviaux. Soient  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$  tels que  $j+i \leq n$ , on pose :

$$\delta_{\{j, j+1, \dots, j+i\}} = (\sigma_{j+i-1}) \dots (\sigma_{j+1})(\sigma_j)$$

L'élément  $\delta_{\{j, \dots, j+i\}}$  est la tresse où le brin  $j+i$  passe « derrière la tresse » jusqu'à la position  $j$  (voir la figure 1.8). On définit ensuite :

$$\Delta_{\{j, j+1, \dots, j+i\}} = \delta_{\{j, j+1\}} \cdot \delta_{\{j, j+1, j+2\}} \cdot \dots \cdot \delta_{\{j, \dots, j+i\}} \quad (3.2)$$

$$= (\sigma_j)(\sigma_{j+1}\sigma_j) \dots (\sigma_{j+i-1} \dots \sigma_{j+1}\sigma_j), \quad (3.3)$$

La tresse  $\Delta_{\{j, \dots, j+i\}}$  est le demi-tour des brins  $j, j+1, \dots, j+i$  (voir la figure 1.9).

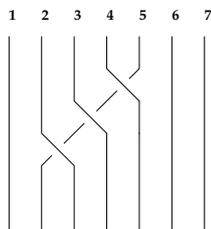


Fig. 1.8 –  $\delta_{\{2,3,4,5\}}$  in  $B_7^+$

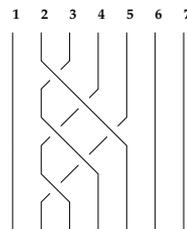


Fig. 1.9 –  $\Delta_{\{2,3,4,5\}}$  in  $B_7^+$

*Remarque 1.23.* Ces deux types de tresses sont des généralisations des tresses  $\delta_n = \delta_{\{1, \dots, n\}}$  et  $\Delta_n = \Delta_{\{1, \dots, n\}}$  qui jouent un rôle fondamental dans l'étude de la structure

de Garside des tresses (une rapide présentation des structures de Garside est donnée dans la section 4.3.3, on peut également se rapporter à [DP99] où est introduite la notion de groupe de Garside).

On définit alors l'ensemble  $\mathcal{T}_n$  comme :

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{J_1 \cup \dots \cup J_p} (\Delta_{J_1} \cdots \Delta_{J_p}) \quad (3.4)$$

où  $J_1, \dots, J_p$  sont des sous-ensembles disjoints d'entiers consécutifs de  $\{1, \dots, n\}$  ordonnés dans l'ordre croissant et tels que  $|J_i| \geq 2$  pour tout  $i$ . Lors de la manipulation des éléments de  $\mathcal{T}_n$ , il se peut que des  $J_i$  se réduisent à des singletons, on adopte dans ce cas la convention  $\Delta_{J_i} = 1$ .

Soit  $\tau : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction définie par :

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^p (|J_i| - 1) \text{ si } t = \Delta_{J_1} \cdots \Delta_{J_p}. \quad (3.5)$$

Remarquez que  $\tau(t)$  est le nombre de générateurs d'Artin différents qui servent à écrire un représentant de  $t$ .

Soit  $J = \{i, i+1, \dots, i+j\}$  un ensemble d'entiers consécutifs, on pose :

1.  $m(J) = i + j - 1$
2.  $J + 1 = J \cup \{i + j + 1\} = \{i, \dots, i + j, i + j + 1\}$
3.  $J - 1 = J \setminus \{i + j\} = \{i, \dots, i + j - 1\}$

### 3.3 Série de croissance des tresses positives

On peut maintenant donner les résultats d'énumération obtenus pour les tresses. Le théorème 1.24 apparaît implicitement dans le Chapitre 17 de [Kra05] et le corollaire 1.25 est dû à Bronfman ([Bro01]). Dans ces deux références, le résultat était obtenu par des méthodes d'inclusion-exclusion (c.f. section 4.2). Je donne ici une preuve nouvelle, avec un point de vue différent en m'inspirant des empilements de pièces.

**Théorème 1.24.** *Dans  $\mathbb{Z}\langle\langle B^+ \rangle\rangle$ , on a l'identité suivante :*

$$\left( \sum_{t \in \mathcal{T}_n} (-1)^{\tau(t)} t \right) \cdot \left( \sum_{b \in B^+} b \right) = 1 \quad (3.6)$$

Par la projection canonique  $\pi$  de  $\mathbb{Z}\langle\langle B^+ \rangle\rangle$  dans  $\mathbb{Z}[[x]]$ , définie par  $\pi(\sigma_i) = x$ , on obtient directement :

**Corollaire 1.25.** *La série de croissance du monoïde de tresse est égale à :*

$$F(x) = \sum_{b \in B^+} x^{|b|_S} = \left[ \sum_{t \in \mathcal{T}_n} (-1)^{\tau(t)} x^{|t|_S} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

La preuve du théorème 1.24 repose, comme pour les empilements, sur une involution qui permet d'apparier les couples de  $\mathcal{T} \times B^+$ . La construction de cette involution est donnée dans la section suivante, le théorème s'en déduit directement.

Soit  $F_n$  la série génératrice de  $B_n^+$ . D'après le corollaire 1.25,  $F_n = 1/D_n$  où  $D_n$  est un polynôme de degré  $n(n-1)/2$ . On ne sait pas exprimer simplement  $D_n$ , en revanche il est facile de voir que les  $D_n$  sont reliés entre eux par la relation de récurrence suivante :

$$D_n(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} t^{i(i-1)/2} D_{n-i}(t).$$

*Exemple 1.26 (Formule explicite sur 4 brins).* Les éléments de  $\mathcal{T}_4$  sont représentés sur la figure 1.10. On peut alors lire directement la valeur de  $\tau$  et leur longueur. En appliquant le corollaire 1.25, on obtient la série génératrice de  $B_4^+$  :

$$F_4(x) = \frac{1}{1 - 3x + x^2 + 2x^3 - x^6}$$

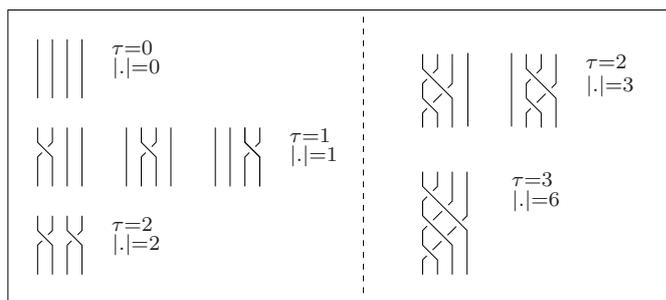


Fig. 1.10 – L'ensemble  $\mathcal{T}_4$

### 3.4 Définition d'une involution sur $\mathcal{T} \times B^+$

On construit dans cette section une involution de  $\mathcal{T} \times B^+$  dans lui-même qui n'admet que  $(1, 1)$  comme point fixe. Cela nous permettra d'apparier les éléments de  $\mathcal{T} \times B^+ \setminus \{(1, 1)\}$  et d'en déduire le théorème 1.24.

Intuitivement, cette involution est construite de manière similaire à l'involution  $\Psi$  définie pour les empilements dans la section 2.3. La différence principale repose sur le fait que l'ensemble des « pièces » qu'on s'autorise à déplacer n'est plus uniquement constitué des atomes du monoïde, mais est l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P} = \{\delta_J, J \text{ ensemble d'entiers consécutifs de } \{1, \dots, n+1\} \text{ et } |J| \geq 2\}. \quad (3.8)$$

On munit  $\mathcal{P}$  d'un ordre total, en considérant l'ordre lexicographique induit par l'ordre  $\sigma_1 < \dots < \sigma_{n-1}$  sur les générateurs.

Soit  $(g, b) \neq (1, 1)$  appartenant à  $\mathcal{T} \times B^+$ , on pose

$$p_{\min} = \min\{p \in \mathcal{P} \text{ tel que } g \succ p\} \cup \{p \prec b \text{ et } g \cdot p \in \mathcal{G}\}. \quad (3.9)$$

Assurons nous que  $p_{\min}$  est bien défini : pour  $|J| \geq 2$ ,  $\Delta_J \cdot \delta_J^{-1} = \Delta_{J-1}$ , donc si  $g \neq 1$ , il existe au moins un  $p$  satisfaisant ces conditions. Pour  $g = 1$ , tout  $\sigma$  divisant  $b$  à gauche convient, il existe donc également un  $p$  satisfaisant aux conditions, sauf si  $b = 1$  ce qui est exclu. Par ailleurs il est facile de vérifier que si  $p \neq 1$ , on ne peut avoir à la fois  $g \cdot p \in \mathcal{G}$  et  $g \succ p$ , ce qui justifie la définition suivante :

$$\Psi(g, b) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } (g, b) = (1, 1) \\ (g \cdot (p_{\min})^{-1}, p_{\min} \cdot b) & \text{si } g \succ p_{\min} \\ (g \cdot p_{\min}, (p_{\min})^{-1} \cdot b) & \text{sinon (i.e. } g \cdot p_{\min} \in \mathcal{G} \text{ et } p_{\min} \prec b). \end{cases} \quad (3.10)$$

La figure 1.11 montre quelques exemples du résultat de  $\Psi$  sur des couples de  $\mathcal{G}_5 \times B_5^+$ .

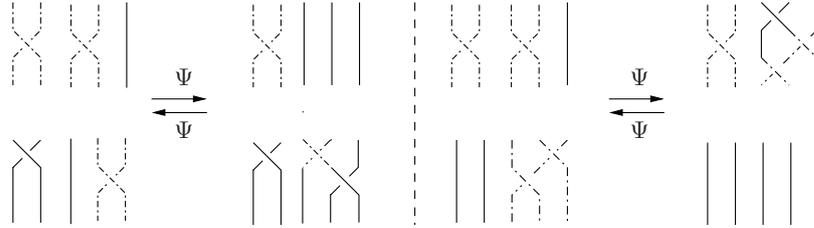


Fig. 1.11 – Exemples d'applications de  $\Psi$ . Les éléments de  $\mathcal{G}_5$  sont représentés en haut et ceux de  $\mathbb{P}_5$  en bas. Les éléments satisfaisant une des conditions de l'équation (3.9) sont représentés en pointillés.

**Lemme 1.27.** *La fonction  $\Psi$  est une involution de  $\mathcal{T} \times B^+$  dans lui-même dont l'unique point fixe est  $(1, 1)$ .*

On peut prouver ce lemme dans le cas spécifique des tresses de manière un peu fastidieuse, en travaillant au cas par cas. On préfère le voir ici comme une application du cas général traité dans la partie suivante.

## 4 Extension à une classe de monoïdes

Il s'agit dans cette section de définir les conditions minimales que doivent satisfaire les monoïdes pour pouvoir appliquer une approche de type empilement. Les conditions données ici sont inspirées de celles données par Bronfman dans [Bro01]. On suppose dans toute la suite que les monoïdes  $M$  considérés sont engendrés par un ensemble fini  $\mathcal{S}$  et satisfont les propriétés suivantes :

1.  $M$  est atomique,
2.  $M$  est simplifiable à gauche,
3. si un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  admet un multiple commun à droite, alors il admet également un ppcm à droite.

On a vu dans la section 1.1.5 que ces propriétés suffisent à assurer l'unicité d'un ppcm dès qu'il existe.

Pour pouvoir énoncer le théorème analogue au théorème 1.24 dans ce cas général, on se restreint aux ensembles de  $\mathcal{S}$  qui admettent un multiple commun et on définit :

$$\mathcal{J} = \{J \subset \mathcal{S} \mid J \text{ admet un multiple commun}\}. \quad (4.1)$$

Pour tout  $J \in \mathcal{J}$ , on note  $M_J$  l'unique ppcm de  $J$  et  $m_J$  sa longueur selon  $\mathcal{S}$ .

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que les monoïdes de Cartier-Foata et les monoïdes de tresses vérifient bien les propriétés requises et sont de plus donnés par une présentation homogène.

En effet, il est facile de voir que le monoïde de Cartier-Foata ou d'empilements de pièces vérifie ces trois propriétés. Par ailleurs, dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{J}$  est constitué des sous-ensembles de pièces qui ne sont pas en concurrence, autrement dit pour tout  $J \in \mathcal{J}$  et tout  $x, y \in J$ , on a  $x\mathcal{R}y$  (où  $\mathcal{R}$  est défini dans la section 2). Pour  $J \subset \mathcal{J}$ , le ppcm de  $J$  est simplement le produit des éléments de  $J$  et sa longueur est donc égale au cardinal de  $J$ .

Pour les monoïdes de tresses, la propriété 2 a été établie par Garside ([Gar69, Theorem 1, p.238]) et la propriété 3 est un cas particulier d'un résultat de Brieskorn et Saito ([BS72, Proposition 4.1,p.19]). De plus pour le monoïde des tresses, tous les sous-ensembles de  $S$  (où  $S$  désigne l'ensemble des générateurs d'Artin) admettent un ppcm. Plus précisément, soit  $J \subset S$ , on écrit  $J = J_1 \cup \dots \cup J_p$  où les  $J_1, \dots, J_p$  sont comme dans l'équation (3.4), alors le ppcm de  $J$  est égal à  $\Delta_{J_1} \dots \Delta_{J_p}$ .

J'énonce maintenant le théorème général de ce chapitre dans lequel j'étends l'approche combinatoire introduite par Viennot pour les empilements à la classe de monoïdes qu'on vient de définir.

**Theorem 1.28.** *Soit  $M$  un monoïde et  $\mathcal{S}$  un ensemble de générateurs vérifiant les propriétés 1, 2 et 3 définies ci-dessus. On a alors dans  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$ , l'égalité suivante :*

$$\left( \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} M_J \right) \cdot \left( \sum_{m \in M} m \right) = 1 \quad (4.2)$$

Ce théorème implique directement qu'on peut calculer la série génératrice de  $M$ .

**Corollaire 1.29 (Bronfman '01).** *Soient  $M$  et  $\mathcal{S}$  définis comme ci-dessus. On suppose également que  $M$  est présenté de manière homogène. Alors sa série de croissance est égale à :*

$$F(x) = \sum_{m \in M} x^{|m|_{\mathcal{S}}} = \left[ \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} x^{m_J} \right]^{-1} \quad (4.3)$$

*Preuve du corollaire 1.29.* Supposer que  $M$  est donné par une présentation homogène revient à dire que la fonction de longueur est additive (i.e.  $|m_1 m_2| = |m_1| + |m_2|$ ). Ceci implique que l'application  $\sum_m c_m m \mapsto \sum_m c_m t^{|m|_{\mathcal{S}}}$  est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}\langle\langle M \rangle\rangle$  dans  $\mathbb{Z}[[x]]$ , l'anneau des séries formelles à coefficients entiers. Ce morphisme est bien défini car il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de  $M$  d'une longueur fixée. On peut alors l'appliquer aux deux membres de l'équation (4.2), ce qui termine la preuve.  $\square$

#### 4.1 Preuve du théorème 1.28

Comme précédemment, la preuve repose sur la construction d'une involution  $\Psi$  sur  $(\mathcal{J} \times M) \setminus \{(\emptyset, 1)\}$ , telle que si  $(J', m') = \Psi((J, m))$  alors :

$$\begin{cases} M_J \cdot m = M_{J'} \cdot m' \\ |J| = |J'| \pm 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

*Remarque 1.30.* Cette fois, l'involution porte sur un couple (ensemble de générateurs, élément du monoïde). Pour les tresses on travaillait directement sur des couples (ppcm, élément du monoïde), mais contrairement à ce qui se passe pour les tresses, il existe des monoïdes pour lesquels des ensembles différents de générateurs admettent le même ppcm, d'où la nécessité de changer légèrement la formulation.

Soit  $J \in \mathcal{J}$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{S}_J$  des éléments  $s \in \mathcal{S}$  tels que  $s \notin J$  et  $J \cup \{s\} \in \mathcal{J}$ . Pour  $J \in \mathcal{J}$  et  $s \in \mathcal{S}_J$ , on note  $\delta_J^s$  l'unique (car  $M$  est simplifiable à gauche) élément de  $M$  tel que :

$$M_J \cdot \delta_J^s = M_{J \cup \{s\}}.$$

Soit  $(J, m) \in \mathcal{J} \times M$  tel que  $(J, m) \neq (\emptyset, 1)$ , on définit :

$$s_{\min} := \min \{J \cup \{s \in \mathcal{S}_J \mid \delta_J^s \prec m\}\}. \quad (4.5)$$

On commence par vérifier que  $s_{\min}$  est bien défini, autrement dit que l'ensemble  $J \cup \{s \in \mathcal{S}_J \mid \delta_J^s \prec m\}$  n'est jamais vide. Supposons par l'absurde qu'il le soit : ceci implique directement que  $J = \emptyset$  et donc  $\mathcal{S}_J = \mathcal{S}$ , et  $\delta_J^s = s$  pour tout générateur  $s$ . Or tout élément de  $M$  différent de l'élément neutre est nécessairement divisible par au moins un générateur, on devrait donc avoir  $m = 1$ , ce qui est exclu.

Puisque  $s_{\min}$  appartient soit à  $J$  où à  $\mathcal{S}_J$ , on peut poser :

$$\Psi(J, m) = \begin{cases} (J \setminus \{s_{\min}\}, \delta_{J \setminus \{s_{\min}\}}^{s_{\min}} \cdot m) & \text{si } s_{\min} \in J; \\ (J \cup \{s_{\min}\}, (\delta_J^{s_{\min}})^{-1} m) & \text{sinon (i.e. si } s_{\min} \in \mathcal{S}_J \text{ et } \delta_J^{s_{\min}} \prec m). \end{cases}$$

**Lemme 1.31.** *La fonction  $\Psi$  est une involution sur  $(\mathcal{J} \times M) \setminus \{(\emptyset, 1)\}$ .*

*Preuve du lemme 1.31.* Soit  $(J, m) \in \mathcal{J} \times M$ ; on pose  $(J', m') := \Psi((J, m))$ . Il est immédiat de voir que  $(J', m') \neq (\emptyset, 1)$ ; il nous faut montrer  $\Psi((J', m')) = (J, m)$ . Pour ce faire, on pose  $A := J' \cup \{s \in \mathcal{S}_{J'} \mid \delta_{J'}^s \prec m'\}$ , et  $t := \min A$ ; si on parvient à prouver que  $t = s_{\min}$ , alors la définition de  $\Psi$  permet de conclure. On traite séparément chacun des deux cas qui apparaissent dans la définition de  $\Psi$ .

On suppose d'abord que  $s_{\min} \in J$ , soit  $J' = J \setminus \{s_{\min}\}$  et  $m' = \delta_{J'}^{s_{\min}} \cdot m$ . Comme  $\delta_{J'}^{s_{\min}} \prec m'$ ,  $s_{\min} \in A$  et donc  $t \leq s_{\min}$ . Ceci entraîne donc  $t \notin J'$ , puisque  $s_{\min} < s$  pour tout  $s \in J'$  par minimalité de  $s_{\min}$ ; on a donc  $\delta_{J'}^t \prec m'$ , ce qui entraîne l'existence de  $m_2$  tel que  $\delta_{J' \setminus \{s_{\min}\}}^t \cdot m_2 = \delta_{J' \setminus \{s_{\min}\}}^{s_{\min}} \cdot m$ ; en multipliant par  $M_{J'}$  à gauche, on obtient  $M_{J' \cup \{t\}} \cdot m_2 = M_J \cdot m$ , et donc  $M_{J' \cup \{t\}} \prec M_J \cdot m$ . Puisque  $s_{\min} \in J$ , on a également  $s_{\min} \prec M_J \cdot m$ , et on obtient  $J \cup t \in \mathcal{J}$  et  $M_{J \cup \{t\}} \prec M_J \cdot m$ .

Supposons maintenant que  $t < s_{\min}$ , d'où  $t \notin J$ ; alors  $M_{J \cup \{t\}} = M_J \cdot \delta_J^t \prec M_J \cdot m$  ce qui implique  $\delta_J^t \prec m$  par simplification à gauche. Cela contredit la minimalité de  $s_{\min}$ ,

on a donc  $t = s_{\min}$ , ce qui conclut le premier cas.

On traite maintenant le second cas, à savoir  $s_{\min} \in \mathcal{S}_J$ , d'où  $J' = J \cup \{s_{\min}\}$  et  $m' = (\delta_J^{s_{\min}})^{-1} m$ . On a  $t \leq s_{\min}$  car  $s_{\min} \in J' \subset A$ . Supposons que  $t$  appartienne à  $\mathcal{S}_{J'}$ . Alors on a  $m' = \delta_{J \cup \{s_{\min}\}}^t \cdot m_1$  pour un certain  $m_1 \in M$ , et donc

$$M_J \cdot m = M_J \cdot \delta_J^{s_{\min}} \cdot \delta_{J \cup \{s_{\min}\}}^t \cdot m_1 = M_{J \cup \{s_{\min}, t\}} \cdot m_1 = M_J \cdot \delta_J^t \cdot \delta_{J \cup \{t\}}^{s_{\min}} \cdot m_1.$$

En simplifiant à gauche, cela conduit à  $\delta_J^t \prec m$ ; comme  $s_{\min}$  est minimal, on a donc  $s_{\min} < t$ , ce qui est absurde. On a donc  $t \in J' = J \cup s_{\min}$ , et  $s_{\min} \leq s$  pour tout  $s \in J$  grâce au caractère minimal de  $s_{\min}$ , et la minimalité de  $t$  entraîne  $t = s_{\min}$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

*Preuve du théorème 1.28.* Pour terminer la preuve du théorème, il suffit de voir que pour un  $m$  de  $M$  fixé, le coefficient de  $m$  dans le terme de gauche de l'équation (4.2) est égal à  $\sum_{(J, m')} (-1)^{|J|}$ , où la somme est prise sur tous les couples  $(J, m') \in \mathcal{J} \times M$  tels que  $M_J m' = m$ . Si  $m \neq 1$ , on vient de prouver que la restriction de  $\Psi$  à cet ensemble était une involution qui changeait le signe, tous les termes de la somme s'annulent donc deux à deux et le coefficient de  $m$  est nul. Si  $m = 1$ , le seul couple admissible dans la somme est  $(\emptyset, 1)$  et le coefficient de  $m$  dans ce cas est égal à 1. Le théorème est prouvé.  $\square$

## 4.2 Preuve directe du corollaire 1.29 par inclusion-exclusion

Dans [Bro01], Aaron Bronfman donne une preuve directe du corollaire 1.29. Comme, à ma connaissance, cette preuve n'apparaît pas ailleurs et que l'article de Bronfman n'a jamais été publié et est très peu diffusé, je reproduis cette preuve ici.

Soit  $S_L$  l'ensemble des éléments de  $M$  de longueur  $L$ , on pose  $N_L = |S_L|$ . On note  $A_L^{s_i}$  ou, plus simplement,  $A_L^i$ , l'ensemble des éléments de  $S_L$  divisibles à gauche par le générateur  $s_i$ . Comme  $S_L = \bigcup_i A_L^i$ , on peut calculer  $N_L$  en appliquant le principe d'inclusion-exclusion :

$$N_L = \sum_i |A_L^i| - \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} |A_L^i \cap A_L^j| + \cdots \pm |A_L^1 \cap A_L^2 \cap \cdots \cap A_L^n|, \quad (4.6)$$

ce qui peut se récrire de manière plus compacte sous la forme :

$$N_L = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_L^j \right| \quad (4.7)$$

**Lemme 1.32.** *Pour tout  $J \in \mathcal{J}$ , le cardinal de  $\bigcap_J A_L^j$  est égal à  $N_{L-m_J}$ .*

*Démonstration.* Chaque élément de  $\bigcap_J A_L^j$  est un multiple commun de  $J$  et à ce titre est divisible par  $M_J$ . Par définition, tout élément de  $\bigcap_J A_L^j$  est de longueur  $L$  et l'homogénéité implique alors que  $L \geq m_J$ .

Soit  $f$  l'application de  $S_{L-m_J}$  dans  $\bigcap_J A_L^j$  définie par  $f(w) = M_J w$ . La fonction  $f$  est injective;  $M_J w_1 = M_J w_2$  implique  $w_1 = w_2$  par simplification à gauche. La fonction  $f$  est également surjective; tout élément de  $\bigcap_J A_L^j$  peut s'écrire comme  $M_J w$  où  $|w| = L - m_J$  (on rappelle qu'on donne ici une preuve du corollaire 1.29 et donc que  $M$  est présenté de manière homogène). Les ensembles  $\bigcap_J A_L^j$  et  $S_{L-m_J}$  ont donc le même cardinal, ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

On peut maintenant remplacer  $|\bigcap_{j \in J} A_L^j|$  par  $N_{L-m_J}$  dans l'équation (4.7), et en remarquant que  $N_0 = 1$  et  $N_L = 0$  pour  $L < 0$ , on obtient :

$$\left( \sum_{L=0}^{\infty} N_L t^L \right) \left( \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} t^{m_J} \right) = 1,$$

le corollaire 1.29 en découle.

### 4.3 Quelques exemples de monoïdes

On illustre le fait que les conditions d'application du théorème 1.28 sont assez faibles en montrant qu'elles sont vérifiées par des classes importantes de monoïdes.

#### 4.3.1 Monoïdes de divisibilité

Les monoïdes de divisibilité ou *divisibility monoids* sont une généralisation naturelle des monoïdes de traces, ils ont été introduits dans [DK99, Kus01];

**Définition 1.33.** *Un monoïde de divisibilité est un monoïde atomique et simplifiable à gauche tel que deux éléments admettent un plus grand diviseur commun et tel que tout élément domine un treillis distributif.*

Pour vérifier que les monoïdes de divisibilité satisfont bien les conditions d'application du Théorème 1.28, il faut commencer par spécifier un ensemble de générateurs. On prend pour ensemble de générateurs  $S$  l'ensemble des atomes du monoïde. Il est facile de prouver que ces monoïdes vérifient la Propriété 3 donnée dans la section 4 (les propriétés 1 et 2 sont vérifiées par définition). On peut donc bien leur appliquer le théorème 1.28.

On peut de plus montrer que le corollaire 1.29 s'applique également : il est en effet prouvé dans [Kus01] que ces monoïdes admettent une présentation pour laquelle toutes les relations sont de la forme  $(ab, cd)$  où  $a, b, c, d$  sont des éléments de  $S$ .

#### 4.3.2 Monoïdes d'Artin-Tits

Les monoïdes d'Artin-Tits sont à la fois une généralisation des monoïdes de tresses et des monoïdes de traces (mais pas des monoïdes de divisibilité).

Soit  $S$  un ensemble fini, on considère une matrice symétrique  $A = (a_{s,t})_{s,t \in S}$  telle que  $a_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et  $a_{s,s} = 1$ , le *monoïde d'Artin-Tits*  $M$  associé à  $S$  et  $A$  est défini par la présentation suivante :

$$M = \langle s \in S \mid \underbrace{sts\dots}_{m_{s,t} \text{ termes}} = \underbrace{tst\dots}_{m_{s,t} \text{ termes}} \text{ si } m_{s,t} \neq \infty \rangle \quad (4.8)$$

Un monoïde d'Artin-Tits est clairement homogène, il est simplifiable à gauche et à droite (cf Michel, Proposition 2.4 de [Mic99]) et vérifie la Propriété 3 de la partie 4 (voir Brieskorn et Saito, Proposition 4.1 de [BS72]). Dans ce cas également, le théorème principal et son corollaire s'appliquent.

Le *groupe de Coxeter* associé à un monoïde d'Artin-Tits est obtenu à partir de celui-ci, en rajoutant les relations  $s^2 = 1$  pour tout  $s \in S$ . Autrement dit, le groupe de Coxeter

$Cox$  est défini par la présentation suivante :

$$Cox = \langle s \in S \mid s^2 = 1 \text{ et } \underbrace{sts\dots}_{m_{s,t} \text{ termes}} = \underbrace{tst\dots}_{m_{s,t} \text{ termes}} \text{ si } m_{s,t} \neq \infty \rangle.$$

On appelle *monoïde d'Artin-Tits sphérique* un monoïde d'Artin-Tits dont le groupe de Coxeter associé est fini.

Par exemple le groupe de Coxeter associé au monoïde de tresses  $B_n^+$  est le groupe des permutations à  $n$  éléments (voir également la remarque 1.48), le monoïde de tresses est donc sphérique.

Les seuls monoïdes de traces sphériques sont ceux dont tous les éléments commutent.

Plus généralement, on peut remarquer que les monoïdes d'Artin-Tits sphériques sont exactement ceux pour lesquels tout ensemble de générateurs admet un ppcm. Dans le théorème 1.28 et le corollaire 1.29, l'ensemble  $\mathcal{J}$  est donc égal à l'ensemble des parties de  $S$ .

### 4.3.3 Monoïdes de Garside

Dans [DP99], Dehornoy et Paris introduisent une généralisation des monoïdes d'Artin-Tits sphériques de la façon suivante :

**Définition 1.34.** *Un monoïde de Garside est un monoïde  $M$  atomique, simplifiable et tel que deux éléments admettent un ppcm à gauche et à droite. On impose de plus que  $M$  admette un élément de Garside, c'est-à-dire un élément dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident, sont en un nombre fini et forment une partie génératrice de  $M$ .*

A l'origine, dans [DP99], les monoïdes vérifiant les conditions ci-dessus sont appelés «small Gaussian», tandis que les monoïdes de Garside désignent une classe plus particulière de monoïdes. Aujourd'hui la terminologie semble s'être stabilisée autour de la définition 1.34. L'élément de Garside d'un monoïde est noté  $\Delta$  dans la suite.

Comme pour les monoïdes de divisibilité (section 4.3.1), pour appliquer le théorème 1.28 aux monoïdes de Garside il faut préciser l'ensemble de générateurs. On définit  $S$  comme l'ensemble (fini, par définition d'un monoïde atomique) des atomes (c.f. Définition 1.6) de  $M$ . Un monoïde de Garside muni de l'ensemble  $S$  vérifie donc bien les conditions du théorème principal.

De plus, comme tous les éléments d'un monoïde de Garside admettent un ppcm, l'ensemble  $\mathcal{J}$  (défini par (4.1)) qui apparaît dans le théorème 1.28 et le corollaire 1.29 est l'ensemble des parties de  $S$ .

## 5 Application aux monoïdes de tresses duaux

Dans [BKL98], Birman, Ko et Lee donnent une nouvelle présentation du groupe de tresses. Au lieu de considérer comme ensemble de générateurs l'ensemble des croisements de deux brins voisins, ils considèrent l'ensemble des croisements de deux brins quelconques. En modifiant les relations entre générateurs en conséquence, ils obtiennent ainsi une nouvelle présentation du groupe de tresses. Si, en revanche, on considère cette présentation comme une présentation de monoïde, cela induit un monoïde de tresse que l'on appelle *dual*, qu'on note  $B_n^{+*}$ , et qui est différent de  $B_n^+$  (en fait  $B_n^+$  est strictement inclus dans  $B_n^{+*}$ ). Je présente dans cette section un travail effectué en collaboration avec Philippe Nadeau pour calculer la série génératrice de  $B_n^{+*}$ .

### 5.1 Présentation de $B_n^{+*}$

Le monoïde de tresses dual  $B_n^{+*}$  est présenté par l'ensemble de générateurs :

$$\Sigma_n = \{\sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} \equiv \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} \equiv \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u, \quad (5.2)$$

où  $<_s$  désigne l'ordre total sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :  $s <_s s+1 <_s s+2 <_s \dots <_s s-1$ . Ces relations apparaissent naturellement, si on imagine les tresses sur un cylindre. Un exemple de l'interprétation en termes de tresses « physiques » de la relation (5.2) est donné sur la figure 1.12, la relation de commutation (5.1) traduit simplement le fait que les croisements de brins « éloignés » commutent.

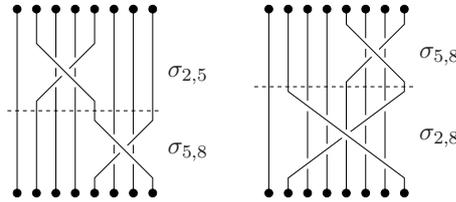


Fig. 1.12 – Illustration de la relation  $\sigma_{2,5} \sigma_{5,8} = \sigma_{5,8} \sigma_{2,8}$  sous forme de tresses.

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.35.** *La série génératrice  $F_n$  de  $B_n^{+*}$  est égale à :*

$$F_n(t) = \sum_{b \in B_n^{+*}} t^{|b|_{\Sigma_n}} = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right]^{-1}. \quad (5.3)$$

Ce résultat était conjecturé, mais non prouvé, par Krammer ([Kra05, p.72]).

D'après [BKL98], le monoïde  $B_n^{+*}$  est un monoïde de Garside dont l'ensemble des atomes est  $\Sigma_n$ . Muni de l'ensemble de générateurs  $\Sigma_n$ , il vérifie donc d'après la section 4.3.3 les conditions d'application du théorème 1.28. Par ailleurs les relations (5.1) et (5.2) étant homogènes, on peut appliquer le corollaire 1.29 à  $B_n^{+*}$ , ce qui donne :

$$F_n(t) = \left[ \sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} t^{|m_J|} \right]^{-1}. \quad (5.4)$$

Prouver le théorème 1.35 se ramène donc à établir l'égalité :

$$\sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} t^{|m_J|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \quad (5.5)$$

## 5.2 Un peu d'arithmétique dans $B_n^{+*}$

Pour établir l'égalité (5.5), un peu d'arithmétique dans  $B_n^{+*}$  est nécessaire : on donne dans cette partie une expression de  $M_J$  et de  $m_J$  pour tout sous-ensemble  $J$  de  $\Sigma_n$ .

Un théorème de [BKL98] affirme que le monoïde de  $B_n^{+*}$  a une structure de Garside et que son élément de Garside est  $\delta = \sigma_{1,2} \sigma_{2,3} \dots \sigma_{n-2,n-1}$ . Il est également établi que les diviseurs de  $\delta_n$  sont en bijection avec les partitions non-croisées de  $\{1, \dots, n\}$ . De ces résultats, on montre facilement que pour  $J \subset \Sigma_n$ , le ppcm de  $J$  peut être calculé comme suit.

Soit  $J$  un sous-ensemble de  $\Sigma_n$ , on définit la relation d'équivalence  $\equiv_J$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  comme la clôture transitive des relations suivantes :

- $s \equiv_J t$  si  $\sigma_{s,t} \in J$ ;
- si  $s \equiv_J t$  et  $u \equiv_J v$  avec  $s < u \leq t < v$ , alors  $t \equiv_J u$ .

Les classes d'équivalence de  $\equiv_J$  forment une partition  $P_J = (A_1, \dots, A_{|P_J|})$  de  $\{1, \dots, n\}$  (les  $A_i$  désignent les parties de cette partition et  $|P_J|$  leur nombre). Pour  $i \in \{1, \dots, |P_J|\}$ , on note  $a_1^i < \dots < a_{k_i}^i$  les éléments de  $A_i$ , le ppcm de  $J$  est alors donné par :

$$M_J = \prod_{i=1}^{|P_J|} \left( \prod_{j=1}^{k_i-1} \sigma_{a_j^i, a_{j+1}^i} \cdot \right) \quad (5.6)$$

Ce qui conduit à  $m_J = n - |P_J|$ , ce qu'on appelle le *poids* de  $J$  dans la suite.

*Remarque 1.36.* Soit  $\pi$  une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  on note  $(A_1, \dots, A_p)$  la décomposition en parties. On dit que  $\pi$  est une *partition non-croisée* s'il n'existe pas  $i, k \in A$  et  $j, l \in B$  où  $A$  et  $B$  sont deux parties distinctes de  $\pi$  et tels que  $i < j < k < l$ . On note  $NC(n)$  l'ensemble des partitions non-croisées sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Soit maintenant  $J \subset \Sigma_n$ , la définition de la partition  $P_J$  associée à  $J$  implique immédiatement que  $P_J$  est une partition non-croisée. De plus,  $M_J$  ne dépend de  $J$  que par la donnée de  $P_J$ , on peut donc plonger de manière injective l'ensemble  $\mathcal{G} := \{M_J, \text{ où } J \subset \Sigma_n\}$  dans l'ensemble  $NC(n)$ . Réciproquement, il est immédiat de voir qu'à toute partition  $\pi$  non-croisée, il correspond au moins un sous-ensemble  $J$  de  $\Sigma_n$  tel que  $P_J = \pi$ . Cela fournit donc une bijection naturelle entre les ensembles  $\mathcal{G}$  et  $NC(n)$ .

La preuve de la formule (5.5) se ramène donc à prouver la proposition suivante :

**Proposition 1.37.** Soient  $n, k$  deux entiers, la somme  $\sum_{J} (-1)^{|J|}$  portant sur tous les  $J \subset \Sigma_n$  de poids  $k$  est égale à

$$(-1)^k \frac{(n-1+k)!}{(n-1-k)!k!(k+1)!}$$

Pour établir ce résultat, on interprète les sous-ensembles de  $\Sigma_n$  comme des configurations d'arcs : on considère  $n$  sommets étiquetés de 1 à  $n$ , on associe à un sous-ensemble fixé  $J$  de  $\Sigma_n$  l'ensemble des arcs  $(s, t)$  tels que  $\sigma_{s,t}$  appartienne à  $J$ . Comme  $\sigma_{s,t} = \sigma_{t,s}$  pour tous  $s, t \in \{1, \dots, n\}$ , si l'arc  $(s, t)$  appartient à la configuration, l'arc  $(t, s)$  également. Dans la suite, on pourra oublier l'orientation et on préférera parler de configurations d'arêtes (non-orientées par définition), à défaut d'une notation plus adaptée on notera  $(i, j)$  une arête entre  $i$  et  $j$ .

La configuration d'arêtes associée à l'ensemble  $J = \{\sigma_{1,10}, \sigma_{2,3}, \sigma_{2,6}, \sigma_{5,7}, \sigma_{8,9}, \sigma_{9,10}\}$  est représentée sur la figure 1.13. Pour cette configuration, la partition induite est  $P_J = \{\{1, 8, 9, 10\}, \{2, 3, 5, 6, 7\}, \{4\}\}$ , d'où on déduit que  $J$  est de poids  $10 - 3 = 7$ .

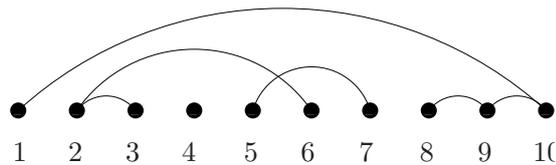


Fig. 1.13 – La configuration d'arêtes associée à l'ensemble  $J = \{\sigma_{1,10}, \sigma_{2,3}, \sigma_{2,6}, \sigma_{3,6}, \sigma_{5,7}, \sigma_{8,9}, \sigma_{9,10}\}$

Dans la section suivante, la construction d'une involution sur les configurations d'arêtes permet de voir que de nombreux termes de la somme  $\sum_J (-1)^{|J|}$  de la proposition 1.37 s'annulent deux à deux et qu'on peut se ramener ainsi à sommer uniquement sur certaines configurations  $J$  qui sont toutes de cardinal  $k$ . Il restera à énumérer ces configurations, ce que nous ferons dans la section 5.4.

### 5.3 Des configurations d'arêtes aux forêts alternantes non-croisées

**Définition 1.38.** Une forêt alternante non-croisée (ou FANC) sur  $n$  points est un ensemble d'arêtes sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que deux arêtes ne se croisent jamais et que toutes les arêtes issues d'un sommet aillent dans la même direction (i.e : il n'existe pas deux arêtes  $(i, j)$  et  $(j, k)$  avec  $i < j < k$ ). Un exemple de FANC est donné sur la figure 1.14.

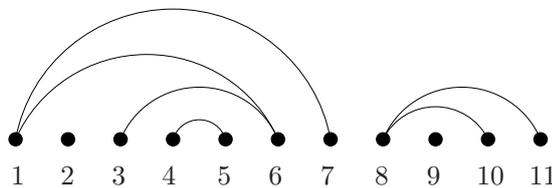


Fig. 1.14 – Une forêt alternante non-croisée sur 11 sommets et à 6 arêtes

Une petite remarque sur la terminologie : une FANC ne contient aucun cycle (l'existence d'un cycle implique nécessairement l'existence de deux arêtes  $(i, k)$  et  $(j, l)$  avec  $i < j \leq k < l$ , ce qui est exclu par définition). En tant que graphe, une FANC est donc bien une forêt. On en déduit classiquement qu'une FANC à  $n$  sommets et à  $k$  arêtes possède  $n - k$  composantes connexes.

On interprète maintenant une FANC  $F$  comme la configuration d'arêtes associée à un sous-ensemble  $J$  de  $\Sigma_n$ . La définition d'une FANC implique facilement que deux sommets  $i$  et  $j$  de  $F$  appartiennent à la même composante connexe de  $F$  si et seulement si  $i \equiv_J j$ , où  $\equiv_J$  est la relation d'équivalence définie à la section 5.2. Il existe donc une bijection entre les parties de  $P_J$  et les composantes connexes de  $F$ . En tant que configuration d'arêtes, le poids d'une FANC à  $k$  arêtes est donc égal à  $k$ .

La FANC représentée sur la figure 1.14 induit la partition

$$\{1, 3, 6, 7\}, \{2\}, \{4, 5\}, \{8, 10, 11\}, \{9\}$$

à 5 parties de  $\{1, \dots, 11\}$ . Son poids comme configuration d'arêtes est donc égal à  $11 - 5 = 6$ , ce qui est bien son nombre d'arêtes.

L'objet de cette section est d'établir la proposition suivante :

**Proposition 1.39.** *Soient  $0 < k < n$  deux entiers, alors la somme  $\sum_J (-1)^{|J|}$  sur tous les  $J \subset \Sigma_n$  de poids  $k$  est égale à  $(-1)^k$  fois le nombre de FANCs sur  $n$  sommets et à  $k$  arêtes.*

Autrement dit, cela revient à montrer que les contributions des  $J$  dont la configuration d'arêtes n'est pas une FANC s'annulent.

*Démonstration.* Soit  $J$  une configuration d'arêtes sur  $n$  sommets  $n \geq 1$ , supposons que  $J$  ne soit pas une FANC. Cela implique qu'il existe :

- soit un croisement entre deux arêtes : autrement dit, il existe  $s < t < u < v$  tels que  $(s, u)$  et  $(t, v)$  soient des arêtes de  $J$ ,
- soit un sommet pour lequel deux arêtes partent dans des directions différentes : autrement dit, il existe  $s < t < u$  tels que  $(s, t)$  et  $(t, u)$  soient des arêtes de  $J$ .

Il se peut bien sûr que ces deux cas coexistent, dans la configuration représentée sur la figure 1.15, il y a à la fois un croisement entre les arêtes  $(2, 6)$  et  $(5, 7)$  et les deux arêtes  $(8, 9)$  et  $(9, 10)$  sont issues du sommet 9 et vont dans des directions différentes.

Les deux cas qu'on vient d'énoncer peuvent être synthétisés : une configuration d'arêtes  $J$  n'est pas une FANC si et seulement s'il existe des arêtes  $(s, u)$  et  $(t, v)$  entre des sommets  $s < t \leq u < v$ , on dit dans ce cas que  $J$  est une *mauvaise configuration*.

On construit à présent une involution sur les mauvaises configurations. Soit  $J$  une mauvaise configuration, par définition  $J$  contient deux arêtes  $(s, t)$  et  $(u, v)$  telles que  $s < u \leq t < v$ . On choisit maintenant une telle paire d'arêtes de manière à ce que  $s$  soit minimal et  $v$  soit minimal pour ce choix de  $s$ . On définit une nouvelle configuration  $J'$  de la façon suivante :

- $J' := J \cup \{(s, v)\}$  si  $(s, v)$  n'appartient pas à  $J$ ;
- $J' := J \setminus \{(s, v)\}$  si  $(s, v)$  appartient à  $J$ .

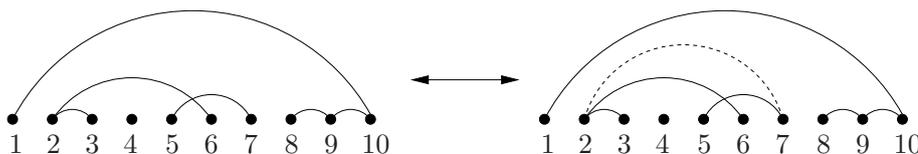


Fig. 1.15 – L'involution sur les mauvaises configurations.

Comme illustré sur la figure 1.15, on voit facilement que la fonction  $J \mapsto J'$  est une involution sans point fixe sur l'ensemble des mauvaises configurations. De plus, le poids des configurations est préservé par cette opération ; par construction  $P_J = P_{J'}$  et les signes de  $(-1)^{|J|}$  et de  $(-1)^{|J'|}$  sont opposés puisqu'une des configurations possède exactement une arête de plus que l'autre. Les contributions des mauvaises configurations s'annulent donc deux à deux dans la somme de la proposition 1.37, ce qui termine la preuve.  $\square$

Il nous reste donc à énumérer les FANC pour terminer la preuve de la proposition 1.37, c'est ce que nous faisons dans la prochaine partie.

## 5.4 Forêts alternantes-non croisées et arbres unaires-binaires

**Définition 1.40.** On appelle arbre unaire-binaire un arbre planaire enraciné dont chaque nœud a 0, 1 ou 2 fils (cela correspond à un arbre planaire  $t$  tel que défini dans la définition 3.5 du chapitre 1 avec  $c_u(t) \in \{0, 1, 2\}$  pour tout nœud  $u$  de  $t$ ).

On appelle respectivement nœud unaire et nœud binaire, les nœuds de l'arbre ayant respectivement un et deux fils.

Le résultat principal de cette partie est le résultat suivant :

**Théorème 1.41.** Il existe une bijection explicite entre les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds ayant  $k$  nœuds binaires et les FANC sur  $n$  sommets à  $k$  arêtes.

Avant de donner la preuve du théorème, on rappelle quelques résultats sur la combinatoire des arbres unaires-binaires. Les arbres unaires-binaires à  $m$  sommets sont classiquement comptés par les nombres de Motzkin  $M_{m-1}$  (voir par exemple [Sta99]; les nombres de Motzkin ayant été introduits dans [Mot48]). On peut également obtenir le résultat d'énumération plus précis suivant (dont on donnera une preuve à la fin de cette partie).

**Proposition 1.42.** Le nombre d'arbres unaires-binaires à  $m$  nœuds dont  $p$  nœuds binaires (et donc  $p + 1$  feuilles et  $m - 2p - 1$  nœuds unaires) est égal à

$$\frac{1}{m} \binom{m}{m - 2p - 1, p, p + 1} = \frac{(m - 1)!}{(m - 2p - 1)! p! (p + 1)!}$$

Le théorème 1.41 et la proposition 1.42 entraînent directement :

**Corollaire 1.43.** Le nombre de FANCs à  $n$  sommets et  $k$  arêtes est égal à :

$$\frac{(n - 1 + k)!}{(n - 1 - k)! k! (k + 1)!}$$

Couplé à la proposition 1.39, ce corollaire termine la preuve de la proposition 1.37, qui à son tour entraîne le théorème 1.35.

*Preuve du théorème 1.41 :* Le cas particulier du théorème où  $k = n - 1$  a été traité dans [GGP97]. Dans ce cas, la forêt n'admet qu'une seule composante connexe et on obtient une bijection entre les arbres alternants non-croisés (AANC) sur  $n$  sommets et les arbres binaires à  $n$  feuilles. Ceci implique notamment que les AANCs sont comptés par les nombres de Catalan.

On rappelle cette bijection. L'AANC sur 1 sommet est envoyé sur l'arbre binaire réduit à une racine. Soit maintenant  $A$  un AANC sur  $n \geq 2$  sommets, comme  $A$  est par définition connexe, il existe un chemin qui relie 1 à  $n$ , autrement dit, il existe une suite d'arêtes

$((s_i, s_{i+1}), 0 \leq i < k)$  telle que  $s_0 = 1$ ,  $s_k = n$  et  $s_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour tout  $0 \leq i \leq k$  si  $k \geq 2$  cela contredit le fait que  $A$  soit non-croisé et alternant, donc  $k = 1$  et il existe une arête entre 1 et  $n$ . Si on supprime cette arête, on obtient deux petits AANCs dont les sommets sont respectivement  $\llbracket 1, i \rrbracket$  et  $\llbracket i+1, n \rrbracket$  (ce dernier n'est pas à proprement parler un AANC puisque ses sommets ne sont pas étiquetés par un ensemble de la forme  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , mais combinatoirement c'est un AANC). Par récurrence, on associe à chacun d'eux un arbre binaire que l'on note  $T_1$  et  $T_2$ . On crée alors un arbre en considérant un sommet racine (qui correspond à l'arête effacée) auquel on greffe comme sous-arbre gauche  $T_1$  et comme sous-arbre droit  $T_2$ .

En fait cette application établit également une correspondance bijective entre les sommets étiquetés de l'AANC et les feuilles de l'arbre binaire associé. Ainsi l'étiquetage (par les entiers de 1 à  $n$ ) des sommets de l'AANC induit un étiquetage des feuilles de l'arbre binaire associé, la bijection semble donc envoyer un AANC sur un arbre binaire étiqueté. En fait, la construction récursive de l'arbre binaire permet de s'assurer que les étiquettes sur les feuilles correspondent à leur ordre de visite dans un parcours en profondeur de l'arbre, on peut donc les oublier.

La construction réciproque est immédiate. Partant d'un arbre binaire à  $n$  feuilles, on réalise un parcours en profondeur en n'étiquetant que ses feuilles. Considérons le sous-arbre gauche (respectivement droit) de la racine, l'ensemble des étiquettes portées par ses feuilles est un intervalle  $\llbracket 1, k \rrbracket$  (respectivement  $\llbracket k+1, n \rrbracket$ ) d'entiers consécutifs, où  $1 \leq k \leq n$ . On peut réitérer cette décomposition pour obtenir l'AANC correspondant.

Un exemple illustrant cette bijection est donné sur la figure 1.16 ; on peut vérifier que les étiquettes des feuilles de l'arbre sont obtenues par un parcours en profondeur.

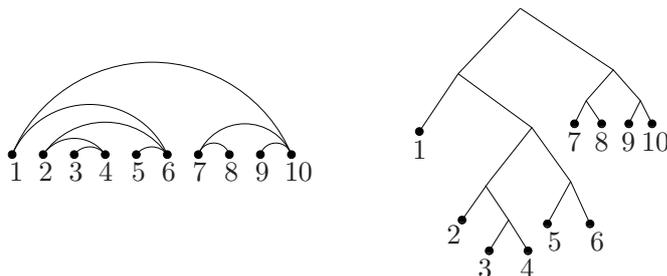


Fig. 1.16 – Bijection entre les aancs et les arbres binaires.

On traite à présent le cas d'une FANC quelconque à  $n$  sommets et  $k$  arêtes. Pour chacune de ses  $n - k$  composantes connexes (qui sont donc des AANCs), on applique la construction décrite ci-dessus, en conservant les étiquettes sur les feuilles. On obtient ainsi une collection  $C$  de  $n - k$  arbres binaires, tel que chaque entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  apparaît exactement une fois comme étiquette d'une feuille d'un de ces arbres (et chacune des feuilles est étiquetée). La somme du nombre des nœuds de chacun des arbres binaires est égale à  $n + k$  (un arbre binaire à  $l$  feuilles a  $2l - 1$  nœuds).

Si  $C$  contient au moins deux arbres, on réalise la construction suivante. Soit  $T$  l'arbre dont une feuille est étiquetée 1 et soit  $m$  l'entier maximal tel que  $\llbracket 1, m \rrbracket$  est inclus dans l'ensemble des étiquettes de  $T$ . Soit  $T'$  l'arbre contenant l'étiquette  $m + 1$ . On forme un nouvel arbre  $T_1$  en fusionnant  $T$  et  $T'$  de la manière suivante : on part de l'arbre  $T$  et on transforme la feuille étiquetée  $m$  en un nœud unaire (toujours étiqueté par  $m$ ) en lui ajoutant un fils. On greffe ensuite  $T'$  à ce fils.

On définit un nouvel ensemble  $C$ , en remplaçant les arbres  $T$  et  $T'$  par l'arbre  $T_1$ . Cet

ensemble  $C$  est maintenant une collection d'arbres unaires-binaires, telle que chaque entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  apparaît exactement une fois comme étiquette d'une feuille ou d'un nœud unaire d'un de ces arbres (et chacune des feuilles et des nœuds unaires est étiquetée). Par ailleurs, il est clair que si  $T$  est l'arbre contenant l'étiquette 1 et  $m$  est l'entier maximal tel que  $\llbracket 1, m \rrbracket$  soient des étiquettes de  $T$ , alors  $m$  est bien l'étiquette d'une feuille de  $T$ . On peut donc réitérer la construction à partir du nouvel ensemble  $C$ , jusqu'à ce que  $C$  ne contienne plus qu'un arbre. Par construction, cet arbre est un arbre unaire-binaire à  $n + k$  nœuds (on peut en effet remarquer que la somme du nombre des nœuds des arbres de  $C$  n'est pas modifiée par une itération de la construction) dont  $n - k - 1$  nœuds unaires et donc  $k + 1$  feuilles et  $k$  nœuds binaires.

Comme lors de la bijection entre les AANCS et les arbres binaires, l'arbre unaire-binaire obtenu ici paraît hériter de l'étiquetage de la FANC. En fait, on vérifie facilement à chaque étape de la construction, pour tout arbre  $T$  de l'ensemble  $C$ , les étiquettes portées par les nœuds unaires et les feuilles de  $T$  sont compatibles avec l'ordre de visite des nœuds unaires et des feuilles de l'arbre lors d'un parcours en profondeur de l'arbre (i.e. si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de l'ensemble des nœuds unaires et des feuilles de  $T$  et si  $u$  est visité avant  $v$  dans un parcours en profondeur de  $T$  alors l'étiquette de  $u$  est strictement plus petite que celle de  $v$ ). A la dernière étape de la construction, l'arbre obtenu compte  $n - k - 1$  nœuds unaires et  $k + 1$  feuilles, chacun étiqueté par des éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Les étiquettes correspondent alors à l'ordre de visite des nœuds unaires et des feuilles lors d'un parcours en profondeur, on peut donc les oublier.

On construit à présent, l'application réciproque. Etant donné un arbre unaire-binaire à  $k - 1$  nœuds unaires et  $n$  feuilles, on étiquette les nœuds unaires et les feuilles de l'arbre par leur ordre d'apparition dans un parcours en profondeur de l'arbre. On supprime alors les arêtes issues des nœuds unaires pour obtenir  $k$  arbres binaires dont les feuilles sont étiquetées. On associe à chacun d'eux l'AANC obtenu par la bijection donnée au début de la preuve. Comme les étiquettes des feuilles ont été obtenues par un parcours en profondeur, la réunion de ces AANCS forme bien une FANC (aucun croisement entre des arêtes appartenant à des AANCS différents n'apparaît). C'est la FANC recherchée.

On donne un exemple de cette bijection dans le cas  $n = 11$  et  $k = 6$  sur la figure 1.17.

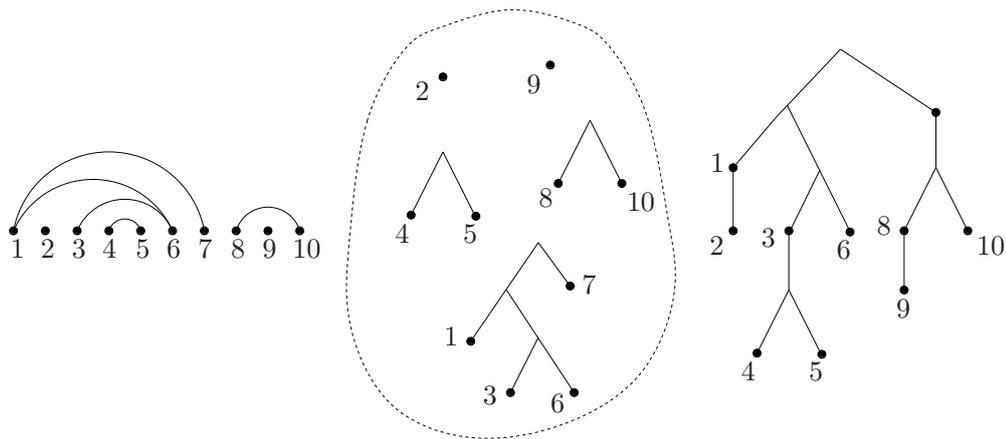


Fig. 1.17 – Bijection entre les arbres unaires-binaires et les fancs

*Preuve de la proposition 1.42.* Ce résultat découle de la bijection classique entre les arbres unaires-binaires à  $m$  sommets et les chemins de Motzkin. Les chemins de Motzkin à  $m-1$  pas sont les chemins de  $\mathbb{N}^2$  allant de  $(0,0)$  à  $(m-1,0)$  et dont les pas sont  $(1,1)$ ,  $(1,0)$  ou  $(1,-1)$ .

Pour construire l'image d'un arbre par cette bijection, on réalise un parcours en profondeur de l'arbre et on associe à chaque fils gauche (respectivement fils droit ou fils unique), un pas montant (respectivement descendant ou horizontal), comme représenté sur la figure 1.18. Les nœuds unaires de l'arbre correspondent donc aux pas horizontaux

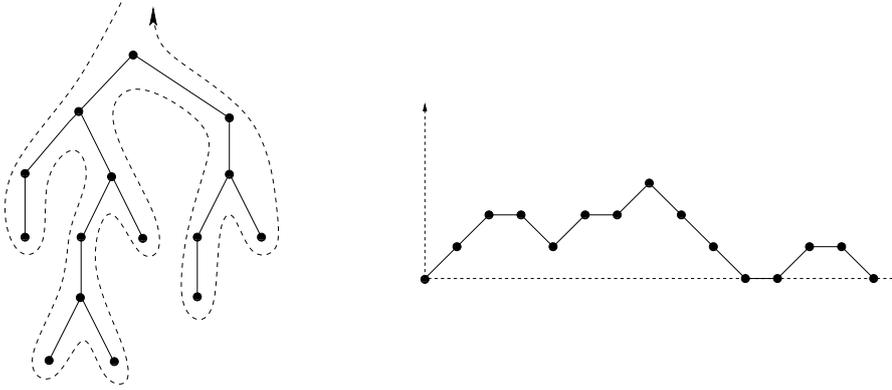


Fig. 1.18 – Un arbre unaire-binaire et le chemin de Motzkin associé

dans le chemin associé. Les chemins de Motzkin correspondant aux arbres unaires-binaires à  $m$  sommets et  $p$  sommets binaires comptent donc  $m-2p-1$  pas horizontaux,  $p$  pas montants et  $p$  pas descendants. Une application du lemme cyclique (voir par exemple [Pit06, Section 5.1]) entraîne que ces chemins sont comptés par :

$$\frac{1}{m} \binom{m}{m-2p-1, p, p+1} = \frac{(m-1)!}{(m-2p-1)!p!(p+1)!}$$

ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

On peut noter qu'on a obtenu au passage une nouvelle interprétation des nombres de Motzkin :

**Corollaire 1.44.** Les FANCS dont la somme du nombre de sommets et du nombre d'arêtes est égal à  $n+1$  sont comptées par le nombre de Motzkin  $M_n$ .

## 5.5 Où l'on retrouve la fonction de Möbius

On décrit ici comment les travaux de Rota [Rot64] permettent de réinterpréter le travail combinatoire effectué dans cette partie comme le calcul de la fonction de Möbius d'un treillis fini. Le lien entre  $B_n^{+*}$  et les partitions non-croisées de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  permet de déduire la fonction de Möbius cherchée des travaux de Kreweras [Kre72] et de Blass et Sagan [BS97].

La théorie des monoïdes de Garside implique que l'ensemble des diviseurs de  $\delta$  (où  $\delta = \sigma_{1,2} \dots \sigma_{n-2,n-1}$  est l'élément de Garside du monoïde  $B_n^{+*}$ ) est un treillis fini, appelé *treillis des simples*. On note  $\mathcal{G} = \{M_J \text{ où } J \subset \Sigma_n\}$  le sous-ensemble du treillis des simples

de  $B_n^{+*}$  formés des éléments qui peuvent être obtenus comme ppcm d'un sous-ensemble de  $\Sigma_n$ . L'ensemble  $\mathcal{G}$  hérite naturellement de la structure de treillis du treillis des simples. L'ensemble des atomes de  $\mathcal{G}$  est  $\Sigma_n$ . Pour  $x \in \mathcal{G}$ , on pose  $\mu_{\mathcal{G}}(x) = \mu(1, x)$  où  $\mu$  désigne la fonction de Möbius de  $\mathcal{G}$ . On s'appuie alors sur le théorème général suivant :

**Théorème 1.45 (Rota '64).** *Soit  $L$  un treillis fini. Alors pour tout  $x \in L$*

$$\mu(\hat{0}, x) = \sum_B (-1)^{|B|},$$

où la somme est prise sur tous les ensembles  $B$  d'atomes de  $L$  tels que  $M_B = x$ .

Ce théorème nous permet de récrire :

$$\sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} M_J = \sum_{m \in \mathcal{G}} \left( \sum_{\substack{J \subset \Sigma_n \\ M_J = m}} (-1)^{|J|} \right) m = \sum_{m \in \mathcal{G}} \mu_{\mathcal{G}}(m) m.$$

Cette approche n'est pas spécifique aux monoïdes  $B_n^{+*}$  ; soit  $M = \langle S | R \rangle$  un monoïde satisfaisant les conditions du théorème 1.24 et tel que  $\{M_J \text{ où } J \subset \mathcal{J}\}$  soit un treillis fini, alors la somme qui apparaît dans le théorème 1.24 peut se réinterpréter comme une fonction de Möbius.

Dans le cas du monoïde  $B_n^{+*}$ , le calcul de la fonction de Möbius de  $\mathcal{G}$  se ramène au calcul de la fonction de Möbius du treillis des partitions non-croisées sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . En effet, on a vu dans la remarque 1.36 de la section 5.2 qu'il existe une bijection naturelle entre les éléments de  $\mathcal{G}$  et les partitions non-croisées de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et il est facile de voir que cette bijection induit un isomorphisme entre le treillis  $\mathcal{G}$  et le treillis des partitions non-croisées sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Dans [Kre72] il est montré que la fonction de Möbius entre la partition discrète  $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  et la partition triviale  $\{\{1, \dots, n\}\}$  est égale à  $(-1)^{n-1} C_{n-1}$ , où  $C_n$  désigne le  $n$ -ième nombre de Catalan défini par :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ce résultat permet donc d'obtenir une deuxième preuve de la proposition 1.37 pour le cas où  $k = n - 1$ . Pour les autres valeurs de  $k$ , il n'est pas évident de généraliser l'approche de Kreweras pour obtenir la fonction de Möbius pour les autres partitions non-croisées.

Une approche plus maniable est fournie par Blass et Sagan dans [BS97]. Ils donnent dans ce travail une méthode générale combinatoire pour calculer la fonction de Möbius d'un treillis fini.

Plus précisément, soit  $(L, \leq)$  un treillis fini dont on note  $A(L)$  l'ensemble des atomes. Ils munissent  $A(L)$  d'un ordre partiel arbitraire, noté  $\trianglelefteq$ . Un ensemble  $D$  d'atomes est alors dit *minoré* ou BB (pour « *bounded below* »), si pour tout  $d \in D$ , il existe un atome  $a$  tel que

$$a \triangleleft d \quad \text{et} \quad a < M_D.$$

Autrement dit,  $a$  est à la fois un minorant strict de  $d$  pour l'ordre  $\trianglelefteq$  et de  $M_D$  pour  $\leq$ . Par extension, un ensemble  $B \subset A(L)$  est dit NBB (pour « *not bounded below* ») si  $B$  ne contient pas d'ensemble  $D$  qui est BB. Dans ce cas,  $B$  est appelé une « *NBB base* » de  $x = M_B$ . Ils obtiennent alors le résultat suivant :

**Théorème 1.46 (Blass et Sagan '97).** *Soit  $L$  un treillis fini et  $\trianglelefteq$  une relation d'ordre partiel sur  $A(L)$ , alors pour tout  $x \in L$ ,*

$$\mu(\hat{0}, x) = \sum_B (-1)^{|B|},$$

où la somme est prise sur toutes les NBB bases de  $x$ .

Il est intéressant de voir que cette notion de NBB bases conduit au même raisonnement combinatoire que le nôtre. En effet, on munit l'ensemble  $\Sigma_n$  de l'ordre partiel défini par  $\sigma_{i,j} \trianglelefteq \sigma_{i',j'}$  si et seulement si  $\llbracket i, j \rrbracket \supseteq \llbracket i', j' \rrbracket$ . Pour cet ordre, Blass et Sagan montrent que les NBB bases de  $\delta$  sont exactement les AANCS sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (leur résultat est en fait énoncé en termes de partitions non-croisées, ce qui leur permet notamment de retrouver le résultat de Kreweras).

On peut ensuite étendre leur résultat pour montrer que les NBB bases d'une partition non-croisée sont exactement les FANCS qui lui correspondent, ce qui permet de retrouver la proposition 1.39. Pour obtenir la fonction de Möbius d'une partition  $\pi$  non croisée sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dont la taille des parties est donnée par  $(p_1, \dots, p_k)$ , on compte le nombre de FANCS qui induisent cette partition. Cela revient à choisir pour chaque  $p_i$ , un AANC sur  $p_i$  sommets, on obtient donc :

$$\mu_{NC(n)}(\pi) = (-1)^{\sum p_i} C_{p_1-1} \dots C_{p_k-1}.$$

Notons que ce résultat n'implique pas directement la proposition 1.37, il reste ensuite à sommer sur toutes les partitions non-croisées ayant le même poids. C'est la bijection entre FANCS et arbres unaires-binaires donnée dans la section 5.4 qui nous permet de mener ce calcul.

## 6 Perspectives et problèmes ouverts

Je présente dans cette partie quelques questions sur lesquelles je me suis penchée, mais qui n'ont pas abouti. Si le problème de la hauteur des traces, et plus généralement l'énumération de monoïdes non nécessairement homogènes, semble être un problème abordable, il n'en va pas de même de l'énumération des groupes de tresses qui semble aujourd'hui hors de portée.

### 6.1 Des monoïdes résistants : la hauteur des empilements

On s'intéresse dans cette partie aux empilements classiques définis dans la section 2. Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble de pièces fixé et muni d'une relation  $\mathcal{R}$ . On s'intéresse ici à l'énumération des éléments de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , mais non plus en les énumérant selon leur nombre de pièces (i.e. leur longueur selon  $\mathcal{B}$ ), mais selon leur hauteur en tant qu'empilement. Plus formellement, l'ensemble  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  des empilements triviaux est une partie génératrice de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  (il contient notamment l'ensemble  $\mathcal{B}$ ). On considère donc une nouvelle présentation de  $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  où l'ensemble de générateurs est  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  et où les relations se déduisent des relations de commutations. Pour éviter d'introduire trop de notations, on donne ces relations pour le monoïde suivant (un élément de ce monoïde est représenté sur la figure 1.19) :

$$M = \langle a, b, c \mid ac = ca \rangle, \tag{6.1}$$

L'ensemble des empilements triviaux dans ce cas est  $\mathcal{T} = \{1, a, b, c, (ac)\}$  et les relations sont :

$$ac = (ac), ac = ca.$$

Avec cette nouvelle présentation, la hauteur d'un empilement  $x$  est égale à la longueur de  $x$  selon  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , notée  $|x|_{\mathcal{T}}$ .

L'exemple de monoïde que l'on vient de donner n'est pas homogène quand on considère cet ensemble de générateurs :  $|a|_{\mathcal{T}} + |c|_{\mathcal{T}} = 2 \neq 1 = |ac|_{\mathcal{T}}$ .

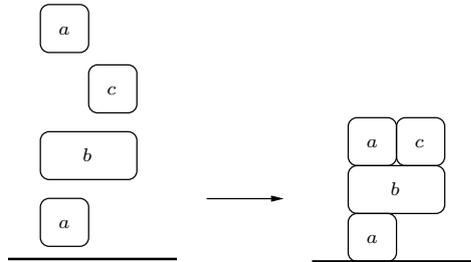


Fig. 1.19 – Un exemple d'empilement du monoïde  $M$

On peut néanmoins calculer la série génératrice  $H(x)$  des éléments de  $M$  comptés selon leur hauteur par l'interprétation matricielle d'un automate. Plus précisément, il s'agit de fixer pour chaque élément de  $M$  une forme normale (c'est-à-dire que pour  $x \in M$ , on choisit un élément (mot) particulier dans la classe d'équivalence de  $x$ ), on impose de plus que cet élément soit de longueur minimale. Intuitivement, il s'agit en fait de décomposer « couche par couche » l'empilement géométrique associé à  $x$ . La forme normale de l'empilement représenté sur la figure 1.19 est donc :  $a \cdot b \cdot ac$ .

Intuitivement,  $a \cdot ac$  n'est pas une forme normale : la décomposition en couche de l'empilement « tassé » correspondant serait  $ac \cdot a$ . Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , on dit que  $(u, v)$  est *admissible* si, pour toute lettre  $b$  apparaissant dans  $v$ , il existe  $a$  apparaissant dans  $u$  telle que  $a\mathcal{R}b$ . L'ensemble des formes normales est alors l'ensemble des mots  $t_1 \cdots t_n$  sur  $\mathcal{T}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$  tels que  $(t_i, t_{i+1})$  soit admissible pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ .

On voit directement à partir de cette définition que l'ensemble des formes normales est un langage rationnel (ce qui entraîne en particulier que la série  $H$  est rationnelle), on représente sur la figure 1.20 l'automate qui le reconnaît. En écrivant la matrice d'adjacence de cet automate, on en déduit directement que

$$H(x) = \frac{1 + x}{1 - 3x}.$$

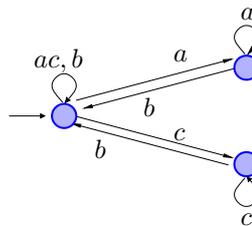


Fig. 1.20 – Automate reconnaissant les formes normales de  $M$

Dans [Bou02], est donnée une interprétation combinatoire de la série génératrice des hauteurs. En fait, dans ce travail, on n'obtient pas directement la série, mais on parvient à l'exprimer en fonction de la série génératrice des empilements d'empilements triviaux (bien plus simple à calculer). Cela permet de montrer au passage que le dénominateur de la série génératrice des hauteurs est un diviseur de celui de la série où les éléments sont comptés selon leur nombre de pièces (qui correspond à la série alternée des empilements triviaux). On imagine donc qu'on va pouvoir construire une involution à la manière des empilements classiques sur des couples (empilements triviaux, empilements). Malheureusement, même pour le monoïde très simple  $M$  défini en (6.1), on ne parvient pour le moment pas à exhiber une telle involution. Le principal obstacle semble être l'absence d'homogénéité.

## 6.2 Combinatoire du groupe

On s'est restreint jusqu'à présent au calcul de séries génératrices de *monoïdes*. Le calcul des séries génératrices pour les groupes correspondant à ces monoïdes, en considérant la présentation  $\langle S | R \rangle$  comme une présentation de groupes, est un problème beaucoup plus difficile. La première difficulté est que les groupes ne sont pas par définition homogènes, la présentation contient toujours des relations du type  $ss^{-1} = 1$ . Par conséquent, étant donné un élément du groupe, déterminer sa longueur peut se révéler être un problème difficile, voire ouvert pour certaines présentations. Pour ces exemples, énumérer les éléments d'une longueur fixée semble alors hors de portée.

### 6.2.1 Groupe de traces

Je présente dans cette partie un résultat de Bouillard et Mairesse [BM04]. Il s'agit ici de calculer la série génératrice pour le groupe d'empilements, en utilisant une méthode bijective similaire à celle utilisée pour calculer la série génératrice du monoïde des empilements. Ce résultat montre en particulier qu'il existe des groupes pour lesquels une approche de type « involution » est possible.

Les groupes d'empilements sont les groupes engendrés selon (2.1). En pratique, pour chaque pièce  $p$  de  $P$ , on associe une pièce  $\bar{p}$  et on pose  $\bar{P} = \{\bar{p}, p \in P\}$ . Si  $\bar{p}$  est une pièce de  $\bar{P}$ , on pose  $\bar{\bar{p}} = p$ . On suppose de plus que  $P \cap \bar{P} = \emptyset$ .

Le groupe d'empilements  $G(\tilde{P}, \tilde{C})$  est construit à partir du monoïde  $M(P, C)$  des empilements de la façon suivante :

- son ensemble de générateurs est  $\tilde{P} = P \cup \bar{P}$ ,
- si  $(p, q)$  appartient à  $C$ , alors  $(p, q)$ ,  $(\bar{p}, q)$ ,  $(p, \bar{q})$  et  $\bar{p}, \bar{q}$  appartiennent à  $\tilde{C}$ ,
- pour tout  $p$  de  $\tilde{P}$ , on a  $\bar{p}p = p\bar{p} = 1$ .

Pour représenter graphiquement ces empilements, on garde les mêmes conventions que pour le monoïde si ce n'est que les pièces peuvent maintenant être de deux couleurs selon qu'elles représentent un générateur de  $P$  ou de  $\bar{P}$ , avec la règle que deux pièces identiques, de couleurs différentes et qui reposent l'une sur l'autre s'annulent : un exemple d'empilement est donné sur la figure 1.21 (les pièces positives sont blanches, les pièces négatives grises).

Il faut noter qu'un élément du groupe admet une infinité de décompositions possibles (on peut rajouter un nombre arbitraire de facteurs du type  $p\bar{p}$ ), par conséquent le produit de Cauchy n'est pas défini si on se place directement dans l'espace des séries sur le groupe des empilements. Pour contourner ce problème, on plonge le groupe dans le monoïde  $\tilde{M} = M(\tilde{P}, \tilde{C})$ , ce monoïde a le même ensemble de pièces que  $G$  et les mêmes relations de commutation entre les pièces ; la seule différence est l'absence des relations  $p\bar{p} = 1$ . On appelle  $\Phi$  l'application qui à un empilement de  $G$  associe son image dans  $\tilde{M}$  (soit  $g \in G$

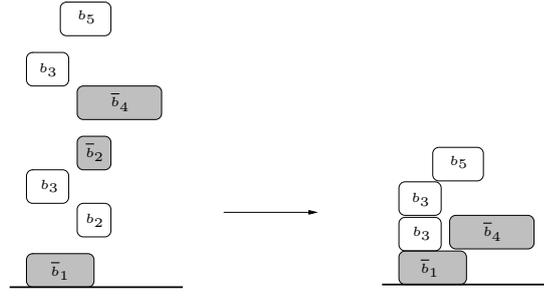


Fig. 1.21 – Un exemple d'empilement avec des pièces positives (blanches) et négatives (grises)

et  $w$  un représentant de longueur minimale de  $g$  alors  $\Phi(g)$  est la classe d'équivalence de  $w$  dans  $\tilde{M}$ ). L'application  $\Phi$  étant clairement injective, on est ramené à calculer la série génératrice de  $\Phi(G)$ .

On appelle *empilement coloré* tout empilement de  $\tilde{M}$  représenté par un mot de la forme  $p_1\bar{p}_1p_1\bar{p}_1\dots,p_2\bar{p}_2p_2\dots,\dots,p_k\bar{p}_kp_k\dots$  tel que  $p_1p_2\dots p_k$  soit un empilement trivial de  $\tilde{M}$ . On note  $\mathcal{T}_{col}$ , l'ensemble des empilements colorés.

On définit une involution  $\Psi$  de  $\mathcal{T}_{col} \times \Phi(G) \setminus \{(1, 1)\}$ . Soit  $(t, g) \neq (1, 1)$  un élément de  $\mathcal{T}_{col} \times \Phi(G)$ , on pose

$$p_{\min} = \min\{p \mid t \succ p\} \cup \{p \mid p \prec g \text{ et } tp \in \mathcal{T}_{col}\},$$

où l'ordre sur  $\tilde{P}$  est issu de l'ordre sur  $P$  par la convention suivante : soient  $p < q \in P$ , alors  $p < \bar{p}$  et  $\bar{p} < \bar{q} \in \tilde{P}$ . On vérifie facilement et par le même type d'arguments que ceux donnés dans la définition de  $s_{\min}$  (voir (4.5)) que  $p_{\min}$  est bien défini et soit divise  $t$  à droite, soit vérifie  $tp \in \mathcal{T}_{col}$ . On peut donc définir :

$$\Psi(t, g) = \begin{cases} (tp_{\min}^{-1}, p_{\min}g), & \text{si } t \succ p_{\min} \\ (tp_{\min}, p_{\min}^{-1}), & \text{sinon (i.e. si } p_{\min} \prec g \text{ et } tp_{\min} \in \mathcal{T}_{col}). \end{cases} \quad (6.2)$$

Une illustration de cette application est donnée sur la figure 1.22, on vérifie que  $\Psi$  est une involution et que pour  $(t, g) \neq (1, 1)$ , on a :

$$(-1)^{|t|}t.g = -(-1)^{|t'|}t'.g', \text{ où on a posé } \Psi(t, g) = (t', g').$$

On en déduit que :

$$\sum_{g \in \Phi(g)} g = \left( \sum_{t \in \mathcal{T}_{col}} (-1)^{|t|}t \right)^{-1}.$$

Or, tout empilement coloré s'obtient à partir d'un empilement trivial en remplaçant chacune des pièces  $p$  par une pile de pièces  $p\bar{p}p\dots$  ou  $\bar{p}p\bar{p}\dots$ , on a donc l'égalité suivante entre séries formelles :

$$\sum_{t \in \mathcal{T}_{col}} (-1)^{|t|}t = \sum_{t \in \mathcal{T}(\tilde{P}, \tilde{C})} (-1)^{|t|} \prod_{p \in t} p \frac{1 - \bar{p}}{1 - p\bar{p}}.$$

Si on note  $F_{triv}$  et  $F_{col}$  les séries génératrices respectivement des empilements triviaux pour le monoïde et des empilements colorés, on obtient donc :

$$F_{col}(x) = F_{triv}\left(\frac{2x}{1-x}\right),$$

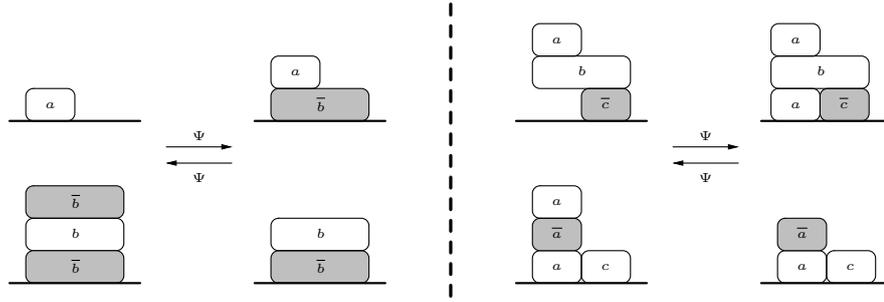


Fig. 1.22 – L’application  $\Psi$  sur  $\mathcal{T}_{col} \times \Phi(G)$

où le facteur 2 vient du fait que chaque suite  $p\bar{p}p\dots$  d’un empilement coloré commence soit par  $p$  soit par  $\bar{p}$ .

Par ailleurs, on sait (cf partie 2.3) que la série génératrice  $F_M$  du monoïde des empilements est égale à l’inverse de  $F_{triv}$ , on en déduit que la série génératrice  $F_G$  du groupe des empilements est liée à  $F_M$  par :

$$F_G(x) = F_M\left(\frac{2x}{1-x}\right),$$

Autrement dit, on passe du groupe au monoïde par un simple changement de variable.

### 6.2.2 Groupe de tresses

Une littérature très importante existe sur le groupe des tresses, on pourra se rapporter entre autres à [Deh08] pour une introduction (centrée autour du problème d’isotopie) et à [DDRW02] pour un état de l’art (centré autour du caractère ordonnable des tresses). Je ne donne qu’ici que quelques définitions et résultats.

Le groupe des tresses sur  $n$  brins  $B_n$  est le groupe qui admet comme présentation :

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle. \tag{6.3}$$

D’un point de vue physique, les éléments du groupe  $B_n$  sont les tresses quelconques, alors qu’on imposait, pour les tresses du monoïde  $B_n^+$  introduit dans la section 3.1, que, lors d’un croisement, le brin venant de la gauche passe toujours au-dessus de l’autre brin.

Le premier problème à résoudre pour travailler sur le groupe des tresses est le *problème du mot* : comment savoir si deux mots sur les générateurs représentent la même tresse ?

Dans le cas du monoïde, le problème du mot est un problème décidable. En effet, le monoïde admettant une présentation homogène, il n’y a qu’un nombre fini de mots représentant une tresse de longueur fixée. Etant donné un mot, il suffit d’appliquer itérativement toutes les relations possibles (en nombre fini) et on obtient ainsi tous les mots équivalents au mot initial. Dans le groupe, à cause des relations  $\sigma\sigma^{-1} = 1$ , cette méthode ne peut s’appliquer directement, on peut néanmoins montrer que le problème du mot reste décidable pour le groupe de tresses.

On introduit à présent la forme normale de Garside (FNG) qui donne une réponse au problème du mot. Comme on l’a vu pour les empilements énumérés selon leur hauteur

Fig. 1.23 – Deux représentations de la tresse demi-tour  $\Delta_5$ .

(section 6.1), donner une forme normale pour un élément d'un monoïde ou d'un groupe consiste à distinguer pour chaque classe d'équivalence un représentant particulier.

La forme normale de Garside repose principalement sur les propriétés de la tresse  $\Delta_n$  déjà évoquée dans la section 3.2. Cette tresse consiste à prendre les  $n$  brins et à leur faire faire un demi-tour (voir la figure 1.23). Elle est définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Cette tresse vérifie les propriétés remarquables suivantes :

**Lemme 1.47.** *Pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a  $\sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$ . Par ailleurs, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\Delta_n \succ \sigma_i$  et  $\sigma_i \prec \Delta_n$ .*

Étant donné un mot de tresses  $w$ , les propriétés énoncées dans le lemme implique l'existence d'un  $k \in \mathbb{Z}$  et d'un mot positif  $v$  (i.e. dont l'écriture ne comprend aucun  $\sigma_i^{-1}$ ) tel que  $w \equiv \Delta_n^k v$ . De manière algorithmique, il suffit de remplacer dans  $w$  chacun des  $\sigma_i^{-1}$  par  $\Delta_n^{-1} u$  où  $u$  est un mot positif (qui existe car  $\sigma_i \prec \Delta_n$ ), on fait ensuite « glisser » tous les  $\Delta_n$  à gauche du mot grâce aux relations de pseudo-commutation données dans le lemme.

On est donc ramené à définir une forme normale sur les tresses positives, autrement dit pour les éléments de  $B_n^+$ .

Se ramener ainsi aux tresses positives est particulièrement intéressant car  $B_n^+$  admet une structure de treillis pour la divisibilité à gauche. Pour un élément  $b$  de  $B_n^+$ , cela implique qu'on peut obtenir une décomposition de  $b$  de la façon suivante :

$$b = f_1 \cdot b_1 = f_1 \cdot f_2 b_2 = \dots = f_1 \cdots f_d,$$

où  $f_1 = \text{pgcd}(b, \Delta_n)$  et  $f_i = \text{pgcd}(b_{i-1}, \Delta_n)$ .

*Remarque 1.48.* Les  $f_i$  qui apparaissent dans cette décomposition sont (par définition) des diviseurs de  $\Delta_n$ . On les appelle les *tresses de permutation* pour la raison suivante : il existe une projection naturelle de  $B_n$  dans le groupe symétrique à  $n$  éléments où l'image de chaque tresse est la permutation des brins qu'elle induit (supposons qu'on ait numéroté les extrémités des brins de 1 à  $n$ , on regarde en quelle position arrive le brin 1, cela nous donne l'image de 1 dans cette permutation etc.).

Cette projection est clairement non injective, par exemple  $\sigma_1^2 \neq 1$  s'envoie sur la permutation identité. En revanche, si pour chaque permutation, on en cherche un antécédent sous forme d'une tresse positive de longueur minimale, on obtient exactement les diviseurs de  $\Delta_n$  ou tresses de permutation, on note  $\mathcal{G}_n$  l'ensemble des tresses de permutation sur  $n$  brins.

Ceci fait notamment apparaître le lien étroit entre les tresses classiques et les permutations. Rappelons que les tresses duales sont elles reliées aux partitions non-croisées (voir la partie 5).

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

**Théorème 1.49 (Thurston, Morton-El Rifai ‘88,...).** *Toute tresse de  $B_n$  admet une unique expression de la forme  $\Delta_n^k \cdot f_1 \dots f_d$  telle que  $k \in \mathbb{Z}$  et que les  $f_i$  soient des tresses de permutation vérifiant de plus :*

- $f_1 \neq \Delta_n$
- $f_d \neq 1$
- pour tout  $1 \leq r < d$ , si  $\sigma_i < f_{r+1}$  alors  $f_r > \sigma_i$ .

Soit  $u \in B_n$  et  $\Delta_n^k \cdot f_1 \dots f_d$  l’écriture de  $u$  vérifiant les conditions du théorème, on appelle  $\Delta_n^k \cdot f_1 \dots f_d$  la *forme normale de Garside (ou FNG)* de  $u$ . Cette forme normale est une FNG «à gauche», on pourrait de manière symétrique définir la FNG de  $u$  à droite qui serait de la forme  $g_d \dots g_1 \Delta_n^k$  et vérifierait des conditions symétriques à celle du théorème.

La condition de normalité donnée dans le troisième point du théorème est une condition locale et est donc reconnaissable par un automate fini. En utilisant ceci, on peut montrer que la forme normale d’une tresse est calculable par transducteurs de manière récursive.

L’existence de ces transducteurs implique que le coût algorithmique de l’ajout d’une lettre est linéaire et donc la mise sous forme normale d’une tresse de longueur  $l$ . L’existence de cette forme normale permet donc de donner une solution au problème du mot sur les tresses, quadratique en la longueur de la tresse et linéaire en temps. Il existe des méthodes plus efficaces que la mise sous forme normale de Garside, notamment la méthode des poignées [Deh97] ou la méthode des coordonnées de Dynnikov [DDRW02].

L’ensemble des formes normales de tresses est d’après le théorème 1.49 un langage rationnel sur l’alphabet formé de  $\Delta_n^{-1}$  et de  $\mathcal{G}_n$ , l’ensemble des tresses de permutation. En écrivant la matrice d’adjacence d’un automate reconnaissant ce langage, on peut donc obtenir la série génératrice des tresses selon la longueur de leur FNG. Cette idée a ensuite été reprise par Charney [Cha95]. Elle calcule la série génératrice des tresses selon l’ensemble de générateurs  $\mathcal{G}_n \cup \mathcal{G}_n^{-1}$  en utilisant une forme normale géodésique sur cet ensemble de générateurs introduite dans [ECH<sup>+</sup>92]. Par ailleurs, en étendant la forme normale aux groupes d’Artin-Tits sphériques, elle obtient des résultats analogues pour leur série génératrice. Ces travaux seront ensuite généralisés aux groupes de Garside dans [CM04].

Mais, comme on l’a déjà vu pour les monoïdes de traces (section 6.2.1), changer d’ensemble de générateurs peut modifier profondément la combinatoire d’un monoïde ou d’un groupe, ainsi dans le cas des tresses, les séries génératrices obtenues pour l’énumération selon les tresses de permutation ne permettent pas d’obtenir des résultats d’énumération selon les générateurs (naturels) d’Artin. En particulier, la rationalité des séries obtenues par Charney n’implique pas que les séries génératrices selon les générateurs d’Artin soient rationnelles. Déterminer si elles le sont est d’ailleurs un problème ouvert dès que  $n \geq 4$  (c.f. la discussion à la fin de cette partie).

On dispose de très peu de résultats pour l’énumération des tresses selon les générateurs d’Artin. Le premier problème qui se pose est, étant donné un mot sur les générateurs

d'Artin, d'en trouver un représentant de longueur minimale.

Dans le cas des tresses à 3 brins, il existe un algorithme de minimisation reposant sur la forme normale de Garside ([MM06a]). Étant donnée une tresse  $b$  de  $B_3$ , on écrit  $b$  sous sa forme normale de Garside  $b = \Delta_3^k \cdot f_1 \dots f_d$ . Si  $k \geq 0$ , alors  $b$  est une tresse positive, tout représentant est un représentant de longueur minimale et on a terminé. Si  $k < 0$ , on annule chacun des  $\Delta_3^{-1}$  avec l'un des  $f_i$ , en commençant par les  $f_i$  les plus longs. Plutôt que de formaliser davantage, j'illustre cet algorithme sur un exemple. Supposons que  $b = \Delta_3^{-3} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_2 \sigma_1$  (en rappelant que  $\Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} b &= \Delta_3^{-3} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_2 \sigma_1 \\ b &= \Delta_3^{-2} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1^{-1} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_2 \sigma_1 \\ b &= \Delta_3^{-1} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \\ b &= \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \end{aligned}$$

En revanche, dès que  $n \geq 4$ , aucune solution en temps raisonnable n'est connue. On dispose du résultat de complexité suivant, lorsque le nombre de brins de la tresse n'est pas fixé :

**Théorème 1.50 (Paterson et Razborov '91).** *Soit  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ , déterminer si un mot de  $\Sigma^*$  est un représentant minimal d'une tresse est un problème NP-complet en la longueur du mot.*

Par exemple, l'algorithme « glouton » fondé sur la FNG qu'on vient de présenter pour  $B_3$ , ne donne pas un représentant minimal d'une tresse dès que le nombre de brins est supérieur ou égal à 4. On donne un contre-exemple (on note  $a = \sigma_1$ ,  $b = \sigma_2$ ,  $c = \sigma_3$  et  $A = \sigma_1^{-1}, \dots$ ), on part du mot  $ab^{-1}$  dont on écrit la FNG à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} aBc &= a \cdot \Delta^{-1} abcba \cdot c & \text{et} & & aBc &= a \cdot cbabc \cdot \Delta^{-1} \cdot c \\ &= \Delta^{-1} \cdot cabc \cdot bac & & & &= acb \cdot abac \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

On applique ensuite l'algorithme glouton aux FNGs obtenues :

$$\Delta^{-1} \cdot cabc \cdot bca = BA \cdot bca \quad \text{et} \quad acb \cdot abac \cdot \Delta^{-1} = acb \cdot CB.$$

les mots qu'on obtient après application de l'algorithme glouton sont de longueur cinq, tandis que le mot initial était de longueur trois : l'algorithme glouton n'est pas minimisant. D'autres approches fondées sur la FNG se sont révélées infructueuses. A nombre de brins fixé supérieur ou égal à 4, on ne connaît pas d'algorithme minimisant efficace, mais on ne sait pas non plus déterminer si le problème est NP-complet.

Pour calculer la longueur d'un mot  $w$  en les  $\sigma_i$ , on en est réduit à procéder de manière exhaustive en examinant tous les mots plus courts que  $w$  pour essayer d'en trouver un qui représente la même tresse, où, pour déterminer si deux mots représentent la même tresse, on les passe tous en FNG. Cet algorithme est bien sûr très inefficace en pratique puisque le nombre de tresses croît exponentiellement avec la longueur.

L'un des objectifs de cette thèse était d'étudier la combinatoire des groupes de tresses ou du moins de  $B_4$  et notamment de voir si on pouvait obtenir des propriétés sur la série génératrice des tresses (rationalité, ...). Dans cette optique, j'ai calculé les premiers termes de cette série. En suivant l'algorithme décrit ci-dessus et en calculant des tables de FNG, j'ai calculé les premiers termes de la série génératrice de  $B_4$ , le nombre de tresses

de longueur  $n$  étant une fonction exponentielle de  $n$ , on est rapidement limité par les performances matérielles pour obtenir plus de termes. J'ai obtenu les 13 premiers termes qui sont :

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362, 105546, 322400, 980904, 2975728.

Il existe quelques approches empiriques pour obtenir des propriétés sur une série génératrice quand on connaît les premiers termes de celle-ci. Une chose à faire est d'utiliser le paquet GFUN de MAPLE, pour deviner la série génératrice si celle-ci est rationnelle. Dans notre cas, on n'obtient pas de réponse, ce qui signifie que si la série des tresses sur 4 brins est rationnelle alors la somme du degré de son numérateur et de son dénominateur est au moins égale à 13.

Une deuxième approche consiste à observer la décomposition en facteurs premiers des premiers termes de la série. Intuitivement si des grands facteurs premiers apparaissent dans les premiers termes de la série, celle-ci a « peu de chances » d'être rationnelle. Ici, on obtient  $1110 = 2 * 3 * 5 * 37$ ,  $3542 = 2 * 7 * 11 * 23$  puis  $11098 = 2 * 31 * 179$ , ... Cela ne permet pas de donner de résultats formels ni dans un sens ni dans l'autre, même si la balance penche plus vers l'irrationalité.

### 6.3 Tresser aléatoirement

Une des motivations initiales de ce travail était de mieux comprendre la combinatoire des monoïde et des groupes de tresses et de traces pour pouvoir étudier les marches aléatoires sur ces objets. On présente dans cette partie un cadre général de marches aléatoires sur les groupes infinis discrets et quelques résultats sur leur comportement, ainsi que des remarques spécifiques aux groupes de tresses et de traces.

#### 6.3.1 Présentation des marches aléatoires sur un groupe ou sur un monoïde

Soit  $G = \langle S | R \rangle$  un groupe infini, finiment engendré (i.e.  $S$  est un ensemble fini). Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $S$  et soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi  $\mu$ . La *marche aléatoire* (au plus proche voisin) sur  $G$  de loi  $\mu$  est définie par :

$$X_n = X_{n-1} * a_{n-1} = a_0 * \cdots * a_{n-1},$$

où  $*$  est la loi de groupe, lorsque  $\mu$  est uniforme, on parle de marche aléatoire *simple*. On s'intéresse au comportement asymptotique de la marche  $(X_n)_n$ . Par exemple, on souhaite calculer, sous la forme la plus explicite possible, la *dérive* ou *vitesse de fuite*, c'est-à-dire la constante  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  définie par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|_S}{n} = \gamma \quad \text{p.s.}, \quad (6.5)$$

où l'existence de  $\gamma$  provient du Théorème Ergodique Sous-additif de Kingman, cf. Guivarc'h, [Gui80]. Plus généralement, on souhaite obtenir une description explicite de la mesure harmonique, c'est-à-dire de la loi de  $X_\infty = \lim_n X_n$  (où le sens exact de la limite est à préciser), qui donne la direction prise par la marche dans sa fuite vers l'infini.

On définit de la même façon une marche aléatoire sur un monoïde. Si celui-ci admet une présentation homogène, le calcul de la dérive ne présente pas d'intérêt ;  $|X_n| = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et la dérive est donc égale à 1. En revanche, la description de la mesure harmonique est un problème intéressant.

L'étude de la marche aléatoire sur le groupe (ou le monoïde) est intrinsèquement liée à la combinatoire de celui-ci. Soit  $\pi : S^* \rightarrow G$  le morphisme canonique qui associe à un mot

l'élément de groupe obtenu en remplaçant la concaténation par la loi de groupe. Étudier la combinatoire de  $G$  revient à s'intéresser à la mesure uniforme sur  $G_n = \{g \in G, |g|_S = n\}$ . Étudier la marche aléatoire simple revient à s'intéresser à l'image par  $\pi$  de la mesure uniforme sur  $S^n = \{u \in S^*, |u| = n\}$  (et plus généralement de la mesure produit  $\mu^{\otimes n}$ ).

### 6.3.2 Quelques résultats sur les marches aléatoires

Il existe de nombreux résultats sur le comportement des marches aléatoires sur les groupes infinis discrets. On en mentionne ici quelques aspects, sans aucune prétention à l'exhaustivité, et en privilégiant les résultats de nature combinatoire.

Le problème de la récurrence ou de la transience de la marche est entièrement résolu. Varopoulos [VSCC92] a en effet démontré le résultat important suivant :

**Théorème 1.51.** *Soit  $G$  un groupe infini de type fini. Il existe une marche aléatoire récurrente associée au groupe si et seulement si  $G$  possède un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou à  $\mathbb{Z}^2$ .*

Ce théorème permet de voir que les marches aléatoires sur les groupes qu'on considère dans la suite sont transientes. De plus la dérive  $\gamma$  est strictement positive [Gui80] pour ces groupes.

Le type de résultat que l'on souhaiterait généraliser et étendre à d'autres contextes est le suivant (pour le groupe libre [DM61, Led01] pour le cadre ci-dessous [MM07a]). Soit  $G = *_{i \in I} G_i$ , un produit libre d'une famille finie de groupes finis, avec  $|I| \geq 2$  et  $\forall i, |G_i| > 1$ . Soit  $S = \sqcup_{i \in I} G_i \setminus \{1_{G_i}\}$  et  $\iota : S \rightarrow I$  l'application définie par  $\iota(u) = i$  si  $u \in G_i \setminus \{1_{G_i}\}$ . On peut identifier les éléments de  $G$  avec les mots de l'ensemble  $L$  donné ci-dessous :

$$L = \{u_1 \cdots u_k \in S^*, \text{ tel que } \iota(u_i) \neq \iota(u_{i+1}) \text{ pour tout } 1 \leq i < k\}.$$

La *frontière* du groupe est alors identifiée avec les mots infinis de  $S^{\mathbb{N}}$  vérifiant la même contrainte. La *mesure harmonique* est une loi de probabilité sur cet ensemble.

**Théorème 1.52.** *Soit la marche aléatoire sur  $G = *_{i \in I} G_i$  définie par une mesure de probabilité  $\mu$  de support inclus dans  $S$  et engendrant  $G$ . Soit  $\mu^\infty$  la mesure harmonique associée. Il existe un unique  $r \in \{x \in \mathbb{R}^S \mid \forall i, x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$  tel que  $\mu^\infty$  soit donnée par :*

$$\forall u_1 \cdots u_k \in S^*, \forall i, \iota(u_i) \neq \iota(u_{i+1}), \quad \mu^\infty(u_1 \cdots u_k S^{\mathbb{N}}) = q(u_1) \cdots q(u_{k-1}) r(u_k),$$

où  $q(u) = r(u) / (\sum_{v, \iota(v) \neq \iota(u)} r(v))$ . De plus  $r$  peut être caractérisé comme unique solution d'un ensemble fini d'équations polynomiales.

On obtient alors en corollaire une expression explicite de la dérive :

$$\gamma = \sum_{a \in S} \mu(a) [-r(a^{-1}) + \sum_{b, \iota(b) \neq \iota(a)} r(b)].$$

Pour ces produits libres, le fait que  $L$  forme un ensemble de formes normales géodésiques reconnu par automate fini est primordial. Cette structure combinatoire trouve son reflet dans la forme des équations vérifiées par  $r$  et par suite dans la forme de la mesure harmonique. C'est ce lien que l'on espère voir préservé pour les marches aléatoires sur les groupes de tresses et de traces.

### 6.3.3 Les tresses et les traces

On se concentre à présent sur les groupes de tresses et de traces. Le comportement de la marche aléatoire sur  $B_3$  est bien compris [MM07b]. En particulier, la mesure harmonique sur  $B_3$  quotienté par son centre a une structure qui ressemble à celle du Théorème 1.52, mais où l'on multiplie des matrices au lieu de multiplier des scalaires.

Ces résultats reposent sur l'étude de la marche aléatoire sur les formes normales de Garside associées aux tresses. Autrement dit, on étudie la marche aléatoire sur  $B_3$  en considérant comme ensemble de générateurs non plus les générateurs d'Artin mais les générateurs de Garside. La bonne compréhension du comportement sur les FNG permet ensuite de déduire des résultats pour les générateurs d'Artin grâce à l'algorithme « glouton » présenté dans la section précédente.

En revanche, dès que  $n$  est strictement plus grand que 3, l'approche s'effondre. Comme on l'a vu la combinatoire de  $B_n$  par rapport aux générateurs d'Artin n'est pas bien comprise (savoir si la série de croissance de  $(B_n, S)$  est rationnelle est un problème ouvert). La combinatoire de  $(B_n, \mathcal{G}_n)$  (où  $\mathcal{G}_n$  désigne l'ensemble des générateurs de Garside) est quant à elle bien comprise (c.f. section 6.2.2). L'étude de marches aléatoires sur  $B_n$  selon  $\mathcal{G}_n$  semble donc un problème plus abordable. Mais aujourd'hui, quasiment aucun résultat quantitatif n'est connu, aussi bien pour  $(B_n, S)$  que pour  $(B_n, \mathcal{G}_n)$ .

Etudier les marches aléatoires sur les groupes de traces (définis dans la section 6.2.1) est un problème notoirement difficile. Et cela bien que la combinatoire du groupe soit comprise, et bien qu'il existe des formes normales géodésiques rationnelles (par exemple la forme normale de Cartier-Foata). Illustrons cette difficulté sur l'exemple du groupe de traces  $A_n$ ,  $n \geq 3$ , défini par :

$$A_n = \langle c_1, \dots, c_{n-1} \mid c_i c_k = c_k c_i, \text{ si } |i - k| \geq 2 \rangle \quad (6.6)$$

On observe que  $A_3$  est isomorphe au groupe libre  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  et  $A_4$  au groupe  $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$ . Considérons la marche aléatoire simple sur  $A_n$ . Les seuls cas où l'on sache déterminer explicitement mesure harmonique et vitesse de fuite sont  $A_3$  (calcul élémentaire) et  $A_4$  (J. Mairesse, communication personnelle). Définir proprement la mesure harmonique nécessite déjà un argument. La difficulté est la suivante. Le modèle consiste donc en un empilement coloré auquel on ajoute à chaque étape une pièce choisie aléatoirement. La pièce ajoutée peut éventuellement s'annuler avec une pièce déjà empilée, et donc provoquer un dépilement. Toute pièce de l'empilement a ainsi une probabilité non-nulle d'être annulée après une suite de dépilements. On a beau savoir que la marche est transiente (théorème 1.50), cela ne prouve pas que l'empilement aléatoire converge vers un empilement infini limite. Ce point a néanmoins été résolu positivement par Malyutin [Mal03]. On sait donc que la mesure harmonique existe mais on ne sait pas la calculer pour  $n \geq 5$ .

On remarque que l'on passe naturellement de  $A_n$  à  $B_n$  en quotientant par les relations de tresse. Réciproquement, Collins ([Col94]) a démontré en 1994 la conjecture de Tits qui dit que  $A_n$  est le sous-groupe de  $B_n$  engendré par les carrés des générateurs d'Artin. Ceci permet de faire le lien entre les groupes de tresses et les groupes de traces et donc de justifier leur étude en parallèle. C'est l'approche proposée par [VNB00].

Peu de résultats sont connus sur les marches aléatoires sur les monoïdes de tresses. Grâce à la compréhension de leur combinatoire, leur étude semble être une perspective de recherche intéressante.

Considérons maintenant les marches aléatoires sur les monoïdes de traces. Celles-ci ont été beaucoup étudiées. Pour les générateurs naturels, la présentation du monoïde est homogène et la vitesse de fuite égale à 1. Par contre il est très pertinent (notamment

pour des applications à des problèmes de gestion de ressources) de s'intéresser l'ensemble de générateurs constitué par les empilements triviaux. La vitesse de fuite est alors la vitesse de croissance de la *hauteur* de l'empilement aléatoire. Notons  $A_n^+$  le monoïde de trace défini par (6.6) interprété cette fois-ci comme présentation de monoïde. On sait déterminer par force brute les mesures harmoniques et vitesses de fuite pour  $A_4^+$  et  $A_5^+$ , voir par exemple [Sah89] ou [BV97] (le cas  $A_3^+$  est trivial, c'est un monoïde libre). Pour traiter le cas de  $A_n^+$ ,  $n \geq 6$ , des idées nouvelles semblent nécessaires.

# 2

## Gaz markoviens et énumération d'animaux dirigés

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>62</b>
1.1	Terminologie sur les graphes . . . . .	62
1.2	Animal : Définition . . . . .	63
1.3	Quelques rappels de percolation . . . . .	64
1.4	Animaux et percolation . . . . .	66
<b>2</b>	<b>Animaux dirigés</b> . . . . .	<b>67</b>
2.1	Définition . . . . .	67
2.2	Premiers résultats d'énumération d'animaux dirigés . . . . .	68
2.3	Animaux dirigés et modèles de gaz . . . . .	69
2.4	Animaux dirigés et empilements . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Modèles de gaz</b> . . . . .	<b>73</b>
3.1	Modèle de gaz sur un cylindre . . . . .	73
3.2	Modèle de gaz sur le graphe entier . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Convergence de graphes et animaux</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1	Définition d'une topologie sur les graphes marqués . . . . .	80
4.2	Compatible avec les animaux . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Chaînes de Markov cycliques et animaux</b> . . . . .	<b>82</b>
5.1	Définition des chaînes de Markov cycliques . . . . .	82
5.2	Premières propriétés des chaînes de Markov cycliques . . . . .	83
5.3	Convergences des chaînes de Markov cycliques . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Résultats d'énumération</b> . . . . .	<b>85</b>
6.1	La famille de réseaux $(L_R)_{R \subset \mathbb{N}}$ . . . . .	85
6.2	Le réseau triangulaire . . . . .	88
6.3	La famille de réseaux $T_n$ . . . . .	91

---

Depuis le travail fondateur de Dhar [Dha83], l'étude de modèles de gaz s'est révélée être une méthode efficace et assez systématique pour l'énumération d'animaux dirigés. Bousquet-Mélou [BM98] montre en effet que de nombreux problèmes d'énumération se ramènent au calcul de la densité d'un modèle de gaz particulier.

Pour des raisons techniques, tous les résultats établis par Bousquet-Mélou [BMC96], puis Bousquet-Mélou et Conway [BMC96] reposent sur l'étude de modèles de gaz sur une bande de largeur finie du graphe, les résultats sur l'énumération d'animaux dirigés étant ensuite déduits par passage à la limite. Le Borgne et Marckert [LBM07] parviennent à surmonter ces problèmes techniques et définissent un modèle de gaz sur le graphe entier. Ceci leur permet entre autres d'obtenir une description markovienne du modèle de gaz

sur le réseau carré qui entraîne des résultats d'énumération d'animaux dirigés sur ce réseau pour des sources variées.

L'idée initiale de mon travail sur ce sujet était de voir si une description markovienne du modèle de gaz défini dans [LBM07] pouvait être obtenue pour la famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)$ , généralisation du réseau carré introduite dans [BMC96]. Cette idée était motivée à la fois par le résultat de [LBM07] et par la forme multiplicative de la distribution du gaz obtenue dans [BMC96] et [BM98]. J'ai obtenu effectivement que la restriction du modèle de gaz à une ligne du réseau  $\mathcal{L}_m$  est une chaîne de Markov de mémoire  $m - 1$  (Corollaire 2.22).

Comme les méthodes utilisées semblaient assez peu spécifiques aux réseaux  $\mathcal{L}_m$ , j'ai cherché à définir un cadre général de réseaux pour lequel une telle approche pouvait s'appliquer. A cet effet, j'ai défini une topologie sur un ensemble de graphes marqués et ai montré (Théorème 2.14) que la notion de convergence induite par cette topologie sur les graphes implique la convergence des lois fini-dimensionnelles du modèle de gaz. Pour exploiter cette convergence, je définis dans la section 5 la notion de *chaîne de Markov cyclique* dont je prouve que la limite est, sous certaines hypothèses, une chaîne de Markov classique (Théorème 2.18). Grâce à ces résultats, je montre que pour de nombreux réseaux, la restriction du modèle de gaz à une ligne est une chaîne de Markov (Théorèmes 2.20, 2.23, 2.24 et 2.26) ce qui permet d'obtenir de nouveaux résultats d'énumération d'animaux dirigés (par exemple Proposition 2.25). Ce travail est décrit dans l'article [Alb08] soumis pour publication.

Ce chapitre est organisé comme suit. Je commence par replacer le domaine de l'énumération des animaux dirigés dans son contexte en rappelant des notions sur les graphes, les animaux, la percolation et sur le lien entre énumération d'animaux et percolation (section 1). Je présente ensuite les animaux dirigés et dresse un panorama des méthodes utilisées et des résultats obtenus sur les questions concernant leur énumération (section 2). Je décris dans la section 3 les travaux de [BMC96], [BM98] et [LBM07] sur les liens entre énumération d'animaux dirigés et modèles de gaz. Suivent les définitions et propriétés de deux objets que j'ai introduits pour étudier les modèles de gaz : une topologie sur les graphes marqués (section 4) et les chaînes de Markov cycliques (section 5). Ces deux outils permettent d'obtenir dans la section 6 des descriptions stochastiques des modèles de gaz sur certains réseaux et les résultats d'énumération d'animaux dirigés correspondants.

## 1 État de l'art

### 1.1 Terminologie sur les graphes

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est un couple formé d'un ensemble de sommets  $V$  et d'un ensemble d'arêtes  $E$ . Chaque arête a deux extrémités qui sont des éléments distincts de  $V$  (ce que nous appelons graphe ici est parfois appelé graphe simple dans la littérature : les arêtes multiples et les boucles ne sont pas autorisées). Une arête  $a$  est *incidente* à un sommet  $s$  (ou indifféremment  $s$  est incident à  $a$ ), si  $s$  fait partie des extrémités de  $a$ . Le *degré* d'un sommet  $s$  d'un graphe  $G$  est le nombre total d'incidences de  $s$  avec des arêtes de  $G$ . Un graphe est dit *localement fini* si tous ses sommets ont un degré fini.

Deux sommets de  $G$  sont *voisins* s'il existe une arête dont ils sont les extrémités. Plus généralement, on dit qu'il existe un chemin entre deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , s'il existe une suite finie  $(u_0 = u, u_1, \dots, u_n = v)$  de sommets de  $G$  telle que pour tout  $0 \leq i < n$ ,  $u_i$  et  $u_{i+1}$  soient voisins. Un graphe  $G$  est dit *connexe* s'il existe un chemin entre toute paire de sommets. Par extension, un ensemble  $S$  de sommets est dit connexe, si pour tous

sommets  $u$  et  $v$  de  $S$ , il existe un chemin entre  $u$  et  $v$  formé uniquement de sommets de  $S$ .

Un *graphe orienté* ou *dirigé* est un graphe dont chaque arête est munie d'une orientation, on appelle *arc* une arête orientée. Soit un arc  $a$  dont les extrémités sont  $u$  et  $v$  telles que  $a$  soit orienté de  $u$  vers  $v$ , on dit que  $a$  est *issu* de  $u$  et *pointe* vers  $v$ . Le *degré sortant* et le *degré entrant* d'un sommet  $u$  sont respectivement le nombre d'arcs issus de  $u$  et le nombre d'arcs qui pointent vers  $u$ .

S'il existe un arc issu de  $u$  et qui pointe vers  $v$ , on dit que  $v$  est un enfant de  $u$  ou que  $u$  est un parent de  $v$ . Plus généralement, on dit qu'il existe une *chaîne* entre  $u$  et  $v$  (ou que  $u$  est un ancêtre de  $v$ ) s'il existe une suite finie ( $u_0 = u, u_1, \dots, u_n = v$ ) de sommets de  $G$  telle que pour tout  $0 \leq i < n$ ,  $u_i$  est un parent de  $u_{i+1}$ . Un ensemble  $S$  de sommets est dit *indépendant* si pour tout  $u, v$  de  $S$ ,  $u$  n'est pas un ancêtre de  $v$ .

Dans la plupart des cas étudiés dans ce chapitre, nous supposons que l'ensemble de sommets du graphe  $G$  sur lequel on travaille est un ensemble infini dénombrable de points de  $\mathbb{R}^d$  globalement invariant par  $d$  translations linéairement indépendantes. Par abus de langage, nous appellerons un tel graphe un *réseau*. Par exemple en dimension deux, les réseaux étudiés seront les réseaux carré, triangulaire et hexagonal.

## 1.2 Animal : Définition

Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un *animal* (de site) sur  $G$  est un ensemble connexe et fini de sommets (voir Figure 2.1). Un sommet de l'animal est appelé un *site*. L'*aire* d'un animal  $A$ , notée  $|A|$ , est définie comme le cardinal de l'ensemble des sites qui le constituent. Un sommet qui n'appartient pas à l'animal, mais voisin de l'un des sites, est appelé sommet *périmétrique*. Le nombre de sommets périmétriques est le *périmètre de site* (ou plus simplement dans la suite *périmètre*) de l'animal.

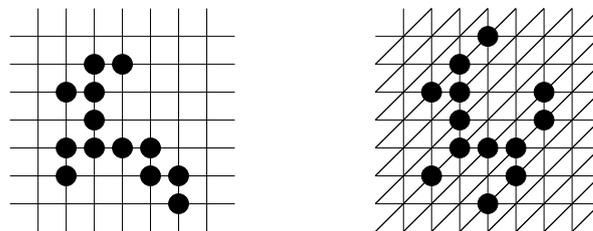


Fig. 2.1 – Un animal d'aire 13 sur le réseau carré (à gauche) et sur le réseau triangulaire (à droite)

*Remarque 2.1.* On peut définir la notion symétrique d'*animaux de lien* en considérant des ensembles connexes d'arêtes de  $G$ , l'aire d'un animal est alors le nombre d'arêtes qui le constituent.

En fait, les animaux de lien sont des cas particuliers d'animaux de site puisqu'il existe une bijection entre les animaux de lien d'aire  $n$  sur un graphe  $G$  et les animaux de site d'aire  $n$  sur  $L(G)$  le *graphe adjacent* (ou « line graph ») associé à  $G$  défini comme suit. L'ensemble des sommets de  $L(G)$  est en bijection avec l'ensemble des arêtes de  $G$  et deux sommets sont voisins dans  $L(G)$  si et seulement si les arêtes associées dans  $G$  ont une extrémité commune. On représente sur la figure 2.2 un animal de lien sur le réseau carré et l'animal de site correspondant sur le graphe adjacent du réseau carré.

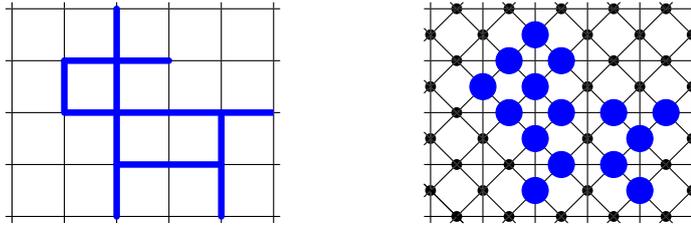


Fig. 2.2 – Un animal de lien sur le réseau carré (à gauche) et l'animal de site correspondant sur le graphe adjacent.

Si l'on en croit Stauffer ([SA92]), on appelle ces objets « animaux », « *since they have a certain similarity with multicellular living beings which might enter your nightmares if you counted them too long* ».

En effet, si on note  $a_n$  le nombre d'animaux d'aire  $n$  sur un réseau de dimension au moins 2, par exemple sur le réseau carré  $\mathbb{Z}^2$ , trouver une formule exacte pour  $a_n$  semble actuellement hors de portée. De manière générale, les seuls résultats prouvés portent sur l'énumération asymptotique et restent très faibles. On prouve par un argument assez simple de sur-multiplicativité que  $a_n^{1/n}$  converge vers une constante  $\mu$  (qui dépend du réseau), on appelle  $\mu$  la *constante de connectivité*. Plus précisément, on conjecture que :

$$a_n \sim A\mu^n n^{\gamma-1}, \quad (1.1)$$

où  $A$  et  $\gamma$  sont des constantes dépendant du réseau. On conjecture de plus que  $\gamma$  ne dépend que de la dimension du réseau (ce serait par exemple le même pour les réseaux carré, triangulaire et hexagonal) : c'est ce qu'on appelle l'*hypothèse d'universalité*. On est bien loin aujourd'hui d'établir des résultats aussi précis : obtenir une estimation précise de  $\mu$ , même dans le cas du réseau carré, est un problème difficile et on ne dispose, pour le moment, que de l'encadrement suivant [KR73] :

$$3.87 < \mu < 4.65.$$

Devant la difficulté de ce problème, le nombre de travaux qui lui ont été consacrés et le peu de résultats obtenus, il est légitime de s'interroger sur les motivations à étudier un tel sujet. Outre la curiosité naturelle du physicien/mathématicien/informaticien, piquée au vif par ces objets, en apparences simples et qui se révèlent sources de problèmes extrêmement difficiles, la principale motivation vient de la physique. Ces objets interviennent naturellement en physique statistique dans les modèles de croissance cellulaire, c'est d'ailleurs peut-être de ce côté qu'il faut chercher une étymologie du terme « animal », étymologie moins amusante mais certainement plus réaliste que celle de Stauffer. Il existe également un lien ténu entre l'énumération d'animaux et les modèles de percolation. On le présente dans la partie 1.4 après avoir rappelé quelques notions de percolation dans la partie 1.3.

### 1.3 Quelques rappels de percolation

Le modèle mathématique de percolation (par arêtes) a été introduit par Broadbent et Hammersley en 1957 ([BH57]). Le processus de percolation donne un cadre général permettant aussi bien de modéliser la propagation d'un fluide à travers un milieu aléatoire que la propagation d'une maladie dans une population, ... Ce problème, bien que

récent, a connu de nombreux développements aussi bien dans la communauté mathématique que physicienne. On se restreint ici aux définitions et aux résultats principaux pour la percolation par sites, on pourra consulter [Gri89] ou [SA92] pour un panorama de ce domaine.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté supposé localement fini et tel que  $V$  est dénombrable. On distingue un sommet  $O$  de  $G$  qu'on appelle son *origine*. Soit  $(X_v)_{v \in V \setminus \{O\}}$  une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , ie telles que :

$$P(X_v = 0) = p \quad \text{et} \quad P(X_v = 1) = 1 - p.$$

Le sommet  $v$  est dit *ouvert* si  $X_v = 1$  et *fermé* sinon. On adopte la convention selon laquelle l'origine est ouverte avec probabilité 1.

**Définition 2.2.** *Un amas (ou cluster) de percolation est un ensemble connexe de sommets ouverts maximal pour l'inclusion.*

*On dit que le système percole ou qu'il y a percolation, si l'origine appartient à un amas infini.*

Calculer la *probabilité de percolation*  $P_{\text{per}}(p)$ , c'est-à-dire la probabilité que le système percole pour un  $p$  fixé, est un des problèmes importants de la théorie de la percolation. En dehors des cas évidents  $P_{\text{per}}(0) = 0$  et  $P_{\text{per}}(1) = 1$ , on ne connaît pas la valeur de  $P_{\text{per}}$  sur des réseaux non triviaux de dimension supérieure ou égale à deux, pas même sur le réseau carré.

Conformément à l'intuition, on peut montrer que  $P_{\text{per}}$  est croissante avec  $p$  par un argument de couplage. On parvient également à montrer que  $P_{\text{per}}$  est une fonction continue, sauf éventuellement en un point.

La détermination de  $P_{\text{per}}$  étant très difficile, une première étape consiste à déterminer le *seuil de percolation* ou *percolation critique*  $p_c$  défini par :

$$p_c = \inf\{p \mid P(p) > 0\}, \quad (1.2)$$

Mais même pour ce problème plus simple, on ne dispose d'aucun résultat exact sur les réseaux de dimension supérieure ou égale à deux. Même déterminer si  $p_c > 0$  n'est pas toujours résolu (notez que s'il existe  $D \in \mathbb{N}$  tel que le degré des sommets de  $G$  est borné par  $D$ , il est facile de voir que  $p_c \geq 1/D > 0$ ).

En plus d'être une étape intermédiaire indispensable au calcul de  $P_{\text{per}}$ , calculer le seuil de percolation a un intérêt propre. Dans le cas où  $p_c$  est strictement positif, il existe en effet un véritable phénomène de *transition de phase* à  $p_c$  : pour  $p < p_c$ , il n'existe presque jamais d'amas infini tandis que pour  $p > p_c$ , il en existe exactement un presque sûrement. La distribution de la taille des amas finis est également très différente selon que l'on se place en régime sous-critique ou sur-critique.

Des phénomènes intéressants semblent également se produire pour des  $p$  proches de la percolation critique, mais ils sont méconnus. Il existerait une constante  $\beta > 0$  ne dépendant que de la dimension du réseau et telle que  $P_{\text{per}}(p) \approx A(p - p_c)^\beta$  lorsque  $p$  tend vers  $p_c^+$ , où  $\approx$  désigne l'équivalence logarithmique, i.e. on conjecture :

$$\lim_{p \downarrow p_c} \frac{\log P_{\text{per}}(p)}{\log(p - p_c)} = \beta$$

On s'est restreint dans cette section à des rappels concernant la percolation par sites, puisque l'objectif ici est de relier la percolation par sites à l'énumération d'animaux de site. Cependant, on peut définir de manière totalement symétrique la percolation par arêtes (reliée à l'énumération d'animaux de lien) pour laquelle chaque arête est ouverte ou fermée avec probabilité  $p$  et  $1 - p$  et ce indépendamment des autres arêtes. On définit alors de la même façon un amas de percolation, la probabilité de percolation et le seuil de percolation.

De la même façon (c.f. Remarque 2.1) que les animaux de lien sont des cas particuliers d'animaux de site, le passage au graphe adjacent montre que la percolation par arêtes est un cas particulier de percolation par sites (voir également pp.24-29 de [Gri89]). Il faut noter qu'il existe également, à graphe fixé, des liens entre la percolation par arêtes et la percolation par sites. Par exemple, pour tous les graphes  $p_c^{\text{arête}} \leq p_c^{\text{site}}$  où l'inégalité est stricte sur une grande famille de graphes, par exemple sur  $\mathbb{Z}^d$  dès que  $d \geq 2$ . Pour le réseau carré notamment, on montre que  $p_c^{\text{arête}} = 1/2$  (par un argument de dualité élémentaire et élégant), tandis qu'on estime  $p_c^{\text{site}}$  à 0.59.

## 1.4 Animaux et percolation

Quel est le lien entre le problème combinatoire d'énumération des animaux et le problème probabiliste de percolation? En cas de non percolation, l'origine du graphe appartient à un amas fini. Cet amas est par définition un ensemble connexe de sommets, c'est donc également un animal dont on note  $n$  l'aire et  $k$  le périmètre. La probabilité que cet amas apparaisse dans une configuration de percolation est donc égale à  $p^n(1 - p)^k$  (probabilité de tirer 1 sur tous les sites de l'amas et 0 sur tous les sommets périphériques).

La probabilité de non-percolation est donc reliée à l'énumération d'animaux selon leur aire et leur périmètre de site. Soit  $a_{n,k}$  le nombre d'animaux d'aire  $n$  et de périmètre  $k$ , on définit la série génératrice « aire-périmètre » des animaux par :

$$A(t, r) = \sum_{n,k} a_{n,k} t^n r^k.$$

En considérant la probabilité de non-percolation, c'est-à-dire la probabilité que l'origine appartienne à un amas fini, on obtient le lien suivant entre cette série et la probabilité de percolation :

$$1 - P_{\text{per}}(p) = \sum_{n,k} p^n (1 - p)^k a_{n,k} = A(p, 1 - p).$$

Le calcul de la probabilité de percolation se ramène donc au calcul, plus difficile *a priori*, de la série génératrice aire-périmètre des animaux.

Ce lien reste toutefois assez théorique. En effet, calculer la série aire-périmètre semble illusoire : en obtenir la valeur pour  $r = 1$  (c'est-à-dire calculer la série génératrice des animaux énumérés selon leur aire) constituerait déjà une avancée considérable.

Devant ces impasses combinatoires, des modèles plus simples d'animaux ont vu le jour. L'un d'entre eux consiste à n'autoriser les animaux à s'étendre que dans une direction privilégiée du réseau : c'est ce qu'on appelle le modèle d'animaux dirigés, on le présente dans la prochaine partie.

## 2 Animaux dirigés

### 2.1 Définition

Si les modèles de percolation ont été, dès le départ, définis sur des graphes orientés [BH57], il a fallu attendre les années 70 pour que certains modèles de physique statistique soient étudiés selon une direction privilégiée. Dans plusieurs cas (animaux, mais également polygones [Tem56], chemins auto-évitants [RM83]), se restreindre ainsi à une sous-classe dirigée permet d'obtenir des résultats alors qu'on n'en a aucun dans le cas général. De nombreux articles sur les *animaux dirigés* ont ainsi vu le jour dans les années 80 (voir par exemple [HN83],[Dha83] sur lesquels on revient dans les sections 2.2 et 2.3).

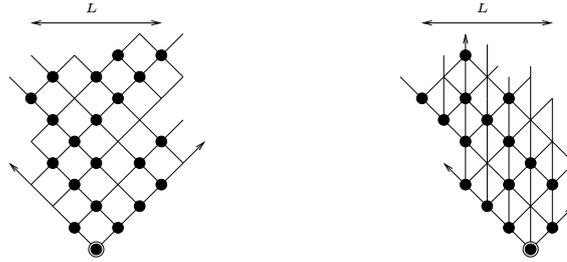


Fig. 2.3 – Animaux dirigés sur le réseau carré et le réseau triangulaire dont la source est le sommet encerclé. On note  $L$  la largeur des animaux.

Soit  $G$  un graphe orienté et  $S$  un ensemble fixé de sommets de  $G$ , un *animal dirigé* (AD) d'aire  $n$  de source  $S$  (ou issu de  $S$ ) est un ensemble de  $n$  sommets, contenant  $S$ , tel que chaque sommet de  $A$  puisse être atteint depuis un sommet de  $S$  par une chaîne formée uniquement des sommets occupés. On dit que  $A$  est issu d'une *source unique* si  $S$  est un singleton. On note  $\mathcal{A}_S^G$  l'ensemble des AD sur  $G$  issus de  $S$  et  $\mathcal{F}_S^G$  la série génératrice de ces AD comptés selon leur aire, i.e :

$$\mathcal{F}_S^G(t) = \sum_{A \in \mathcal{A}_S^G} t^{|A|} = \sum_{n \geq |S|} a_n t^n,$$

où  $a_n$  est le nombre d'AD sur  $G$  issus de  $S$  et d'aire  $n$ .

La figure 2.3 représente des AD sur les réseaux carré et triangulaire (on a, sur cette figure, représenté ces réseaux en les tournant d'un quart de tour par rapport à leur représentation habituelle, de cette façon, les arcs sont dirigés vers le haut, convention qu'on s'efforcera d'adopter dans la suite). Des exemples de cellules élémentaires de réseaux orientés de dimension trois sont donnés sur la figure 2.4 (c.f. figure 2.8 pour un exemple d'AD sur le réseau 2.4 (a)).

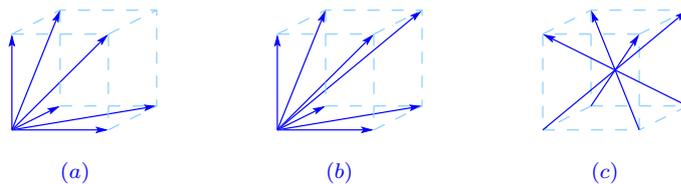


Fig. 2.4 – Réseaux orientés en dimension trois

Les animaux dirigés sont en particulier des animaux (tels que définis dans la partie 1.2). Réciproquement tout animal peut être vu comme un animal dirigé, quitte à prendre un ensemble source suffisamment grand. En pratique, quand on énumère des AD, on se fixe un ensemble  $S$  de sommets et on énumère les AD de source  $S$ . Les mêmes conjectures sont faites pour le comportement asymptotique des AD et pour celui des animaux (énoncée dans (1.1)), mais il est établi que les AD et les animaux n'appartiennent pas à la même *classe d'universalité* : i.e. s'il existe une constante  $\gamma$  (comme définie dans l'équation (1.1)) pour les animaux et les AD,  $\gamma$  prendra des valeurs différentes dans ces deux cas.

Contrairement aux animaux, on dispose de nombreux résultats d'énumération d'AD, les parties suivantes établissent un panorama des différentes méthodes utilisées et des résultats afférents. Elles sont organisées comme suit. La section 2.2 regroupe les premiers résultats d'énumération obtenus par des physiciens dès le début des années 1980 par des méthodes *ad hoc*. Dans la section 2.3, sont présentés les résultats obtenus en utilisant des modèles de gaz. On énonce enfin dans la section 2.4 les résultats obtenus par des méthodes bijectives.

## 2.2 Premiers résultats d'énumération d'animaux dirigés

Les premiers résultats d'énumération d'AD ont été obtenus dès la fin des années 80. Grâce à des formules de récurrence sur le nombre d'AD à source compacte, Dhar, Phani et Barma [DPB82] calculent les premiers termes de la série génératrice des AD sur les réseaux carré, triangulaire et hexagonal. Cela leur permet de conjecturer des formules exactes pour le nombre d'AD de source unique et d'aire fixée sur les réseaux carré et triangulaire et un équivalent asymptotique pour le nombre d'AD de source unique sur le réseau hexagonal. Ces conjectures impliquent notamment, si elles sont vérifiées, que la constante de connectivité sur les réseaux carré et triangulaire est respectivement égale à 3 et à 4.

En utilisant des matrices de transfert, Nadal, Derrida et Vannimenus [NDV82] conjecturent ensuite la valeur du nombre d'AD de source unique et de largeur bornée sur le réseau carré. Leur conjecture généralise celle de [DPB82], puisqu'on peut obtenir cette dernière par passage à la limite quand la largeur tend vers l'infini dans l'expression donnée par Nadal et al. Par ailleurs, ils prouvent que la constante de connectivité sur le réseau carré est bien égale à 3.

Dans [Dha82], Dhar prouve les conjectures de [DPB82] en établissant que la série génératrice des AD comptés selon leur aire sur le réseau carré est égale à :

$$\mathcal{F}^{\text{Sq}}(t) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right), \quad (2.1)$$

et que celle sur le réseau triangulaire est égale à :

$$\mathcal{F}^{\text{Tri}}(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1 \right). \quad (2.2)$$

Une intuition (ou une expertise) remarquable est à la base de ces résultats : dans [Dha82] un modèle de particules correspondant à un modèle d'AD est introduit. Dhar réussit alors à interpréter l'hamiltonien de ce système comme l'hamiltonien d'un modèle de gaz introduit par Baxter [Bax80] (on renvoie le lecteur aux définitions 2.3 relatives aux modèles de gaz). Ce modèle de gaz est un modèle à particules dures sur le réseau carré, avec des interactions au niveau des diagonales résolu dans [Bax80] pour certaines valeurs

de paramètres. Cela est suffisant pour permettre à Dhar d'obtenir les formules (2.1) et (2.2).

Simultanément, Hakim et Nadal [HN83] prouvent les conjectures de [NDV82] en perfectionnant les méthodes de matrices de transfert.

Très peu de temps après, Dhar [Dha83] établit une correspondance entre la densité de certains modèles de gaz et la série génératrice des AD qui constitue une avancée décisive dans l'énumération des AD. Cette approche permet en effet de redémontrer de manière beaucoup plus simple tous les résultats qu'on vient d'énoncer. Elle est également particulièrement intéressante car assez systématique, on lui consacre la prochaine partie.

### 2.3 Animaux dirigés et modèles de gaz

Avant de donner les différents résultats obtenus par des modèles de gaz, on commence par rappeler quelques définitions les concernant.

**Définition 2.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, une occupation de gaz ou une configuration de gaz sur  $G$  est une application  $X$  de  $V$  dans  $\{0, 1\}$ . Les sommets  $v$  pour lesquels  $X(v) = 1$  sont dits occupés, les autres étant dits libres.

Une occupation de gaz à particules dures est une occupation pour laquelle deux sommets voisins ne sont pas occupés simultanément.

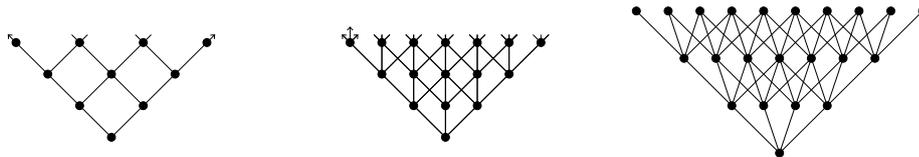
Un modèle de gaz est une loi de probabilité sur les occupations de gaz. Étant donné un modèle de gaz, on appelle densité en un sommet  $v$ , la probabilité que  $v$  soit occupé.

Dans [Dha83], Dhar remarque que la série génératrice des AD sur certains réseaux de dimension  $d$  et que les probabilités d'occupation sous un modèle de gaz défini sur le même réseau vérifient les mêmes équations de récurrence. Il en déduit que la série génératrice des AD sur ces réseaux est l'opposé de la densité de ces modèles de gaz. Il montre également que, pour certains réseaux de dimension  $d$ , le modèle de gaz peut se ramener à un modèle de gaz de dimension  $d - 1$  de la façon suivante. Il décompose le réseau initial en « couches » qui sont chacune des réseaux de dimension  $d - 1$  et montre ensuite que la restriction du modèle de gaz à chacune de ces couches est égale à la distribution stationnaire de transitions probabilistes entre celles-ci. Dans ce cas, il « suffit » de calculer la distribution stationnaire pour obtenir la densité du modèle de gaz. Ce calcul est simplifié par le fait que la définition des transitions probabilistes implique que le modèle de gaz est porté par des configurations gaz à particules dures.

Ainsi l'énumération des AD sur les réseaux carré et triangulaire (le cas du réseau carré est détaillé dans la section 3.1) est ramené au calcul classique de la densité d'un modèle de gaz à particules dures sur une ligne. Cela permet de retrouver de manière plus directe les résultats de [Dha82] et [NDV82].

De même, l'énumération des AD sur les réseaux représentés sur la figure 2.4(a) et (b) se ramène respectivement à la résolution de modèles de gaz à particules dures sur le réseau carré et sur le réseau triangulaire qui sont respectivement connus sous le nom de modèle des carrés durs et modèle des hexagones durs. Ce dernier ayant été résolu par Baxter [Bax80], la série génératrice des AD sur le réseau de la figure 2.4(b) est obtenue comme solution d'une équation algébrique de degré 12 qui permet par exemple d'obtenir que le nombre  $a_n$  d'AD sur ce réseau est asymptotiquement équivalent à  $A\mu^n n^{-5/6}$ , où  $\mu = (9 + \sqrt{5})/2$ . En revanche, le modèle des carrés durs est, à ce jour, toujours ouvert.

Outre le fait que l'approche initiée par Dhar permet de donner des preuves plus simples de résultats connus, elle fournit un outil assez systématique dans l'énumération d'AD ; elle a depuis été largement développée et généralisée. Bousquet-Mélou et Conway [BMC96] reprennent ces idées pour ramener l'énumération des AD sur la famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)$  à un modèle de gaz à particules dures sur une ligne (les réseaux  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$  sont représentés sur la figure 2.5, la définition générale de  $\mathcal{L}_m$  est donnée dans la section 6.1). La résolution de ce modèle de gaz leur permet d'obtenir la série génératrice des AD de source unique sur les réseaux  $\mathcal{L}_m$  comme solution d'une équation algébrique, ce qui permet de montrer que le nombre d'AD d'aire  $n$  sur le réseau  $\mathcal{L}_m$  est équivalent à  $A_m \mu_m^n n^{-1/2}$ . L'apparition du facteur  $n^{-1/2}$  pour toutes les valeurs de  $m$  renforce l'hypothèse d'universalité ( $A_m$  et  $\mu_m$  sont, quant à elles, des constantes dépendant de  $m$ ).

Fig. 2.5 – Les réseaux  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$ 

Dans [BM98], Bousquet-Mélou entreprend une étude systématique de l'approche par modèles de gaz et montre que la plupart des problèmes d'énumération d'AD en dimension deux (selon le périmètre, selon le nombre de boucles (voir la figure 2.6), l'énumération des AD sur le réseau hexagonal, ...) peuvent être ramenés au calcul de distribution stationnaire de modèles de gaz en dimension un.

La résolution de certains des modèles obtenus ont permis d'obtenir la série génératrice bivariée des AD sur réseaux carré et triangulaire, comptés selon leur aire et leur nombre de sommets reposant seulement à droite (voir la figure 2.6).

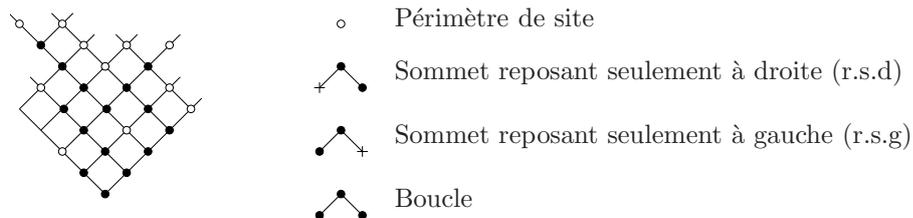


Fig. 2.6 – Animal dirigé sur réseau carré : périmètre de site, sommets r.s.d et r.s.g et boucles.

Tous les résultats décrits dans cette partie reposent, pour des raisons techniques, en fait sur l'étude de modèles de gaz sur une bande de largeur finie du graphe, les résultats sur l'énumération d'animaux dirigés étant ensuite déduits par passage à la limite. Le Borgne et Marckert [LBM07] parviennent à définir un modèle de gaz sur le graphe entier. Ceci leur permet entre autres d'obtenir une description markovienne du modèle de gaz sur le réseau carré qui entraîne des résultats d'énumération d'animaux dirigés sur ce réseau pour des sources variées. On revient en détail sur leur modèle de gaz dans la partie 3.2.

## 2.4 Animaux dirigés et empilements

L'établissement de bijections (compliquées) entre les AD sur réseau carré et les facteurs gauches de mots de Motzkin a donné naissance aux premières preuves bijectives d'énumération [GBV88]. On s'attarde ici sur d'autres preuves bijectives (plus simples) qui reposent sur le lien entre les AD et les empilements [Vie86],[BP93],[CDGB00]. La

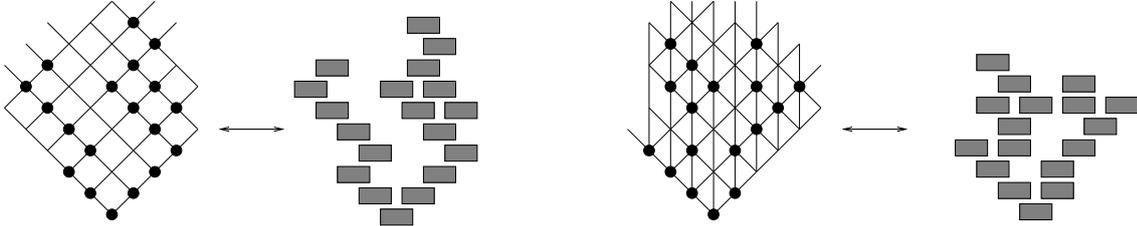


Fig. 2.7 – Les AD sur réseau carré et triangulaire sont des empilements de dominos

figure 2.7 suggère l'existence d'un lien entre les animaux dirigés sur le réseau triangulaire et les empilements de pièces (définis dans la section 2.1 du chapitre 1). En fait, les animaux dirigés sur certains réseaux *sont* des empilements : les animaux dirigés sur réseau carré et triangulaire sont des empilements de dominos (pour le réseau carré, ces empilements sont en fait des empilements *stricts* : deux pièces ne sont jamais exactement superposées), les animaux dirigés sur les réseaux (a) et (b) de la figure 2.4 sont des empilements (stricts pour (a)) d'hexagones (figure 2.8).

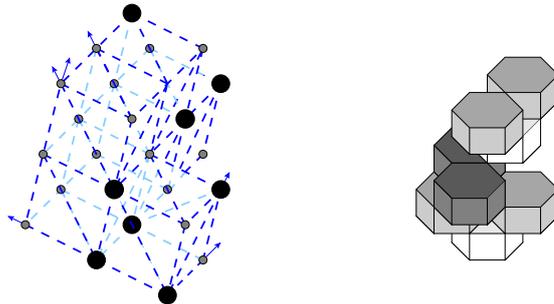


Fig. 2.8 – Les AD sur certains réseaux de dimension trois sont des empilements d'hexagones

Cette façon de voir les animaux conduit également à des preuves bijectives — très appréciées des combinatoristes — des résultats d'énumération d'AD sur les réseaux carré et triangulaire.

Premièrement, les résultats connus sur l'énumération des empilements et rappelés dans la section 2.3 du chapitre 1 permettent d'obtenir directement la série génératrice des AD de largeur bornée sur ces réseaux (on passe des empilements quelconques aux empilements stricts par un simple changement de variable dans la série génératrice).

Ensuite si on considère des AD dont la largeur de la source n'est pas bornée, leur série génératrice n'est pas définie (il y a par exemple dans ce cas un nombre infini d'AD d'aire 1). On se restreint alors aux AD issus d'une source unique, les empilements correspondants sont des *pyramides*, c'est-à-dire des empilements n'admettant qu'une unique pièce minimale. On peut énumérer ces pyramides en les factorisant de manière canonique en deux pyramides plus petites (figure 2.9). Cette factorisation se traduit par deux équations

algébriques pour les séries génératrices. En notant  $P(t)$  la série génératrice des pyramides et  $D(t)$  celle des demi-pyramides comptées selon leur nombre de pièces, on obtient :

$$P(t) = P(t) + D(t)P(t) \tag{2.3}$$

$$D(t) = t + 2tD(t) + tD(t)^2. \tag{2.4}$$

On retrouve alors l'assertion (2.2) et une approche similaire permettrait de redémontrer (2.1). En généralisant la décomposition des empilements en pyramides, Corteel,

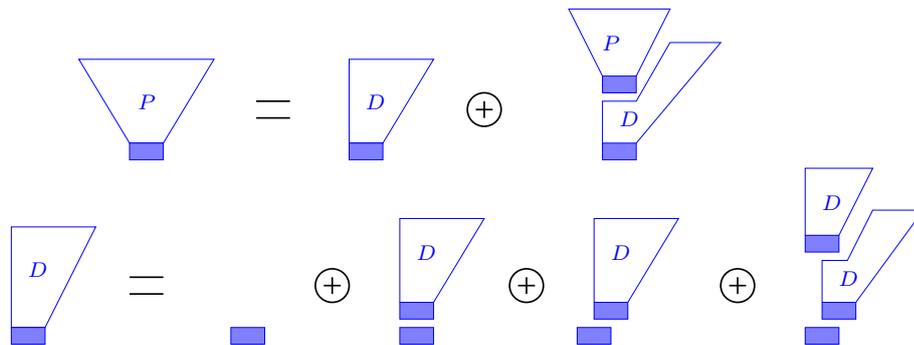


Fig. 2.9 – Factorisation des pyramides (P) et des demi-pyramides (D) de dominos

Denise et Gouyou-Beauchamps ([CDGB00]) ont obtenu une preuve bijective des séries génératrices des AD sur les réseaux  $\mathcal{L}_m$  (ces séries avaient été auparavant obtenues à l'aide de modèles de gaz [BMC96]).

Par ailleurs, la vision en termes d'empilements permet également d'obtenir des résultats d'énumération en fonction de plusieurs paramètres. Par exemple, elle donne une preuve immédiate du fait que la série génératrice des AD sur réseau triangulaire, comptés selon l'aire (variable  $t$ ) et le nombre de sommets reposant seulement au centre (variable  $x$ ), est égale  $\mathcal{F}^{\text{Sq}}(t/(1 - xt))$  (on rappelle que  $\mathcal{F}^{\text{Sq}}$  est la fonction génératrice des AD issus d'une source unique sur réseau carré).

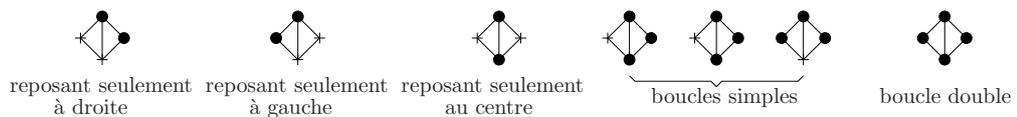


Fig. 2.10 – Position des sommets d'un animal dirigé sur réseau triangulaire

En plus de fournir de nouvelles preuves élégantes de résultats connus ou d'établir de liens entre différents modèles, la représentation des animaux dirigés sous forme d'empilements permet également d'obtenir des résultats complètement nouveaux. Par une méthode reposant cruciallement sur les aspects géométriques des empilements, Bacher [Bac08] a récemment prouvé une ancienne conjecture de Conway sur le périmètre de site moyen des AD sur le réseau carré :

**Théorème 2.4.** Soit  $A$  un AD issu d'une source unique sur le réseau carré, on note  $p(A)$  son périmètre de site, alors :

$$\sum_A p(A)t^{|A|} = \frac{1}{2t(1+t)} \left( \frac{1-3t+2t^2+t^3-3t^4}{(1-3t)^{3/2}(1+t)^{1/2}} - 1+t+t^2 \right).$$

*Remarque 2.5.* Soit  $F(t, r) = \sum_A r^{|p(A)|} t^{|A|}$  la série bivariable comptant les animaux dirigés de source unique sur le réseau carré selon leur aire (variable  $t$ ) et leur périmètre (variable  $r$ ), la série calculée par Bacher est égale à  $\frac{\partial A}{\partial r}(t, 1)$ . Mais la connaissance de cette dernière ne permet malheureusement pas de remonter des informations sur la série  $A(t, r)$  qui n'est pas connue et qu'on suppose non algébrique.

Malheureusement, les preuves simples et esthétiques fournies par l'interprétation des animaux dirigés comme empilements en dimension deux, ne s'étendent pas à la dimension trois : on ne sait pas factoriser efficacement les pyramides d'hexagones.

### 3 Modèles de gaz

On rappelle dans cette section toutes les notions sur les modèles de gaz nécessaires pour énoncer nos résultats sur l'énumération d'AD (présentés dans les sections 4, 5 et 6). On détaille dans la première partie l'application au réseau carré de la méthode initiée par Dhar [Dha83], en suivant la formulation due à Bousquet-Mélou [BM98]. Dans la seconde partie, on donne les principales étapes de la construction du gaz défini par Le Borgne et Marckert [LBM07] sur lequel portent nos résultats.

#### 3.1 Modèle de gaz sur un cylindre

Que l'on s'intéresse à des réseaux simples comme le réseau carré ou à des réseaux plus complexes, comme ceux définis et étudiés dans la section 6, les méthodes utilisées pour calculer la distribution stationnaire d'un modèle de gaz sont assez proches. Pour rendre la partie 6 plus compréhensible et naturelle, on reprend dans cette partie le calcul de la série génératrice des AD sur réseau carré proposé par Bousquet-Mélou dans [BM98].

Le réseau carré orienté – noté  $Sq$  – est le graphe dont l'ensemble des sommets est indexé par  $\mathbb{Z}^2$  et tel que de chaque sommet  $(i, j)$  sont issus deux arcs menant à  $(i, j+1)$  et  $(i+1, j+1)$ . Si on considère maintenant que les abscisses des sommets ne sont plus indexées par  $\mathbb{Z}$  mais par  $[N] := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , on obtient un graphe de largeur bornée avec des conditions cycliques aux bords. Ce graphe est une *version cyclique* de  $Sq$  de largeur  $N$ , on le note  $Sq^{(N)}$ . Un exemple d'AD sur ce graphe pour  $N = 6$  est donné sur la figure 2.11.

Soit  $C \subset [N]$ , on note  $\mathcal{F}_C^{(N)}$  la série génératrice des AD de source  $C$  sur  $Sq^{(N)}$ . En décomposant un AD selon sa première ligne, on obtient la relation suivante entre les séries génératrices :

$$\mathcal{F}_C^{(N)}(x) = x^{|C|} \sum_{D \subset \mathcal{N}(C)} \mathcal{F}_D^{(N)}(x), \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{N}(C) = \{i, (i+1) \bmod N, \text{ pour } i \in C\}$  est l'ensemble des sommets périmétriques de  $C$ .

Un modèle de gaz est défini sur  $Sq^{(N)}$  par la donnée de ses probabilités de transition ligne par ligne. On appelle  $j$ -ème ligne du réseau l'ensemble des sommets d'ordonnée  $j$ .

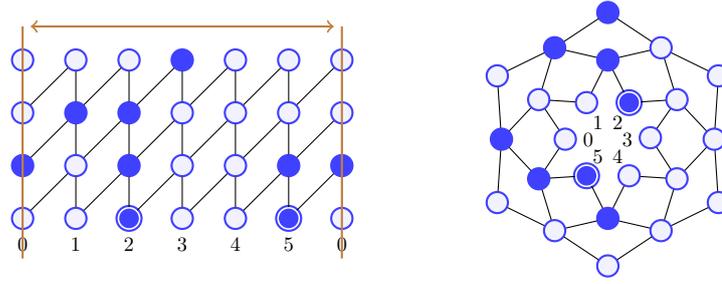


Fig. 2.11 – Le même animal dirigé représenté sur la version cyclique de largeur 6 du réseau carré (les arêtes sont dirigées vers le haut à gauche et vers l'extérieur à droite).

Soit  $Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1})$  le vecteur aléatoire donnant l'occupation du gaz sur la ligne  $j + 1$  de  $\text{Sq}^{(N)}$  et soit  $p \in (0, 1)$ , conditionnellement à  $Y$ , l'occupation du gaz  $X$  sur la ligne  $j$  est donnée, pour  $x, y \in \{0, 1\}^N$ , par :

$$P(X = x | Y = y) = \prod_{i=0}^{N-1} P(X_i = x_i | Y_i = y_i, Y_{i+1} = y_{i+1}), \quad (3.2)$$

où

$$P(X_i = 1 | Y_i = y_i, Y_{i+1} = y_{i+1}) = \begin{cases} p & \text{si } y_i = y_{i+1} = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit un sommet est occupé (i.e. le gaz vaut 1 sur ce sommet) si et seulement si ses deux enfants sont libres et si le tirage d'une Bernoulli de paramètre  $p$  donne 1. De manière plus formelle, en notant  $X^j = (X_0^j, \dots, X_{N-1}^j)$  le vecteur (aléatoire) donnant l'occupation du gaz sur la  $j$ -ème ligne de  $\text{Sq}^{(N)}$ , ces transitions peuvent se récrire sous la forme :

$$X_i^j = B_i^j(p)(1 - X_{i+1}^{j+1})(1 - X_{i+1}^j) \text{ pour } i \in [N] \text{ et } j \in \mathbb{Z}$$

La suite  $(X^j)_j$  est une chaîne de Markov quand on parcourt les  $j$  dans l'ordre décroissant. Elle a un nombre fini ( $2^N$ ) d'états et est irréductible (i.e. on peut passer d'une configuration de gaz sur une ligne à n'importe quelle autre configuration en un nombre fini d'étapes), un résultat classique sur les chaînes de Markov à ensemble d'états finis implique alors l'existence et l'unicité d'une probabilité stationnaire, on la note  $\mu^{(N)}$ .

Pour obtenir des équations de récurrence similaires à (3.1) pour le modèle de gaz, on introduit pour  $C \subset [N]$  :

$$f_C^j = \mu^{(N)}(X_i^j = 1, \text{ si } i \in C),$$

qui est la probabilité que les sommets de la ligne  $j$  dont l'abscisse appartient à  $C$  soient occupés. De manière similaire, on pose :

$$F_C^j = \mu^{(N)}(X_i^j = 1, \text{ si } i \in C \text{ et } X_i^j = 0 \text{ sinon})$$

la probabilité que les seuls sommets occupés de la ligne  $j$  soient ceux dont l'abscisse appartient à  $C$ .

Les sommet de la ligne  $j$  dont l'abscisse appartient à  $C$  sont occupés si et seulement si leurs enfants sont libres et si les tirages de  $C$  Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$  donnent tous 1, d'où :

$$f_C^j(p) = p^{|C|} P(X_i^{j+1} = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{N}(C)) = p^{|C|} \sum_{D \subset \mathcal{N}(C)} (-1)^{|D|} f_D^{j+1}(p) \quad (3.3)$$

où la dernière égalité est obtenue par l'inclusion-exclusion. La loi  $\mu^{(N)}$  étant définie comme la mesure de probabilité stationnaire pour  $(X^j)$ ,  $f_C^j$  ne dépend donc pas de  $j$ , on note  $f_C$  sa valeur. On obtient ainsi l'équation de récurrence recherchée pour le modèle de gaz en récrivant (3.3) :

$$f_C(p) = p^{|C|} \sum_{D \subset \mathcal{N}(C)} (-1)^{|D|} f_D(p). \quad (3.4)$$

De même, en notant  $F_C = F_C^j$ , on peut obtenir l'équation de récurrence :

$$F_C(p) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|C|} \sum_{D \subset [N] \setminus \mathcal{N}(C)} (1-p)^{N-|\mathcal{N}(D)|} F_D(p) \quad (3.5)$$

On vérifie qu'une solution à cette dernière est donnée par :

$$F_C(p) = \frac{1}{Z_N} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|D|} (1-p)^{|\mathcal{N}(D)|} \quad (3.6)$$

où  $Z_N$  est la fonction de partition du modèle égale à

$$Z_N = \sum_{D \subset [N]} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|D|} (1-p)^{|\mathcal{N}(D)|}.$$

En comparant les équations (3.1) et (3.4), on retrouve le lien établi par Dhar entre la série génératrice des AD et le modèle de gaz :

$$\mathcal{F}_C^{(N)}(-p) = (-1)^{|C|} f_C(p). \quad (3.7)$$

En notant  $\mathcal{F}_s^{(N)}$  la série génératrice des AD issus d'une source unique  $s$ , l'équation précédente se réécrit :

$$\mathcal{F}_s^{(N)}(-p) = (-1)^{|C|} f_s(p) = \mu^{(N)}(X_0 = 1),$$

qui est la densité du modèle de gaz sur  $\text{Sq}^{(N)}$ . Ce lien permet déjà d'obtenir la série génératrice des AD de largeur bornée sur le réseau carré. Par ailleurs, il est clair que pour  $n \leq N$ , il y a le même nombre d'AD d'aire  $n$  et de largeur bornée par  $N$  que d'AD d'aire  $n$  sans restriction sur leur largeur. Plus formellement, cela revient à dire que les  $N$  premiers coefficients de  $\mathcal{F}_s^{(N)}$  coïncident avec ceux de  $\mathcal{F}_s^{\text{Sq}}$ , autrement dit  $(\mathcal{F}_s^{(N)})$  converge vers  $\mathcal{F}_s^{\text{Sq}}$  dans l'espace des séries formelles. Pour calculer la limite de  $\mu^{(N)}(X_0 = 1)$  quand  $N$  tend vers l'infini, on définit une matrice  $V$  de taille  $2 \times 2$  par  $V_{0,0} = 1$ ,  $V_{1,0} = 1-p$  et  $V_{0,1} = V_{1,1} = p$ , on peut alors remarquer (en observant que  $(1-p)(p/(1-p)) = p$ ) que l'équation (3.6) se réécrit sous la forme (c.f. figure 2.12) :

$$F_C = \frac{1}{Z_N} \prod_{i=0}^{N-1} V_{y_i, y_{i+1} \bmod N}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} y_i = 1 & \text{si } i \in C, \\ y_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le même ordre d'idée, la fonction de partition  $Z_N$  se réinterprète comme la trace de  $V^N$  et est donc égale à  $\lambda_1^N + \lambda_2^N$  où  $\lambda_1 > \lambda_2$  sont les valeurs propres de  $V$  et sont égales à  $\frac{1+p \pm \sqrt{1+2p-3p^2}}{2}$ . Bousquet-Mélou utilise alors l'argument classique de physique statistique selon lequel la densité est égale à la dérivée logarithmique de la fonction de partition, ce qui lui permet de conclure.

Dans [LBM07, Section 5.3], une approche légèrement différente est proposée. Elle consiste à calculer la probabilité que le sommet d'abscisse 0 soit occupé qui est égale à  $W_N/Z_N$  où  $W_N := (Y^N)_{1,1}$ . Un peu d'algèbre linéaire permet d'obtenir  $W_N = \lambda_1^N (\lambda_1 - 1) + \lambda_2^N (\lambda_2 - 1) / (\lambda_2 - \lambda_1)$ , et donc

$$\frac{W_n}{Z_N} \xrightarrow{N} \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-1 + p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{2\sqrt{1 + 2p - 3p^2}},$$

ce qui permet de retrouver la série génératrice des AD sur le réseau carré.

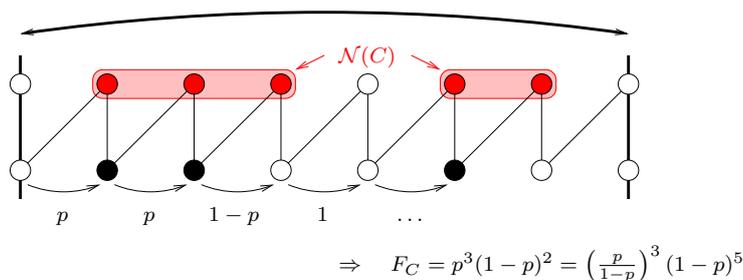


Fig. 2.12 – Le calcul de  $F_C$  par la méthode matricielle sur le réseau carré de largeur 7 (les sommets pleins de la ligne du bas appartiennent à  $C$  et ceux de la ligne du haut appartiennent à  $\mathcal{N}(C)$ ).

*Remarque 2.6.* On ne s'intéresse dans ce paragraphe qu'à l'énumération des AD selon leur aire. Dans [BM98], pour obtenir des résultats d'énumération selon d'autres paramètres, le modèle de gaz est enrichi par l'introduction de quatre constantes  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  qui donnent la probabilité d'occupation d'un sommet en fonction de chacun des 4 états possibles de ses enfants. Pour certaines valeurs de ces paramètres (des conditions suffisantes sont données), la distribution stationnaire du modèle de gaz peut être calculée.

### 3.2 Modèle de gaz sur le graphe entier

Dans [LBM07], Le Borgne et Marckert propose un modèle de gaz défini directement sur le graphe sur lequel on travaille et non sur des versions cylindriques de celui-ci. Cette section est consacrée à ce modèle, fondamental dans la suite puisque tous les résultats établis dans les sections 4 et 6 reposent sur son existence.

Tout comme les modèles de gaz décrits dans la section précédente, ce modèle permet de relier la probabilité d'occupation de certains sites et l'énumération d'AD issus de ces sites. En fait la nature du lien entre le modèle de gaz et l'énumération d'AD obtenu dans ce travail diffère un peu de ce qu'on a vu jusqu'à présent. Ici, il s'agit de construire *simultanément*, sur le même espace de probabilité, un modèle de gaz et un modèle d'AD aléatoires. Ce couplage établit un lien entre le gaz et les animaux dirigés au niveau des objets et non plus uniquement au niveau des équations.

On présente dans la section 3.2.1 la construction simultanée du modèle de gaz et du modèle d'AD. On rappelle ensuite certains résultats de [LBM07] sur le lien entre gaz et animaux et leurs applications au réseau carré.

#### 3.2.1 Construction du modèle de gaz

Dans la suite de ce chapitre, on ne considère que des graphes  $G$  orientés vérifiant les propriétés suivantes, on dit dans ce cas que  $G$  est *agréable* :

1.  $G$  est acyclique,
2. le degré sortant de chaque sommet de  $G$  est fini (autrement dit,  $G$  est localement fini, mais en un sens dirigé : un sommet peut éventuellement avoir un nombre infini de parents).

L'espace de probabilités sur lequel on travaille est  $\Omega = \{a, b\}^V$  muni de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}$  engendrée par les sous-ensembles finis de sommets. On définit comme loi de probabilité sur cet espace, la probabilité produit  $P_p = (p\delta_a + (1-p)\delta_b)^{\otimes V}$ , où  $\delta_a$  est la mesure de Dirac sur  $\{a\}$ . Autrement dit  $\omega \in \Omega$  est un coloriage des sommets de  $G$  et sous la loi  $P_p$

chaque sommet est colorié, indépendamment des autres sommets, en  $a$  (resp. en  $b$ ) avec probabilité  $p$  (resp.  $1 - p$ ). Pour un sommet  $x$  de  $G$ , on note  $\omega(x)$  la couleur de  $x$ .

A partir de ce coloriage aléatoire vont être définis, de manière déterministe, un modèle d'AD et de gaz aléatoires.

**Définition 2.7.** Soit  $S$  un ensemble de sommets de  $G$  et  $\omega$  un coloriage aléatoire de  $G$ . On note  $S_\bullet(\omega) = \{x \in S, \omega(x) = a\}$ , le sous-ensemble (aléatoire) de  $S$  de couleur  $a$ .

On définit ensuite  $\mathbf{A}^S$  comme l'AD maximal (au sens de l'inclusion) de source  $S_\bullet(\omega)$  et dont les sites sont les sommets colorés en  $a$  qui peuvent être atteints depuis  $S_\bullet(\omega)$  par un chemin dont tous les sommets sont coloriés en  $a$  (voir la figure 2.13)

Ce modèle d'AD est une variante des modèles de percolation définis dans la section 1.3 pour des graphes dirigés dont l'origine (ou la source) peut éventuellement être un ensemble de sommets et non plus uniquement un singleton (« colorer » les sommets en  $a$  et  $b$  et non plus en 0 et 1 sert juste à éviter les conflits de notation avec le modèle de gaz (à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ) défini dans la suite).

Pour un ensemble  $S$  tel que  $|S| \geq 1$ , l'AD aléatoire  $\mathbf{A}^S$  peut être infini avec une probabilité strictement positive. Cette probabilité est naturellement liée à la probabilité de percolation dirigée par sites sur le graphe  $G$ , de la manière suivante. On rappelle que  $p_c^G$  désigne le seuil de percolation par sites sur le graphe  $G$ , on montre facilement que :

$$p_c^G = \sup\{p : P_p(|\mathbf{A}^S| < \infty) = 1 \text{ pour tout } |S| < \infty\}. \quad (3.8)$$

Pour un graphe quelconque  $G$  (et même pour les exemples les plus simples de réseaux en dimension au moins égale à deux), on ne connaît pas la valeur de  $p_c$ . Néanmoins, s'il existe un  $D$  tel le degré sortant de chaque sommet du graphe est majoré par  $D$ , on montre que  $p_c \geq 1/D > 0$  (voir la proposition 2.2 de [LBM07]). Cela permet de définir le modèle d'AD aléatoire pour tout  $p$  situé dans un voisinage de 0, ce qui sera suffisant dans nos applications (c.f. section 6).

On définit maintenant l'occupation  $X^G$  du modèle de gaz à partir du coloriage aléatoire du graphe  $G$ . On suppose toujours qu'on s'est placé en régime sous-critique, i.e. que  $p < p_{crit}^G$ .

Soit  $\omega = (\omega(v))_{v \in V}$ , un coloriage des sommets de  $G$ , on définit :

$$X^G(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(v) = b \\ \prod_{v' \text{ enfant de } v} (1 - X^G(v')) & \text{si } \omega(v) = a \end{cases}. \quad (3.9)$$

Comme on s'est placé en dessous du seuil de percolation, la définition récursive de l'occupation de gaz termine p.s. en un nombre fini d'étapes. On donne sur la figure 2.13 un exemple d'occupation de gaz obtenue à partir d'un coloriage des sommets.

*Remarque 2.8.* Supposer  $p < p_{crit}$  est une condition suffisante mais non nécessaire pour assurer que le gaz soit bien défini. En effet, soit  $x \in V$  tel que  $\omega(x) = a$  et  $|A^{\{x\}}(\omega)|$  est infini, le calcul de  $X_x(\omega)$  peut terminer en un nombre fini d'étapes puisque le produit  $\prod_{v' \text{ enfant de } v} (1 - X^G(v'))$  est nul dès qu'un de ses termes est nul.

Notamment, on peut remarquer que ce modèle de gaz construit sur le réseau  $\text{Sq}^{(N)}$ , coïncide avec le modèle défini en section 3.1 par les probabilités de transition entre les lignes, qui lui est défini pour tout  $p \in [0, 1]$ .

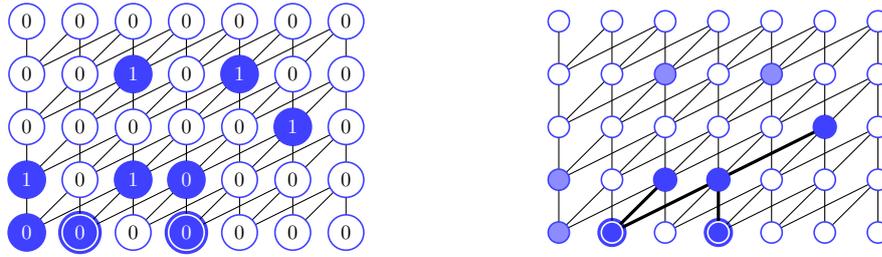


FIG. 2.13 – L’occupation du gaz (à gauche) et l’AD  $\mathbf{A}^S$  sur  $\mathcal{L}_3$ , obtenus à partir du même coloriage des sommets. Les sites coloriés en  $a$  (respectivement en  $b$ ) sont foncés (respectivement blancs) et les sommets de  $S$  sont cerclés.

Il pourrait alors être intéressant de voir si on peut étendre la définition du gaz pour des  $p$  sur-critiques. Cela modifierait en profondeur notre point de vue puisque, comme on va le voir dans la prochaine partie, les preuves combinatoires qui établissent le lien entre le gaz et l’énumération d’AD reposent fortement sur la finitude presque sûre de  $A^S$ .

### 3.2.2 Lien gaz et animaux

Avant d’énoncer les théorèmes qui permettent de relier la probabilité d’occupation d’un sommet du graphe et l’énumération d’AD, on commence par quelques remarques.

Dans l’approche formelle d’énumération des AD (rappelée dans la section 3.1), aucune question de convergence n’est posée. En particulier, on travaille sur les séries génératrices des AD sans se soucier de leur rayon de convergence. Dans l’équation (3.7) l’égalité entre les deux termes doit s’interpréter comme l’égalité entre deux séries formelles satisfaisant les mêmes décompositions récursives. L’approche présentée dans [LBM07] utilise de nombreux résultats probabilistes, elle ne peut donc pas s’affranchir de ces notions de convergence.

Soit  $G$  un graphe dirigé agréable (i.e. vérifiant les propriétés énoncées au début de la section 3.2.1) et  $S$  un ensemble fini de sommets de  $G$ , on note  $R_S^G$ , le rayon de convergence de  $\mathcal{F}_S^G$ . Quand  $S = \{x\}$  est réduit à un singleton, on abrège  $R_{\{x\}}^G$  en  $R_x^G$ .

**Propriété 2.9.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté agréable et soit  $x$  un sommet de  $G$ , alors*

$$R_x^G \leq p_c^{\{x\}}. \quad (3.10)$$

En général, l’inégalité (3.10) est stricte; par exemple dans le cas du réseau carré  $R_x$  est égal à  $1/3$  tandis que  $p_c$  est supérieure à  $1/2$  et est conjecturée être de l’ordre de  $0,59$ .

**Théorème 2.10 (Le Borgne et Marckert ‘07).** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe dirigé agréable et  $S$  un ensemble indépendant de sommets de  $G$ . Pour tout  $p$  appartenant à  $[0, R_S^G)$ , on a:*

$$P_p^G(X^G(v) = 1, v \in S) = (-1)^{|S|} \mathcal{F}_S^G(-p). \quad (3.11)$$

La preuve de ce théorème repose sur des arguments combinatoires : un lien est établi entre le nombre d’arbres plongeables dans un AD et la valeur que prend le gaz sur les

sommets de sa source. La preuve repose également sur des inversions de séries, légitimes car pour  $p < R_S^G$  toutes les séries considérées convergent absolument.

Cette définition sur tout le réseau permet entre autres d'obtenir une description markovienne du modèle de gaz sur le réseau carré qui entraîne des résultats d'énumération d'animaux dirigés sur ce réseau pour des sources variées ([LBM07, Proposition 3.5 et 3.5]).

La suite du chapitre est formée de mes contributions à l'étude de ce modèle de gaz en vue d'obtenir de nouveaux résultats d'énumération d'animaux dirigés. Je développe un nouveau point de vue permettant d'obtenir simplement une caractérisation markovienne des modèles de gaz définis pour une grande famille de graphes comprenant notamment les réseaux carré et triangulaire, ainsi que la famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)$  introduite dans [BMC96] et  $(\mathcal{T}_n)$  introduite dans [CDGB00] (section 6). Cette nouvelle approche repose sur la définition d'une distance sur les graphes (section 4) et sur l'introduction des chaînes de Markov cycliques 5.

## 4 Convergence de graphes et animaux

Cette section a pour vocation de relier les deux approches gazières qu'on vient de présenter. La première d'entre elles (décrite dans la section 3.1) consiste à étudier et à calculer le modèle de gaz sur un cylindre de largeur donnée puis à effectuer un passage à la limite.

Revenons sur cette limite : soit  $\rho_N(p)$  la densité du modèle de gaz (de paramètre  $p$ ) sur le cylindre de largeur  $N$ . On sait que  $\rho_N(p) = -\mathcal{F}_x^{G^{(N)}}(-p)$ . Or, l'ensemble des AD de taille  $n$  – pour  $n$  fixé – coïncident (modulo le plongement de  $G^{(N)}$  dans  $G$ ) sur  $G$  et  $G^{(N)}$  dès que  $N$  est « grand » devant  $n$ . Au niveau des séries génératrices, cela revient à dire que  $\mathcal{F}_{G^{(N)}}^{\{x\}}$  converge vers  $\mathcal{F}_G^{\{x\}}$  au sens de la convergence des séries formelles ( $\sum a_{n,k}x^k \xrightarrow{n} \sum a_kx^k$  si et seulement si  $a_{n,k} \xrightarrow{n} a_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ). Ceci implique que  $(\rho_N)$  converge (formellement) lorsque  $N$  tend vers l'infini, on note  $\rho_\infty$  sa limite.

La deuxième approche de modèle de gaz (présentée dans la section 3.2) repose sur la construction d'un modèle de gaz sur tout le réseau, modèle de gaz dont on peut calculer la densité  $\rho$ . Cette densité  $\rho$  est-elle égale à  $\rho_\infty$ ? Peut-on relier les deux modèles de gaz quand la largeur du cylindre tend vers l'infini?

L'objectif de cette partie est de donner une « bonne » notion de convergence de graphes, autrement dit de munir l'ensemble des graphes d'une topologie, de sorte que si  $(G_n)$  converge vers  $G$  alors non seulement  $\rho_\infty = \rho$  mais également telle que les lois fini-dimensionnelles du gaz sur  $G_n$  convergent vers celles sur  $G$  (théorème 2.14). Ce résultat implique en particulier que la série génératrice des AD sur  $G_n$  converge vers celle sur  $G$ . Il est important de noter que la convergence n'est plus uniquement formelle dans ce cas, mais est une convergence de processus aléatoires.

Cette notion de convergence est un outil efficace pour étudier le modèle de gaz sur tout le réseau, elle permet d'obtenir certaines propriétés stochastiques en considérant des graphes plus simples, sur lesquels les modèles de gaz sont plus faciles à étudier.

### 4.1 Définition d'une topologie sur les graphes marqués

**Définition 2.11.** On appelle *graphe orienté marqué* la donnée d'une paire  $(G = (V, E), Z)$  où  $G$  est un graphe orienté et  $Z$  un sous-ensemble de  $V$ .

On note  $V_Z$  le sous-ensemble des sommets de  $V$  dont au moins un des ancêtres appartient à  $Z$  et  $G(Z)$  le sous-graphe de  $G$  dont l'ensemble de sommets est  $V_Z$  (et dont l'ensemble des arcs est le sous-ensemble de  $E$  correspondant).

Soit  $(G = (V, E), Z)$  un graphe orienté marqué,  $V_Z$  est l'animal dirigé sur  $G$  de source  $Z$  et maximal pour l'inclusion.

**Définition 2.12.** Deux graphes orientés marqués  $(G = (V, E), Z)$  et  $(G' = (V', E'), Z')$  sont dits *isomorphes* — on notera alors  $(G, Z) \sim (G', Z')$  — si  $G(Z)$  et  $G'(Z')$  sont égaux à un réétiquetage des sommets près. Plus formellement, cela revient à dire qu'il existe une application bijective  $\phi$  de  $V_Z$  dans  $V'_{Z'}$  telle que pour tout  $x, y$  de  $V_Z$ ,  $(x, y) \in E$  est équivalent à  $(\phi(x), \phi(y)) \in E'$ .

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des graphes orientés marqués. On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble des graphes orientés quotienté par cette relation. On notera  $\overline{(G, Z)}$  la classe d'équivalence de  $(G, Z)$  dans  $\mathcal{G}$ .

Les classes d'équivalence pour cette relation sont donc formés de graphes qui admettent les « mêmes » AD et les « mêmes » configurations de gaz. En effet si  $(G, Z) \sim (G', Z')$ , alors  $|Z| = |Z'|$  et  $\mathcal{F}_Z^G = \mathcal{F}_{Z'}^{G'}$ . Pour le modèle de gaz, l'application  $\phi$  fournit un isomorphisme entre les configurations sur  $Z$  et  $Z'$  qui implique que  $P_p^G(X_s^G = 1, s \in Z) = P_p^{G'}(X_s^{G'} = 1, s \in Z')$ , où on rappelle que  $P_p$  désigne le modèle de gaz défini dans la section 3.2.

On définit à présent une distance sur  $\mathcal{G}$ . Cette distance est une distance classique de convergence locale adaptée au cadre étudié ici (graphe dirigé, plusieurs sommets marqués).

Pour tout  $r \geq 0$ , on définit  $B_r(G, Z)$  comme le sous-graphe de  $(G, Z)$  formés des sommets  $v$  de  $(G, Z)$  tels que  $d(v, Z) = \inf_{u \in Z} d(u, v) \leq r$ , où la distance est à prendre au sens dirigé suivant :

$$d(u, v) = \min\{n, \text{ où } (u_0 = u, \dots, u_n = v) \text{ est une chaîne entre } u \text{ et } v\}.$$

Soient  $\overline{(G, Z)}$  et  $\overline{(G', Z')}$ , deux élément de  $\mathcal{G}$ , on pose :

$$d_{\mathcal{G}}(\overline{(G, Z)}, \overline{(G', Z')}) = \inf \left\{ \frac{1}{r+1}, \text{ où } r \text{ est tel que } B_r(G, Z) \sim B_r(G', Z') \right\}. \quad (4.1)$$

On peut vérifier que  $d_{\mathcal{G}}$  ne dépend que des classes d'équivalences  $\overline{(G, Z)}$  et  $\overline{(G', Z')}$  et non des représentants choisis et que  $d_{\mathcal{G}}$  est bien une distance sur  $\mathcal{G}$ .

*Exemple 2.13.* Soit  $\text{Sq}$  le réseau carré et  $\text{Sq}^{(N)}$  sa variante cyclique de largeur  $N$ , alors pour tous sommets  $x$  de  $\text{Sq}$  et  $x_N$  de  $\text{Sq}^{(N)}$ ,

$$d_{\mathcal{G}}\left(\overline{(\text{Sq}, \{x\})}, \overline{(\text{Sq}^{(N)}, \{x_N\})}\right) = \frac{1}{N}.$$

On en déduit que pour la topologie associée à  $d_G$ ,  $(\text{Sq}^{(N)}, \{x_N\})_N$  converge vers Sq. La notion de convergence induite par  $d_G$  formalise donc bien la notion intuitive de convergence de graphes utilisée jusqu'à présent.

## 4.2 Compatible avec les animaux

**Théorème 2.14.** Soit  $(G_n = (V_n, E_n), Z_n)$  une suite de graphes dirigés marqués et  $(G = (V, E), Z)$  un graphe dirigé marqué. Soit  $a_{n,k} = \#\{A \in \mathcal{A}_{Z_n}^{G_n}, |A| = k\}$  le nombre d'AD de source  $Z_n$  de  $G_n$  d'aire  $k$  et soit  $a_k = \#\{A \in \mathcal{A}_Z^G, |A| = k\}$  le même nombre pour  $G$ .

Si  $d_G((\overline{G_n, Z_n}), (\overline{G, Z})) \rightarrow 0$  alors

1.  $\mathcal{F}_{Z_n}^{G_n}(p) = \sum_{k \geq |Z_n|} a_{n,k} p^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_Z^G(p) = \sum_{k \geq |Z|} a_k p^k$  où la convergence a lieu dans l'espace des séries formelles à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .
2. Si, de plus, il existe  $c, d \geq 0$  tel que pour tout  $n$  assez grand, on ait :

$$a_{n,k} \leq c d^k \text{ pour tout } k \geq 1, \quad (4.2)$$

alors pour tout  $p < 1/d$ , les lois fini-dimensionnelles du gaz sur  $Z_n$  sous la loi  $P_p^{G_n}$  convergent vers celles sur  $Z$  sous  $P_p^G$ , autrement dit :

$$P_p^{G_n}(X_s^{G_n} = 1, s \in Z_n) \xrightarrow{n} P_p^G(X_s^G = 1, s \in Z).$$

*Démonstration.* 1. Tout d'abord, si  $d_G((\overline{G_n, Z_n}), (\overline{G, Z})) \rightarrow 0$ , alors pour tout  $r$ , dès que  $n$  est assez grand, les deux graphes  $B_r(G_n, Z_n)$   $B_r(G, Z)$  sont isomorphes. Cela implique que les coefficients de  $\mathcal{F}_{Z_n}^{G_n}$  et  $\mathcal{F}_Z^G$  coïncident au moins jusqu'au  $r$ -ième, ce qui donne le résultat annoncé.

2. Premièrement, la condition 4.2 implique que  $p_{crit}^{G_n} \geq 1/d$  donc le modèle de gaz  $P_p^{G_n}$  est bien défini pour tout  $p < 1/d$ .

D'après la construction du modèle de gaz, on peut remarquer que l'événement  $\{X_s^G = 1, s \in Z\}$  ne dépend pas du coloriage de tous les sommets de  $G$  mais seulement de la couleur des sommets de  $\mathbf{A}^Z$  (voir la définition 2.7). Comme on a supposé  $p < 1/d$ , sous la loi  $P_p^G$ ,  $\mathbf{A}^Z$  est fini p.s. Ceci implique l'existence de  $m_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $P_p^G(|\mathbf{A}^Z| \geq m_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Dès que  $n$  est assez grand, les deux graphes  $B_{m_\varepsilon}(G_n, Z_n)$  et  $B_{m_\varepsilon}(G, Z)$  sont isomorphes, il existe donc une application bijective  $\phi$  qui envoie  $B_{m_\varepsilon}(G_n, Z_n)$  sur  $B_{m_\varepsilon}(G, Z)$ . De plus  $\phi$  induit un isomorphisme de probabilité entre le coloriage de  $B_{m_\varepsilon}(G_n, Z_n)$  et de  $B_{m_\varepsilon}(G, Z)$ . En conséquence, conditionnellement à  $\{|\mathbf{A}^Z| < m_\varepsilon\}$ , l'image de  $\mathbf{A}^{Z_n}$  par  $\phi$  est  $\mathbf{A}^Z$  et on obtient

$$P_p^{G_n}(X_s^{G_n} = 1, s \in Z_n \mid |\mathbf{A}^{Z_n}| < m_\varepsilon) = P_p^G(X_s^G = 1, s \in Z \mid |\mathbf{A}^Z| < m_\varepsilon).$$

Cela conclut la preuve, puisque  $P_p^G(|\mathbf{A}^Z| < m_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  par définition de  $m_\varepsilon$ .  $\square$

*Remarque 2.15.* Ce théorème, contrairement au Théorème 2.10 reste vrai sans l'hypothèse d'indépendance sur  $Z$  et  $Z'$ .

## 5 Chaînes de Markov cycliques et animaux

On a vu dans la section 3.1 que la distribution du gaz sur une ligne du réseau carré cylindrique pouvait s'écrire de manière multiplicative à l'aide d'une matrice (un résultat analogue est établi dans [BMC96] pour les réseaux  $\mathcal{L}_m$  et dans la section 6 pour d'autres familles de réseaux). Même si la matrice qui intervient dans cette description n'est pas une matrice stochastique (la somme des coefficients sur une ligne n'est pas égale à 1), cette formulation fait penser à une chaîne de Markov à laquelle on aurait ajouté des conditions cycliques au bord. Cette observation nous conduit à introduire la notion de chaînes de Markov cycliques (section 5.1) dont on donne quelques propriétés dans la section 5.2.

Intuitivement, plus le cylindre sur lequel on travaille est large, moins les effets de bord se font ressentir et on peut donc s'attendre à ce qu'ils disparaissent quand la largeur tend vers l'infini. En termes de processus, cela signifierait que la limite (en un sens à préciser) d'une chaîne de Markov cyclique est une chaîne de Markov au sens classique. On donne un sens précis à cet énoncé et on le prouve (Théorème 2.18) dans la section 5.3. Au niveau des modèles de gaz, cela implique que dès que la distribution du gaz sur une ligne du cylindre peut s'écrire de manière multiplicative, la restriction du modèle de gaz à une ligne du réseau entier est une chaîne de Markov. Cela se traduit en termes d'AD par des résultats d'énumération pour des sources variées (c.f. par exemple Proposition 2.25).

### 5.1 Définition des chaînes de Markov cycliques

Dans toute cette partie, l'espace d'états  $E$  est supposé fini,  $\nu$  désigne une mesure de probabilité sur  $E$  et  $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_{ij})$  une matrice stochastique dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de  $E$  (i.e :  $\mathbf{M}_{ij} \geq 0$  et  $\sum_j \mathbf{M}_{ij} = 1$  pour tout  $i, j \in E$ ).

**Définition 2.16.** *Pour tout  $N \geq 0$ , on appelle chaîne de Markov cyclique de loi initiale  $\nu$ , de matrice de transition  $\mathbf{M}$  et de longueur  $N$ , un processus stochastique  $(X_i)_{i \in \{0, \dots, N-1\}}$  dont la loi est celle d'une chaîne de Markov conditionnée à boucler après  $N$  étapes.*

*Autrement dit, soit  $Y$  une chaîne de Markov (classique) dont la loi initiale est  $\nu$  et la matrice de transition est  $\mathbf{M}$ , la loi de  $(X_i)_{i \in \{0, \dots, N-1\}}$  est donnée par :*

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_{N-1} = x_{N-1}) = P(Y_0 = x_0, \dots, Y_{N-1} = x_{N-1} \mid Y_0 = Y_N) \quad (5.1)$$

où  $x_0, \dots, x_{N-1} \in E$ .

En encore d'autres termes, en posant  $x_N = x_0$  :

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_{N-1} = x_{N-1}) = \frac{\nu(x_0) \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{M}_{x_i, x_{i+1}}}{\widetilde{Z}_N} \quad (5.2)$$

où  $\widetilde{Z}_N = \sum_{x'_0, \dots, x'_{N-1}} \nu(x'_0) \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{M}_{x'_i, x'_{i+1}}$ .

On note  $(\nu, \mathbf{M})$ -CM (respectivement  $(\nu, \mathbf{M}, N)$ -CMC) une chaîne de Markov (respectivement chaîne de Markov cyclique de longueur  $N$ ).

## 5.2 Premières propriétés des chaînes de Markov cycliques

Soit  $X$  une  $(\nu, \mathbf{M}, N)$ -CMC, la formule (5.2) implique que la loi de  $X_0$  est donnée par :

$$P(X_0 = x) = \frac{\nu(x) \left( \mathbf{M}^N \right)_{x,x}}{\widetilde{Z}_N}, \text{ pour tout } x \in E. \quad (5.3)$$

A l'exception du cas trivial  $\left( \mathbf{M}^N \right)_{x,x} = \widetilde{Z}_N$  (pour lequel l'équation (5.3) se simplifie en  $P(X_0 = x) = \nu(x)$ ), la loi de  $X_0$  n'est donc pas donnée par  $\nu$ . Celle-ci est néanmoins appelée loi initiale de  $X$  par analogie aux chaînes de Markov classiques.

La notion de distribution stationnaire diffère également entre les chaînes de Markov classiques et cycliques. Soit  $X$  une  $(\nu, \mathbf{M}, N)$ -CMC, toujours d'après l'équation (5.2), la distribution de  $X_1$  est donnée par :

$$P(X_1 = x_1) = \left( \sum_{x_0} \nu(x_0) \mathbf{M}_{x_0, x_1} \left( \mathbf{M}^{N-1} \right)_{x_1, x_0} \right) \left( \widetilde{Z}_N \right)^{-1}. \quad (5.4)$$

Supposons que  $\nu$  soit une mesure invariante pour  $\mathbf{M}$  (i.e :  $\nu \mathbf{M} = \nu$ ), en combinant les équations (5.3) et (5.4), on voit que la loi de  $X_1$  est *a priori* différente de celle de  $X_0$  (le conditionnement fait en effet apparaître le terme  $\left( \mathbf{M}^{N-1} \right)_{x_1, x_0}$  qui empêche la somme de se simplifier). Autrement dit, le fait que  $\nu$  soit une mesure invariante de  $\mathbf{M}$  n'implique pas que  $(X_i)$  est un processus stationnaire. Quelles sont alors les distributions initiales qui induisent des processus stationnaires ? La proposition suivante donne un premier élément de réponse et constitue une propriété remarquable des chaînes de Markov cycliques :

**Propriété 2.17.** *Soit  $X$  une  $(\mathcal{U}_E, \mathbf{M}, N)$ -MC cyclique, où  $\mathcal{U}_E$  désigne la loi uniforme sur  $E$  ( $\mathcal{U}_E(x) = 1/|E|$  pour tout  $x$  de  $E$ ), alors  $X$  est un processus stationnaire : pour tout  $x$  de  $E$ ,  $P(X_i = x) = P(X_0 = x)$ .*

La preuve est immédiate : les expressions données dans (5.3) et (5.4) se simplifient instantanément.

## 5.3 Convergences des chaînes de Markov cycliques

L'introduction des chaînes de Markov cycliques a été justifiée dans le début de ce chapitre, comme objet pour l'étude de la restriction du modèle de gaz à une ligne. Or, dans l'exemple du réseau carré traité dans la section 3.1, la matrice  $V$  qui apparaît n'est pas une matrice stochastique et donc la distribution sur une ligne du gaz n'est pas, à première vue, une chaîne de Markov cyclique au sens de la Définition 2.16.

On montre dans le théorème suivant que l'occupation du gaz est effectivement markovien cyclique et qu'elle converge quand  $N$  tend vers l'infini vers une chaîne de Markov classique. C'est sur ce théorème que reposent tous les résultats obtenus dans la section 6.

**Théorème 2.18.** *Soit  $E$  un espace d'états fini et  $\mathbf{V}$  une matrice carrée à coefficients positifs et indexés par les éléments de  $E$ . On suppose de plus que  $\mathbf{V}$  admet une valeur propre réelle, simple, strictement plus grande en module que toutes les autres valeurs propres, on note  $\lambda$  une telle valeur propre.*

Soit  $(X^{(N)})_{N \geq 1}$  une famille de processus stochastiques telle que pour tout  $N$ ,  $X^{(N)}$  est indexée par  $\{0, \dots, N-1\}$  et

$$P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_{N-1}^{(N)} = x_{N-1}) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{x_i, x_{i+1}}}{\text{trace}(\mathbf{V}^N)}, \quad (5.5)$$

avec la convention  $x_N = x_0$ .

Soient  $R$  et  $L$  des vecteurs propres, respectivement à droite et à gauche, de  $\mathbf{V}$  associés à  $\lambda$  tels que  $\langle L, R \rangle = 1$  (où  $\langle L, R \rangle$  désigne le produit scalaire usuel de  $L$  et  $R$ ).

(i) Pour tout  $N \geq 1$ ,  $X^{(N)}$  est une  $(\mathcal{U}_E, \mathbf{M}, N)$ -CMC, où  $\mathbf{M}$  est donnée, pour  $i, j \in E$ , par :

$$\mathbf{M}_{i,j} = \mathbf{V}_{i,j} \frac{R_j}{\lambda \cdot R_i}. \quad (5.6)$$

(ii) Soit à présent  $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  le processus stochastique dont les lois fini-dimensionnelles sont données, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par :

$$\mu(\{x_0, \dots, x_k\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_k^{(N)} = x_k). \quad (5.7)$$

Sous la loi  $\mu$ ,  $X$  est une  $(\nu, \mathbf{M})$ -CM, où  $\mathbf{M}$  est donnée par l'équation (5.6) et  $\nu$  est la mesure de probabilité invariante pour  $\mathbf{M}$  donnée par  $\nu(x) = L_x R_x$ , pour  $x \in E$ .

*Démonstration.* On commence par prouver le point (ii) et, en particulier, que la limite donnée dans l'équation (5.7) existe. Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $x_0, \dots, x_k \in E$ , pour tout  $N > k$ , on a :

$$P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_k^{(N)} = x_k) = \left( \prod_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{x_i, x_{i+1}} \right) \frac{(\mathbf{V}^{N-k})_{x_k, x_0}}{\text{trace}(\mathbf{V}^N)} \quad (5.8)$$

La trace de  $(\mathbf{V}^N)$  et  $(\mathbf{V}^{N-k})_{x_k, x_0}$  sont des polynômes en les valeurs propres de  $V$ . Par hypothèse,  $\lambda$  est strictement plus grande en module que toutes les autres valeurs propres, les termes significatifs de ces polynômes sont donc ceux en  $\lambda^N$  quand  $N$  tend vers l'infini. Plus précisément,

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^{N-k})_{x_k, x_0} &= R_{x_k} L_{x_0} \lambda^{N-k} + \sum_{\lambda' \text{ valeur propre de } \mathbf{V}} a_{\lambda'} \lambda'^{N-k} \\ &= R_{x_k} L_{x_0} \lambda^{N-k} + o(\lambda^{N-k}) \end{aligned}$$

et  $\text{trace}(\mathbf{V}^N) = \lambda^N + o(\lambda^N)$ , ce qui conduit à :

$$\lim_N P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_k^{(N)} = x_k) = \frac{R_{x_k} L_{x_0}}{\lambda^k} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbf{V}_{x_i, x_{i+1}}. \quad (5.9)$$

Il reste à vérifier que  $\nu$  est bien une loi de probabilité, d'après les équations (5.8) et (5.9) :

$$\sum_{x \in E} \nu(x) = \sum_{x \in E} R_x L_x = \sum_{x \in E} \lim_N \frac{(\mathbf{V}^N)_{x,x}}{\text{trace}(\mathbf{V}^N)} = \lim_N \sum_{x \in E} \frac{(\mathbf{V}^N)_{x,x}}{\text{trace}(\mathbf{V}^N)} = 1,$$

où la troisième égalité est simplement l'interversion d'une limite et d'une somme finie. On vérifie de la même manière que la matrice  $\mathbf{M}$  définie dans l'équation (5.6) est une matrice stochastique.

Les lois fini-dimensionnelles données par (5.7) sont clairement consistantes, le théorème d'extension de Kolmogorov s'applique et assure que le processus  $X$  est bien défini.

Le point (i) s'obtient directement par définition d'une chaîne de Markov cyclique.  $\square$

## 6 Résultats d'énumération

On donne dans cette section des exemples de graphes pour lesquels la restriction du modèle de gaz à une ligne est une chaîne de Markov. Plus précisément, les graphes considérés sont des réseaux agréables (c.f. section 3.2.1) dont les sommets sont indexés par un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ . La  $j$ -ème ligne d'un réseau est par définition l'ensemble des sommets dont l'ordonnée est égale à  $j$ . L'objectif de cette partie est de montrer que la restriction à une de ces lignes du modèle de gaz (de la section 3.2) est un processus markovien.

La méthode utilisée est la suivante : soit  $G$  un réseau orienté agréable dont les sommets sont indexés par un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ , si on considère que les abscisses des sommets ne vivent plus dans  $\mathbb{Z}$  mais dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , on obtient la version cyclique  $G^{(N)}$  de  $G$  de largeur  $N$ . On munit chacun des  $G^{(N)}$  du modèle de gaz habituel. On calcule alors l'unique distribution stationnaire pour ces transitions et on l'exprime sous forme multiplicative comme dans l'équation 5.5. D'une part, d'après le théorème 2.14, on sait que la limite quand  $N$  tend vers l'infini de cette distribution est la restriction du modèle de gaz sur  $G$ . D'autre part, on sait d'après le théorème 2.18 que cette limite est une chaîne de Markov dont on sait calculer la distribution.

On donne dans la suite trois exemples de familles de graphes pour lesquels on peut appliquer cette méthode. Pour la première famille, le calcul de la distribution stationnaire sur une ligne s'obtient par une généralisation simple de [BM98]. Pour les deux exemples suivants, les probabilités de transition qui définissent le modèle de gaz font intervenir trois lignes consécutives, le calcul de la distribution stationnaire est alors un peu plus compliqué.

### 6.1 La famille de réseaux $(\mathcal{L}_R)_{R \subset \mathbb{N}}$

On définit dans cette section une nouvelle famille de réseaux. Pour tout sous-ensemble  $R$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $|R| \geq 2$ , on note  $\mathcal{L}_R$  le réseau dont les sommets sont indexés par  $\mathbb{Z}^2$  et tels que de chaque sommet  $(i, j)$  émergent  $|R|$  arêtes qui pointent vers  $(i+r, j+1)$  pour  $r \in R$ . Sans perte de généralité, on suppose toujours que  $\min(R) = 0$  et on note  $\overline{R} = \sup(R)$ .

Cette famille de réseaux généralise des familles de réseaux bien connues. Par exemple,  $\mathcal{L}_{\{0,1\}}$  correspond au réseau carré et si  $R = \{0, \dots, m-1\}$ , alors  $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_m$  qui est le réseau introduit dans [BM98]. Un autre exemple est représenté sur la figure 2.14.

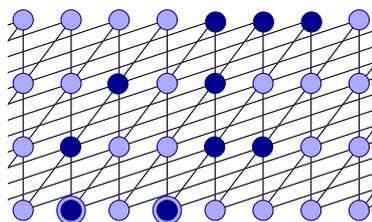


Fig. 2.14 – Exemple d'un AD d'aire 10 sur  $\mathcal{L}_R$ , pour  $R = \{0, 1, 4\}$

*Remarque 2.19.* Pour tout sous-ensemble fini  $R$  de  $\mathbb{N}$ , le graphe  $\mathcal{L}_R$  est agréable. Pour  $N > n + \overline{R}$ , les boules de rayon  $n$  de  $\mathcal{L}_R^{(N)}$  et de  $\mathcal{L}_R$  sont isomorphes. Par ailleurs, chaque sommet ayant exactement  $|R|$  enfants,  $p_c^{\mathcal{L}_R} \geq 1/|R| > 0$  et l'hypothèse 2 du théorème 2.14

est vérifiée pour  $d = |R|$ , ainsi les lois fini-dimensionnelles du modèle de gaz sur  $\mathcal{L}_R^{(N)}$  convergent vers celles sur  $\mathcal{L}_R$ .

On note  $X_j^{(N)}$  le  $N$ -uplet qui donne l'occupation du gaz sur la  $j$ -ème ligne de  $\mathcal{L}_R^{(N)}$ . Le raisonnement qu'on présente maintenant pour calculer la distribution de  $X_j^{(N)}$  est calqué sur celui exposé pour le réseau carré dans la section 3.1, on n'insiste ici que sur les points spécifiques aux réseaux  $\mathcal{L}_R$ .

La construction du modèle de gaz implique que, quand  $j$  décroît,  $(X_j^{(N)})_{j \in \mathbb{Z}}$  est une chaîne de Markov « verticale » (à  $2^N$  états) sous sa distribution stationnaire. La théorie générale des chaînes de Markov implique que, pour  $p \in (0, 1)$ , une telle distribution est unique. Pour calculer cette distribution, on note, pour  $C \subset [N]$ ,  $F_C^{(N)}$  la probabilité que les sommets occupés par le gaz sur une ligne du réseau soit exactement ceux dont l'abscisse appartient à  $C$ , autrement dit :

$$F_C^{(N)} = P_p^{\mathcal{L}_R^{(N)}} (X^{\mathcal{L}_R^{(N)}}(i, j) = 1 \text{ si et seulement si } i \in C), \quad (6.1)$$

où le membre de droite ne dépend pas de la valeur de  $j$  choisie puisque par construction la distribution du gaz est la même sur toutes les lignes.

Pour  $C$  un sous-ensemble de  $[N]$ , on note  $\mathcal{N}(C) = \bigcup_{i \in C} \{(i+r) \bmod N \mid r \in R\}$  et  $\overline{\mathcal{N}}(C) = \bigcup_{i \in C} \{(i-r) \bmod N \mid r \in R\}$ . Les ensembles  $\{\mathcal{N}(C) \times \{1\}\}$  et  $\{\overline{\mathcal{N}}(C) \times \{-1\}\}$  sont alors respectivement l'ensemble des enfants et des parents de l'ensemble  $\{C \times \{0\}\}$  et  $|\mathcal{N}(C)| = |\overline{\mathcal{N}}(C)|$ .

Cette notation permet de traduire le caractère markovien de  $(X_j^{(N)})_{j \in \mathbb{Z}, j \downarrow}$  en des relations de récurrence pour les  $F_C^{(N)}$  :

$$F_C^{(N)} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|C|} \sum_{D \subset \mathcal{N}(C)^c} (1-p)^{N-|\overline{\mathcal{N}}(D)|} F_D^{(N)}. \quad (6.2)$$

On vérifie alors que la loi de probabilité donnée par :

$$F_C^{(N)} = \frac{1}{Z_N} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|C|} (1-p)^{|\mathcal{N}(C)|},$$

où

$$Z_N = \sum_{C \subset [N]} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|C|} (1-p)^{|\mathcal{N}(C)|}$$

est stationnaire pour l'équation (6.2).

Il reste à exprimer cette distribution sous forme matricielle. À cet effet, on considère une matrice  $\mathbf{V}$  indexée par les éléments de  $\{0, 1\}^{\overline{R}}$  et telle que pour  $\sigma = (s_0, \dots, s_{\overline{R}-1})$  et  $\tau = (t_1, \dots, t_{\overline{R}})$  :

$$\mathbf{V}_{\sigma, \tau} = 0 \text{ si } (s_1, \dots, s_{\overline{R}-1}) \neq (t_1, \dots, t_{\overline{R}-1})$$

et sinon :

$$\mathbf{V}_{\sigma, \tau} = \begin{cases} p & \text{si } t_{\overline{R}} = 1 \\ 1-p & \text{si } t_{\overline{R}} = 0 \text{ et s'il existe } r \text{ tel que } s_r = 1 \text{ et } \overline{R} - r \in R \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors récrire  $F_C^{(N)}$  sous la forme :

$$F_C^{(N)} = \frac{1}{Z_N} \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \text{ où } \begin{cases} \sigma_N = \sigma_0 \text{ et} \\ \sigma_i(k) = 1 \text{ si et seulement si } i+k-1 \in C \end{cases} \quad (6.3)$$

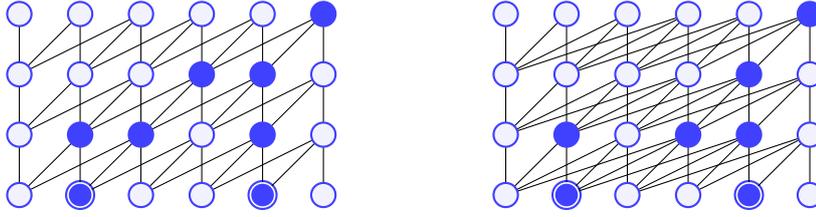


Fig. 2.15 – AD sur les réseaux  $\Lambda_3$  et  $\Lambda_4$  (toutes les arêtes sont orientées vers le haut). Les cellules des animaux sont noires et les cellules sources sont cerclées.

avec

$$Z_N = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} \left( \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \right) = \text{trace}(\mathbf{V}^N).$$

On est parvenu à exprimer  $F_C^{(N)}$  sous la forme requise pour appliquer le théorème 2.18. De plus, il est immédiat de vérifier que tous les coefficients de  $\mathbf{V}^{\bar{R}-1}$  sont positifs (pour  $p \in (0, 1)$ ) ce qui entraîne que  $\mathbf{V}$  vérifie les conditions du théorème 2.18 par le théorème de Perron-Frobenius.

Comme mentionné dans la remarque 2.19, les lois fini-dimensionnelles du gaz sur  $\mathcal{L}_R^{(N)}$  convergent vers celles sur  $\mathcal{L}_R$ . On applique le théorème 2.18 pour obtenir :

**Théorème 2.20.** Soit  $X = (X(i, j))_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2}$  une configuration de gaz sur  $\mathcal{L}_R$  sous la loi  $P_p^{\mathcal{L}_R}$ , avec  $p < p_{\text{crit}}^{\mathcal{L}_R}$ , alors le processus stochastique  $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  défini par  $\Sigma_i = (X(i, 0), \dots, X(i + \bar{R} - 1, 0))$  est une chaîne de Markov sous sa distribution stationnaire. En d'autres termes, le processus stochastique  $(X_i = X(i, 0))_{i \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de mémoire  $\bar{R} - 1$  sous sa distribution stationnaire.

### La famille de réseaux $\mathcal{L}_m$

La famille de réseaux  $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 2}$  introduite dans [BMC96] correspond au cas particulier où  $R = \{0, 1, \dots, m - 1\}$  (des exemples d'AD sur  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$  sont donnés figure 2.15). Dans [BMC96], la série génératrice des AD issus d'une source unique est obtenue comme solution d'une équation algébrique de degré au plus  $m + 1$  ;

**Théorème 2.21 (Bousquet-Mélou et Conway '96).** La fonction génératrice  $\mathcal{F}$  des AD sur  $\mathcal{L}_m$  avec une source unique est solution de l'équation suivante :

$$t^2(1+t)^{m-1}[1+(m+1)\mathcal{F}]^{m+1} - [1+t+(m-1)\mathcal{F}]^{m-1}(t-2\mathcal{F}^2) = 0. \quad (6.4)$$

Le théorème 2.20 appliqué aux réseaux  $\mathcal{L}_m$  entraîne immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire 2.22.** Soit  $X = (X(i, j))_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2}$  une configuration de gaz sur  $\mathcal{L}_m$  sous la loi  $P_p^{\mathcal{L}_m}$ , avec  $p < p_{\text{crit}}^{\mathcal{L}_m}$ , alors le processus stochastique  $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  défini par  $\Sigma_i = (X(i, 0), \dots, X(i + m - 1, 0))$  est une chaîne de Markov sous sa distribution stationnaire.

En d'autres termes, le processus stochastique  $(X_i = X(i, 0))_{i \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de mémoire  $m - 1$  sous sa distribution stationnaire.

Ce résultat couplé avec la proposition 2.10 permet d'obtenir de nouveaux résultats sur l'énumération d'AD sur les réseaux  $\mathcal{L}_m$ . Pour  $m = 2$ , il permet de retrouver le théorème 3.3 de [LBM07]. On peut en effet calculer dans ce cas les valeurs et vecteurs propres de  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ , ce qui permet de conclure.

Pour  $m = 3$ , on peut toujours donner explicitement la matrice de transition. En munissant  $\{0, 1\}^2$  de l'ordre lexicographique, on obtient :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 1 - 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - p/2\lambda & p/2\lambda \\ \alpha & 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - p/\lambda & p/\lambda \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha & = \frac{(1-p)^2 p}{(2-p-\lambda)\lambda} \\ \lambda & = \frac{1 + \sqrt{1+4p-4p^2}}{2} \end{cases} \quad (6.5)$$

En appliquant la formule donnée dans le théorème 2.18, on obtient par exemple que la série génératrice  $\mathcal{F}_k^{\mathcal{L}_3}$  des AD sur  $\mathcal{L}_3$  de source compacte  $S_k := \{(i, 0), i = 1, \dots, k\}$  de taille  $k \geq 2$  est égale à :

$$\mathcal{F}_k^{\mathcal{L}_3}(t) = \frac{1 - t \left( \sqrt{1 - 4t - 4t^2} \right)}{1 - 4t - 4t^2 + (1 + 2t)\sqrt{1 - 4t - 4t^2}} \left( \frac{-2t}{1 + \sqrt{1 - 4t - 4t^2}} \right)^{k-1}.$$

Pour  $m \geq 4$ , la plus grande valeur propre  $\lambda$  de  $\mathbf{V}$  ne peut s'exprimer sous forme de radicaux. D'après [BMC96], on sait cependant qu'elle est solution de l'équation suivante :

$$\lambda^2(1 - p)^{m-1} = \lambda^{m-1}(\lambda - 1)^2. \quad (6.6)$$

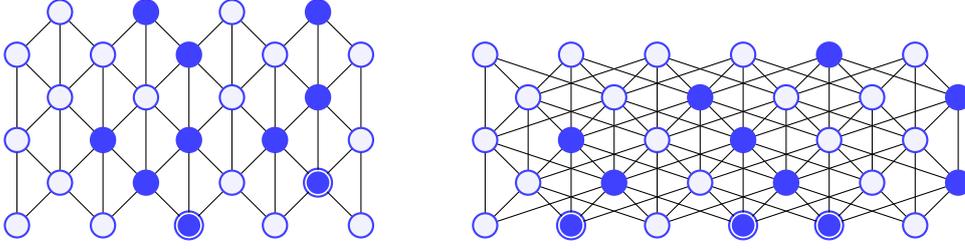
Comme les vecteurs  $L$  et  $R$  (définis dans le théorème 2.18) sont des vecteurs propres associés à  $\lambda$ , leurs coordonnées sont des fonctions affines de  $\lambda$  qui peuvent être calculées en un temps linéaire. En ajoutant la condition de normalisation  $\langle L, R \rangle = 1$ , on obtient que pour tout ensemble  $S$  indépendant de sommets, la série génératrice des AD de source  $S$  sur  $\mathcal{L}_m$  est une fraction rationnelle dont les numérateurs et dénominateurs sont des fonctions polynomiales en  $\lambda$ . Comme de plus  $\lambda$  est solution de (6.6), la série génératrice dans ce cas est algébrique en  $p$ .

## 6.2 Le réseau triangulaire

On note Tri, le réseau triangulaire dont les sommets sont les éléments  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $i$  et  $j$  ont la même parité et dont les arcs sont  $((i, j), (i - 1, j + 1))$ ,  $((i, j), (i + 1, j + 1))$  et  $((i, j), (i, j + 2))$ .

Dans [BM98], la fonction génératrice des AD de source unique est obtenue sur le réseau triangulaire, mais par l'étude d'un modèle de gaz *ad hoc*. En fait, « notre » modèle de gaz s'applique également à ce réseau.

On se place sur la version cylindrique  $\text{Tri}^{(N)}$  de Tri. Soient  $C$  et  $D$  des sous-ensembles de  $[N]$  et  $X$  une configuration de gaz sur  $\text{Tri}^{(N)}$ , comme dans la section précédente (c.f. Équation (6.11)), on note  $F_C$  la probabilité que les sommets occupés sur la ligne 0 de  $\text{Tri}^{(N)}$  soient exactement ceux dont l'abscisse appartient à  $C$ . On définit également  $F_{C,D}^{(N)}$  comme la probabilité que les sommets occupés sur la ligne 0 (respectivement sur la ligne 1) de  $\text{Tri}^{(N)}$  soient exactement ceux dont l'abscisse appartient à  $C$  (respectivement à  $D$ ),

Fig. 2.16 – Exemples d'AD sur le réseau triangulaire (à gauche) et sur  $\mathcal{T}_4$  (à droite).

en d'autres termes, pour  $C, D \in [N]$  :

$$F_{C,D}^{(N)} = P_p^{\text{Tri}^{(N)}} \left( X^{\text{Tri}^{(N)}}(i, \varepsilon) = 1 \text{ si et seulement si } \begin{cases} \varepsilon = 0 \text{ et } i/2 \in C, \text{ ou} \\ \varepsilon = 1 \text{ et } (i-1)/2 \in D \end{cases} \right).$$

On modifie la définition de  $\mathcal{N}(C)$  en posant :  $\mathcal{N}(C) = \cup_{i \in C} \{i-1, i+1\}$  (l'ensemble  $\{\mathcal{N}(C) \times \{1\}\}$  est l'ensemble des enfants de  $\{C \times \{0\}\}$ ). Soient  $C, D \in [N]$  tels que  $\mathcal{N}(C) \cap D = \emptyset$ , on obtient alors la relation de récurrence suivante :

$$F_{C,D}^{(N)} = \left( \frac{p}{1-p} \right)^{|C|} \sum_{E \subset^c (C \cup \mathcal{N}(D))} F_{D,E} (1-p)^{N-|\mathcal{N}(D) \cup E|}. \quad (6.7)$$

Le terme  $|\mathcal{N}(D) \cup E|$  qui apparaît dans cette équation est toujours égal à  $|\mathcal{N}(D)| + |E|$ . Une solution à l'équation (6.7) est donc donnée par :

$$F_{C,D} = \frac{p^{|C|} p^{|D|}}{Z_N} \mathbb{1}_{\mathcal{N}(C) \cap D = \emptyset} \quad (6.8)$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice et où

$$Z_N = \sum_{\substack{C,D \\ \mathcal{N}(C) \cap D = \emptyset}} p^{|C|} p^{|D|}.$$

Pour obtenir une forme matricielle, on définit  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ce qui permet de récrire (6.8) comme

$$F_{C,D} = \frac{1}{\text{trace}(\mathbf{V}^{2N})} \prod_{i=0}^{2N-1} \mathbf{V}_{x_i, x_{i+1}}, \text{ où } x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair et } i \in C, \\ 1 & \text{si } i \text{ est impair et } i \in D, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.9)$$

La matrice  $\mathbf{V}$  possède deux valeurs propres réelles distinctes, on est donc exactement dans les conditions d'applications du théorème 2.18, ce qui permet d'obtenir :

**Théorème 2.23.** Soit  $X = (X(i, j))_{(i,j) \in \text{Tri}}$  une configuration de gaz sous la loi  $P_p^{\text{Tri}}$ , le processus stochastique  $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  défini par

$$\Sigma_i = \begin{cases} X(i, 0) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ X(i, 1) & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

est une chaîne de Markov sous sa distribution stationnaire dont la matrice de transition est donnée par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} P(\Sigma_1 = 0 | \Sigma_0 = 0) & P(\Sigma_1 = 1 | \Sigma_0 = 0) \\ P(\Sigma_1 = 0 | \Sigma_0 = 1) & P(\Sigma_1 = 1 | \Sigma_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & p/\lambda^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\lambda = \frac{1+\sqrt{1+4p}}{2}$  et sa distribution stationnaire est donnée par

$$[P(\Sigma_0 = 0), P(\Sigma_0 = 1)] = \left[ \lambda^2/(p + \lambda^2), p/(p + \lambda^2) \right].$$

Pour obtenir  $F_C$ , il suffit alors de sommer les  $F_{C,D}$  pour toutes les valeurs admissibles de  $D$ , on obtient :

$$F_C = \frac{1}{Z_N} p^{|C|} (1+p)^{N-|C|}. \quad (6.10)$$

On pose alors  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1+p & p \\ 1 & p \end{pmatrix}$ , ce qui permet de récrire l'équation (6.10) également sous la forme multiplicative classique :

$$F_C = \frac{1}{\text{trace}(V^N)} \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{x_i, x_{i+1}} \text{ où } x_i = 1 \text{ si et seulement si } 2i \in C \quad (6.11)$$

À nouveau le théorème 2.18 permet d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 2.24.** Soit  $X = (X(i, j))_{(i, j) \in \text{Tri}}$  une configuration de gaz sous la loi  $P_p^{\text{Tri}}$ , le processus stochastique  $\Sigma = (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  défini par  $\Sigma_i = X(2i, 0)$  est une chaîne de Markov sous sa distribution stationnaire et dont la matrice de transition est donnée par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} P(\Sigma_1 = 0 | \Sigma_0 = 0) & P(\Sigma_1 = 1 | \Sigma_0 = 0) \\ P(\Sigma_1 = 0 | \Sigma_0 = 1) & P(\Sigma_1 = 1 | \Sigma_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_\circ & \alpha_\circ \\ \alpha_\bullet & 1 - \alpha_\bullet \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

et sa distribution stationnaire par  $[P(\Sigma_0 = 0), P(\Sigma_0 = 1)] = \left[ \frac{\alpha_\bullet}{\alpha_\circ + \alpha_\bullet}, \frac{\alpha_\circ}{\alpha_\bullet + \alpha_\circ} \right]$ , où

$$\alpha_\circ = \frac{2p}{1 + \sqrt{1+4p}} \text{ et } \alpha_\bullet = \frac{1 + \sqrt{1+4p}}{2}.$$

La proposition 2.10 permet de traduire ces deux théorèmes en des résultats d'énumération pour les AD sur le réseau triangulaire :

**Proposition 2.25.** (i) Soit  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  où  $s_i = (x_i, \epsilon_i)$  des sommets du réseau triangulaire, avec  $\epsilon_i \in \{0, 1\}$  et tels que  $d_i := x_{i+1} - x_i$  soit supérieur à 2 pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . La série génératrice des AD de source  $S$  sur le réseau triangulaire est donnée par

$$\mathcal{F}_S^{\text{Tri}}(-p) = (-1)^{|S|} \frac{\alpha}{1+\alpha} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-\alpha)^{d_i} + \alpha}{1+\alpha}, \text{ où } \alpha = \frac{4p}{(1 + \sqrt{1+4p})^2}$$

(ii) Soit  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  où  $s_i = (2x_i, 0)$  des sommets du réseau triangulaire, tels que  $d_i := x_{i+1} - x_i$  soit strictement positif pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . La série génératrice

des AD de source  $S$  sur le réseau triangulaire est donnée par

$$\mathcal{F}_S^{\text{Tri}}(-p) = (-1)^{|S|} \frac{\alpha_o}{\alpha_\bullet + \alpha_o} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_\bullet (1 - \alpha_\bullet - \alpha_o)^{d_i} + \alpha_o}{\alpha_\bullet + \alpha_o}$$

On représente sur figure 2.17 deux exemples de sources qui vérifient les conditions de cette proposition et donc pour lesquelles on sait calculer la série génératrice des AD. En



Fig. 2.17 – Exemples de sources considérées dans la proposition 2.25 (i) (à gauche) et dans la proposition 2.25 (ii) (à droite).

particulier, si on pose  $S_n := \{(i, 0), i = 1, \dots, n\}$ , on obtient la série génératrice des AD issus d'une source compacte de largeur  $N$  :

$$\mathcal{F}_{S_n}^{\text{Tri}}(-p) = \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_\bullet} (1 - \alpha_\bullet)^{n-1} (-1)^n.$$

En sommant, on obtient que la série génératrice des AD à source compacte sur le réseau triangulaire est égale à :

$$\sum_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}^{\text{Tri}}(-p) = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_\bullet} (1 - \alpha_\bullet)^{n-1} (-1)^n = \frac{-p}{1 + 4p},$$

résultat obtenu dans [GBV88] par des méthodes combinatoires.

### 6.3 La famille de réseaux $\mathcal{T}_n$

On étudie à présent la famille de réseaux  $\mathcal{T}_n$  introduite par Corteel et al. [CDGB00]. Le réseau orienté  $\mathcal{T}_n$  est un « mélange » entre le réseau  $\mathcal{L}_m$  et le réseau triangulaire, il est défini ainsi :

- si  $n = 2k + 1$ , les sommets de  $\mathcal{T}_n$  sont indexés par les éléments de  $\mathbb{Z}^2$ . De chaque sommet du réseau émergent  $n$  arcs qui pointent vers  $(i + r, j + 1)$  pour  $-k \leq r \leq k$  et un arc qui pointe vers  $(i, j + 2)$ .
- si  $n = 2k$ , les sommets sont indexés par les éléments  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $i$  et  $j$  ont la même parité. Dans ce cas, de chaque sommet du réseau émergent  $n$  arcs pointent vers  $(i + 2r + 1, j + 1)$  pour  $-k \leq r \leq k - 1$  et un arc qui pointe vers  $(i, j + 2)$ .

Le cas  $n = 2$  correspond au réseau triangulaire qu'on a choisi de traiter séparément dans la section 6.2 par souci de simplicité. La série génératrice des AD issus d'une source unique sur  $\mathcal{T}_n$  est obtenue dans [CDGB00] comme solution d'une équation algébrique donnée explicitement. La preuve repose sur un argument combinatoire permettant de relier la FG des AD sur  $\mathcal{T}_n$  à celle sur  $\mathcal{L}_m$ .

On calcule la restriction du modèle de gaz à une ligne de la même façon que pour le réseau triangulaire. Soient  $C, D \subset [Nj]$ , les définitions de  $F_C^{(N)}$  et  $F_{C,D}^{(N)}$  demeurent inchangés par rapport à la section précédente. En revanche, on définit  $\mathcal{N}(C)$  comme l'ensemble

- $\cup_{i \in C} \{i + r, \text{ pour } -k \leq r \leq k\}$  si  $n = 2k + 1$
- $\cup_{i \in C} \{i + 2r + 1, \text{ pour } -k \leq r \leq k - 1\}$  si  $n = 2k$ .

Avec cette nouvelle définition de  $\mathcal{N}(C)$ , les équations (6.7), (6.8) et (6.10) restent valables sur les réseaux  $\mathcal{T}_n$ . En suivant les idées introduites dans [BMC96] (et rappelées dans la partie 6.1) pour étudier les réseaux  $\mathcal{L}_m$ , on définit  $\mathbf{V}$  comme la matrice carrée  $(\mathbf{V}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}$  dont les indices sont indexés par  $\{0, 1\}^{n-1}$  et définie comme suit. Si  $\sigma = (s_1, \dots, s_{n-1})$  et  $\tau = (t_2, \dots, t_n)$ , alors :

$$\mathbf{V}_{\sigma,\tau} = \begin{cases} 0 & \text{si } (s_2, \dots, s_{n-1}) \neq (t_2, \dots, t_{n-1}) \\ p & \text{si } (s_2, \dots, s_{n-1}) = (t_2, \dots, t_{n-1}) \text{ et } s_1 = 1 \\ 1 + p & \text{si } \sigma = \tau = (0, 0, \dots, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.13)$$

La restriction du modèle de gaz à une ligne de  $\mathcal{T}_n^{(N)}$  est alors donnée par :

$$F_D = \frac{1}{Z_N} \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \text{ où } \begin{cases} \sigma_N = \sigma_0 \text{ et} \\ \sigma_i(k) = 1 \text{ si et seulement si } i + k - 1 \in D \end{cases} \quad (6.14)$$

avec

$$Z_N = \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}} \left( \prod_{i=0}^{N-1} \mathbf{V}_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \right) = \text{trace}(\mathbf{V}^N).$$

Le polynôme caractéristique  $\chi$  de  $\mathbf{V}$  peut être calculé explicitement :

$$\chi(x) = x^{2^{n-1}-n} \left( x^n - x^{n-1}(1 + 2p) + p^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^k \right).$$

Cette dernière équation se factorise en :

$$\chi(x) = \frac{x^{2^{n-1}-n}}{1-x} (p^2 - x^{n-1}(x + p^2 - 1)(x - (2p + 1))).$$

ce qui permet de voir que la valeur propre dominante  $\lambda$  de  $\mathbf{V}$  satisfait  $\lambda \neq 1$  et

$$p^2 = \lambda^{n-1}(\lambda + p^2 - 1)(\lambda - (2p + 1)). \quad (6.15)$$

Comme pour les réseaux  $\mathcal{L}_m$ , on ne peut calculer explicitement sous forme de radicaux les solutions de l'équation (6.15) que pour  $n < 4$ . Néanmoins, les mêmes arguments s'appliquent, le théorème 2.18 et l'équation (6.15) permettent d'obtenir le théorème suivant.

**Théorème 2.26.** *Soit  $X = (X(i, j))_{(i,j) \in \mathcal{T}_n}$  une configuration de gaz sous la loi  $P_p^{\mathcal{T}_n}$ . Le processus stochastique  $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  défini par*

$$\Sigma_i = (X(2i, 0), X(2(i+1), 0), \dots, X(2(n-2), 0)) \text{ pour } i \in \mathbb{N}$$

*est une chaîne de Markov sous sa distribution stationnaire.*

*En d'autres termes,  $(X(2i, 0))_{i \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de mémoire  $n - 1$  sous sa distribution stationnaire.*

# Deuxième partie

## DES CARTES PLANAIRES



# 3

## Comportement asymptotique de cartes planaires en pile

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Cartes planaires</b> . . . . .	<b>98</b>
1.1	Quelques rappels sur les graphes . . . . .	98
1.2	Cartes planaires . . . . .	99
1.3	Énumération de cartes planaires . . . . .	101
<b>2</b>	<b>Convergence de cartes planaires aléatoires</b> . . . . .	<b>102</b>
2.1	Topologie de la convergence locale . . . . .	102
2.2	Topologie de Gromov-Hausdorff . . . . .	103
2.3	Petit historique des résultats de convergence . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Triangulations en pile</b> . . . . .	<b>105</b>
3.1	Définition des triangulations en pile . . . . .	105
3.2	Lois de probabilités sur les triangulations en pile . . . . .	105
3.3	Petit historique sur la convergence des triangulations en pile . . . . .	106
3.4	Triangulations en pile et arbres ternaires . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Arbres aléatoires et convergence</b> . . . . .	<b>107</b>
4.1	Rappels sur les arbres planaires . . . . .	107
4.2	Arbres de Galton-Watson . . . . .	108
4.3	Convergence locale des arbres ternaires . . . . .	109
4.4	Arbre continu d'Aldous . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Triangulations en pile et arbres ternaires</b> . . . . .	<b>112</b>
5.1	Bijection entre les triangulations en pile et les arbres ternaires . . . . .	112
5.2	Distance dans la triangulation . . . . .	113
5.3	Loi induite sur les arbres . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi uniforme</b> . . . . .	<b>115</b>
6.1	Convergence pour Gromov-Hausdorff . . . . .	115
6.2	Convergence locale sous la loi uniforme . . . . .	116
6.3	Comportement asymptotique du degré sous la loi uniforme . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi historique</b> . . . . .	<b>118</b>
7.1	Convergence comme espace métrique . . . . .	118
7.2	Comportement asymptotique du degré de la racine . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Quadrangulations en pile</b> . . . . .	<b>120</b>
8.1	Un premier modèle de quadrangulations en pile . . . . .	120
8.2	Un modèle de quadrangulations en pile proche des arbres binaires . . . . .	121

---

Je présente dans ce chapitre les résultats obtenus dans l'article [AM08] (reproduit au chapitre 4) écrit en collaboration avec Jean-Francois Marckert. L'objectif de ce chapitre est d'introduire le plus complètement et simplement possible les objets mathématiques nécessaires pour pouvoir énoncer les résultats principaux de [AM08]. J'ometts ici toutes les preuves et les aspects techniques et renvoie le lecteur au chapitre 4 où on pourra trouver tous les détails ; les références précises seront indiquées au fil du texte.

J'espère que la différence de points de vue entre ces deux chapitres compensera certaines redondances inévitables.

Depuis les article fondateurs d'Angel et Schramm [AS03] d'une part et de Chassaing et Schaeffer [CS04] d'autre part, une importante littérature s'est développée sur la convergence de grandes cartes planaires aléatoires. Pour de nombreuses familles de cartes planaires classiques (triangulations, quadrangulations sous la loi uniforme, . . .), des résultats de convergence ont été obtenus. En collaboration avec Jean-François Marckert, nous nous sommes intéressés à la convergence du modèle de triangulations en pile enracinées introduit dans [AHAdS05] et précédemment étudié dans [DS07], [ZCZ<sup>+</sup>08], [ZCFR06] et [ZYW05].

Nous avons montré que, sous la loi uniforme, ces cartes convergent en distribution pour la distance locale vers une loi portée par des triangulations infinies (théorème 3.14) et que, correctement normalisées, elles convergent vers l'arbre continu d'Aldous pour la topologie de Gromov-Hausdorff (théorème 3.10), c'est le résultat majeur de ce travail.

La construction récursive des cartes induit une loi naturelle sur les triangulations en pile. Sous cette loi, nous avons obtenu que la distance, renormalisée par  $(6/11) \log n$ , entre deux points choisis uniformément converge vers 1 en probabilité (théorème 3.16).

Tous les résultats énoncés ci-dessus s'étendent à un modèle de quadrangulations en pile (section 8.2).

Ce chapitre a pour vocation d'être accessible à des personnes non familières des cartes planaires, il comprend de nombreux rappels et est organisé comme suit. Je commence par introduire les cartes planaires (section 1) et introduit les topologies sous lesquelles sont étudiées ici leurs convergences (section 2). Je définis ensuite le modèle de triangulations en pile (section 3). La section 4 est consacrée à des rappels sur les arbres et sur des résultats de convergence d'arbres aléatoires utiles dans la suite. Les connections entre triangulations en pile et arbres ternaires sont détaillées dans la section 5. J'énonce ensuite les résultats de convergence sous la loi uniforme (section 6) et sous la loi historique (section 7). Enfin, je décris dans la section 8 deux modèles de quadrangulations en pile et étends pour l'un d'entre eux tous les résultats de convergence obtenus pour les triangulations en pile (section 8).

## 1 Cartes planaires

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines familles de cartes planaires. Nous rappelons dans cette première partie quelques notions classiques sur les graphes et les cartes pour éviter toute ambiguïté par la suite. Pour une introduction complète, on pourra se rapporter, pour les graphes, à l'ouvrage de référence [Bol98] et, pour les cartes, au premier chapitre de [Sch98a] ou à [Mie08].

### 1.1 Quelques rappels sur les graphes

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est formé d'un ensemble de *sommets*  $V$  et d'un ensemble d'*arêtes*  $E$ . Chaque arête  $e = \{s_1, s_2\}$  est une paire d'éléments de  $V$ , éventuellement

identiques, appelés *extrémités*. Dans ce cas on dit que  $e$  est *incidente* aux sommets  $s_1$  et  $s_2$  (ou indifféremment que  $s_1$  et  $s_2$  sont incidents à  $e$ ). Cette définition de graphe diffère légèrement de celle donnée dans le chapitre 2 ; ici, les boucles sont autorisées. Le *degré* d'un sommet d'un graphe  $G$  est le nombre total d'incidences de ce sommet avec des arêtes de  $G$ . Un graphe est dit *localement fini* si tous ses sommets sont de degré fini.

Soient  $s$  et  $t$  deux sommets d'un graphe  $G$ , un *chemin* entre  $s$  et  $t$  est la donnée d'une suite de sommets  $(s_0 = s, s_1, \dots, s_n = t)$  et d'une suite d'arêtes  $(e_0, \dots, e_{n-1})$  telles que  $e_i = \{s_i, s_{i+1}\}$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ . Le graphe  $G$  est dit *connexe* s'il existe un chemin entre toute paire de sommets distincts de  $G$ .

Soit  $G$  un graphe connexe, on munit  $G$  d'une *distance de graphe*  $d_G$  qui correspond à la distance du plus court chemin entre deux sommets. Plus formellement, on pose  $d_G(s, s) = 0$  pour tout sommet  $s$  de  $G$  et on définit  $d_G(s, t)$  comme le nombre minimal d'arêtes dans un chemin entre  $s$  et  $t$ .

On peut illustrer cette définition formelle de graphe, en le «dessinant» : on représente chaque sommet par un point et chaque arête par une ligne reliant ses extrémités. Deux dessins d'un même graphe sont représentés sur la figure 3.1. Le dessin de droite est plus satisfaisant dans la mesure où les arêtes ne se croisent pas de manière intempestive.

**Définition 3.1.** *Étant donné un graphe  $G$ , on appelle plongement de  $G$  un dessin de  $G$  dans lequel les arêtes ne se rencontrent qu'au niveau des sommets.*

Seuls certains graphes admettent un plongement dans le plan, un graphe admettant au moins un plongement est appelé *graphe planaire*.

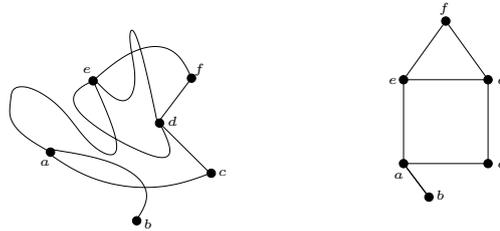


Fig. 3.1 – Deux dessins d'un même graphe, le dessin de droite est un plongement.

Comme le plan et la sphère de dimension deux  $S^2$  ne diffèrent topologiquement que par l'envoi d'un point à l'infini, un graphe planaire admet également des plongements dans la sphère. On peut passer d'un plongement dans la sphère à un plongement dans le plan par projection stéréographique (voir figure 3.2). Il faut noter qu'à un même plongement dans la sphère correspondent généralement plusieurs plongements dans le plan, selon le choix du point « envoyé à l'infini ».

## 1.2 Cartes planaires

**Définition 3.2.** *Une carte planaire est un plongement d'un graphe planaire connexe sur la sphère de dimension deux considéré à homéomorphisme de la sphère près. Autrement dit, deux plongements dans la sphère sont identiques en tant que cartes si on peut passer de l'un à l'autre par un homéomorphisme qui préserve l'orientation de la sphère.*

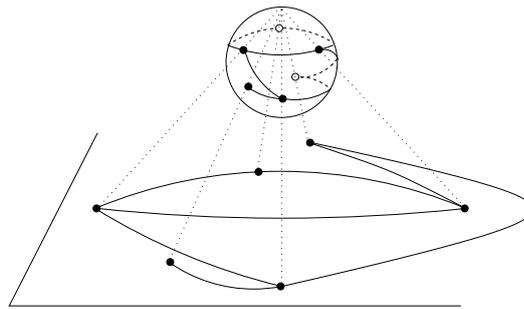


Fig. 3.2 – D’un plongement dans la sphère à un plongement dans le plan

Des exemples de cartes sont donnés sur la figure 3.3.

Il est plus facile de dessiner les cartes sur le plan que sur la sphère et dans la suite on les dessinera toujours sur le plan. Malgré cette représentation, il ne faut pas oublier que les cartes sont des objets qui vivent sur la sphère. Par exemple les deux cartes de gauche représentées sur la figure 3.3 sont identiques car on peut passer de l’une à l’autre par un homéomorphisme de la *sphère* (alors qu’il n’existe pas d’homéomorphisme du plan qui envoie l’une sur l’autre). Sur cette même figure, la carte de droite est différente des autres (même si ces trois cartes sont des plongements du même graphe).

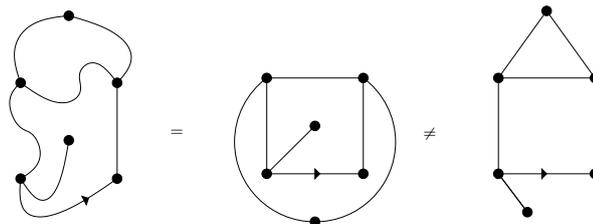


Fig. 3.3 – Trois plongements d’un même graphe : la carte de gauche et celle du milieu sont identiques (il faut les voir sur la sphère), mais la carte de droite est différente.

Soit  $m$  une carte planaire, on appelle *face* de  $m$  une composante connexe de  $\mathbf{S}^2 \setminus \{m\}$ . Une face est un ouvert simplement connexe de  $\mathbf{S}^2 \setminus \{m\}$ . On dit qu’une arête est *incidente* à une face, si elle appartient à la fermeture de celle-ci. Le *degré* d’une face est le nombre d’incidences de cette face avec des arêtes ; les arêtes sont comptées avec leur multiplicité (la carte de droite de la figure 3.3 a des faces de degré 3,4 et 7). Une carte planaire dont toutes les faces sont de degré trois est une *triangulation* et c’est une *quadrangulation* si toutes ses faces sont de degré quatre (voir la figure 3.4).

Lorsque l’on passe d’un plongement dans la sphère à un plongement dans le plan, on choisit d’envoyer un point de la sphère à l’infini. La face à laquelle appartient ce point a donc pour image, dans le plan, une face non bornée, appelée *face infinie*.

On notera respectivement  $V(m)$ ,  $E(m)$  et  $F(m)$  l’ensemble des sommets, des arêtes et des faces d’une carte planaire  $m$ . L’ensemble  $V(m)$  des sommets d’une carte planaire peut être muni de la distance de graphe, cela permet de voir une carte planaire comme un espace métrique. C’est sous cet angle que seront étudiées les cartes planaires.

Dans la suite, pour éviter les symétries, on ne considère que des cartes *enracinées* : on distingue une arête  $e = (E_0, E_1)$ , appelée l’*arête racine*, que l’on oriente et dont l’origine

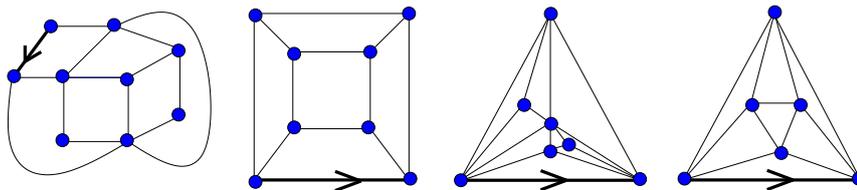


Fig. 3.4 – Deux quadrangulations et deux triangulations enracinées

$E_0$  est appelé le sommet racine (ou racine) de la carte. Pour la carte réduite à un sommet, on utilise la convention que sa racine est dans ce cas réduite à son unique sommet. On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des cartes planaires enracinées et localement finies.

Deux cartes enracinées sont égales si l'homéomorphisme qui permet de passer de l'une à l'autre préserve également leur arête racine et l'orientation de celle-ci. Il est bon de noter que l'enracinement d'une carte permet d'établir une correspondance bijective entre les plongements dans la sphère et les plongements dans le plan, en imposant que le plongement dans le plan soit tel que l'arête racine soit adjacente à la face infinie et orientée de telle façon que celle-ci soit sur sa droite. Cette convention de dessin est par exemple adoptée sur la figure 3.4 ainsi que dans tout le reste du chapitre. Dans ce cas, on note  $F^\circ(m)$  l'ensemble des faces finies de  $m$ .

### 1.3 Énumération de cartes planaires

La relation d'Euler sur la sphère, énoncée par Euler dès 1750 relie les nombres de sommets  $V(m)$ , d'arêtes  $E(m)$  et de faces  $F(m)$  de toute carte planaire  $m \in \mathcal{M}$  :

$$V(m) + F(m) = E(m) + 2.$$

Cette relation implique que pour les familles de cartes où le degré des faces est fixé, il est équivalent de fixer le nombre d'arêtes, de faces ou de sommets. Par exemple, une triangulation à  $2n$  faces compte  $3n$  arêtes et  $n + 2$  sommets et une quadrangulation à  $n$  sommets compte  $2n - 4$  arêtes et  $n - 2$  faces.

Pour toutes les familles classique de cartes planaires, des résultats d'énumération ont été obtenus dès les années 60 par Tutte [Tut62]. Ses travaux sont fondés sur l'existence de décompositions pour les cartes et la traduction de ces décompositions sous forme d'équations fonctionnelles. Il obtient par exemple ainsi que le nombre de triangulations planaires à  $2n + 2$  faces est égal à :

$$\frac{2(4n + 1)!}{(n + 1)!(3n + 2)!} \underset{n}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6\pi n}} \frac{2^{8n+1}}{3^{3n}} n^n.$$

Dans les années 80 est développée une approche bijective pour l'énumération des cartes. Celle-ci, initiée par Cori et Vauquelin [CV81], est ensuite améliorée par Schaeffer [Sch98b] qui exhibe notamment une bijection simple entre les quadrangulations enracinées et les arbres bien étiquetés. Cette bijection, ensuite étendue aux cartes générales [BDFG04], est comme indiquée dans le chapitre 4, le point de départ des travaux concernant l'étude de l'asymptotique des cartes normalisées.

## 2 Convergence de cartes planaires aléatoires

Ce chapitre est consacré à la convergence de triangulations en piles (section 3.1) et quadrangulations en pile (section 8.2) aléatoires. Selon la topologie on est muni l'ensemble des cartes planaires, les résultats asymptotiques impliquent des types de renseignement différents sur les cartes. Historiquement, deux topologies naturelles pour étudier le comportement asymptotique des cartes planaires ont émergé : la topologie de la convergence locale et la topologie de Gromov-Hausdorff. On se propose de les décrire ici successivement et on termine cette partie par quelques résultats de convergence précédemment obtenus.

### 2.1 Topologie de la convergence locale

Comme son nom l'indique la topologie de la convergence locale s'intéresse au comportement local de la carte autour de la racine. Autrement dit, on s'intéresse à la convergence des boules centrées en la racine. Cette topologie est induite par la métrique  $d_L$  sur les cartes définie comme suit. Soit  $m$  une carte planaire enracinée localement finie, on définit  $B_m(r)$  la boule de rayon  $r$  de  $m$  comme la carte dont l'ensemble des sommets est :

$$V(B_m(r)) = \{u \in V(m) \mid d_m(u, E_0) \leq r\},$$

l'ensemble des sommets de  $m$  dont la distance à  $E_0$  est inférieure ou égale à  $r$  et dont les arêtes sont les arêtes de  $m$  qui relient deux sommets de  $B_m(r)$ . Si  $r \geq 1$ , la carte  $B_m(r)$  est enracinée en  $e$ , sinon  $B_m(r)$  est l'unique carte réduite à un sommet enracinée en ce sommet.

**Définition 3.3.** Soient  $m$  et  $m'$  deux cartes de  $\mathcal{M}$ , on définit la distance locale  $d_L$  entre  $m$  et  $m'$  comme :

$$d_L(m, m') = 1/(1 + k), \quad (2.1)$$

où  $k$  est la valeur maximale de  $r$  pour laquelle  $B_m(r)$  et  $B_{m'}(r)$  sont égales en tant que cartes (ie : à homéomorphisme près).

Le fait que  $d_L$  est bien une distance se vérifie facilement. On peut même vérifier que c'est une distance ultra-métrique, i.e.  $d_L(m_1, m_3) \leq \max\{d_L(m_1, m_2), d_L(m_2, m_3)\}$ . Par ailleurs, on a la propriété suivante, aisément vérifiable (c.f section 3.1 du chapitre 4) :

**Proposition 3.4.** L'espace  $\mathcal{M}$  des cartes planaires enracinées localement finies muni de la distance locale  $d_L$  est un espace complet.

Cette topologie est la topologie pertinente pour étudier les cartes planaires « non normalisées ». C'est pour elle qu'ont été établis les premiers résultats de convergence de grandes cartes planaires (voir la section 7). Notez qu'elle ne donne d'information que sur ce qu'il se passe à distance finie de la racine. Ainsi démontrer qu'une suite de cartes aléatoires  $(m_n)$  converge faiblement pour cette topologie équivaut à dire que : pour toute carte  $Q$  fixée (de rayon égal à  $r$ ),  $P(B(m_n, r) = Q)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour obtenir des renseignements sur les aspects globaux des cartes (par exemple pour calculer leur rayon), d'autres topologies ont été introduites : en particulier la topologie de Gromov-Hausdorff.

## 2.2 Topologie de Gromov-Hausdorff

La distance de Gromov-Hausdorff est une distance définie sur l'ensemble des ensembles métriques compacts. Comme on l'a vu dans la section 1.2, une carte est naturellement munie d'une structure d'espace métrique et, si la carte est finie, cet espace métrique est clairement compact. On peut donc munir l'ensemble des cartes finies de la distance de Gromov-Hausdorff.

On commence par rappeler la définition de la *distance de Hausdorff*  $d_{Haus(E)}$  sur l'ensemble des compacts d'un espace métrique  $(E, d_E)$ . Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts de  $E$ , on pose :

$$d_{Haus(E)}(K_1, K_2) = \inf\{r \mid K_1 \subset K_2^r, K_2 \subset K_1^r\},$$

où  $K^r = \cup_{x \in K} B_E(x, r)$  désigne la réunion des boules ouvertes de rayon  $r$  centrées en chaque point de  $K$  (beaucoup moins formellement,  $K^r$  est l'ensemble  $K$  auquel on a rajouté une enveloppe d'épaisseur  $r$ ). Intuitivement,  $d_{Haus(E)}(K_1, K_2)$  est donc d'autant plus grande que  $K_1$  et  $K_2$  ont des formes différentes.

Soient  $((E_1, v_1), d_1)$  et  $((E_2, v_2), d_2)$  deux espaces métriques compacts pointés (i.e. pour lesquels on a respectivement distingués deux points  $v_1$  et  $v_2$ ), on pose :

$$d_{GH}(E_1, E_2) = \inf\{d_{Haus(E)}(\phi_1(E_1), \phi_2(E_2)) \vee d_E(\phi_1(v_1), \phi_2(v_2))\},$$

où la borne inférieure est prise sur tous les espaces métriques  $(E, d_E)$  et tous les plongements isométriques  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  dans  $(E, d_E)$ . On peut vérifier que  $d_{GH}$  est une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie d'espaces métriques pointés compacts. On appelle  $d_{GH}$  la *distance de Gromov-Hausdorff*  $d_{GH}(E_1, E_2)$  entre  $E_1$  et  $E_2$  (ou plutôt entre les classes d'isométries de  $E_1$  et  $E_2$ ).

La borne inférieure intervenant dans la définition de la distance de Gromov-Hausdorff en fait un outil difficile à manipuler. Néanmoins, l'idée sous-jacente est assez naturelle si on cherche à étendre la distance de Hausdorff à des paires d'espaces métriques compacts quelconques (et non pas à une paire formée de deux parties compactes d'un même espace métrique). On plonge isométriquement ces deux espaces métriques dans un espace métrique  $E$  « plus gros », où on peut alors calculer leur distance de Hausdorff. On « optimise » ensuite le plongement sur tous les espaces  $E$  et sur tous les plongements  $\phi_1$  et  $\phi_2$  pour minimiser la distance obtenue.

Dans les modèles raisonnables de cartes aléatoires, le rayon d'une carte n'est pas borné quand le nombre de sommets tend vers l'infini et il ne peut donc pas y avoir de convergence au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique limite compact. En pratique, la distance de Gromov-Hausdorff ne permet d'étudier la convergence de cartes planaires que si celles-ci sont normalisées (par exemple la longueur d'une arête est fixée à  $n^{-1/4}$  et non à 1 dans le modèle des quadrangulations uniformes ayant  $n$  faces, voir 2.3 et [CS04]).

Par rapport à d'autres topologies utilisées pour étudier les cartes renormalisées (c.f. section 2.3), la topologie induite par la distance de Gromov-Hausdorff semble plus naturelle puisqu'elle donne des résultats de convergence pour la carte elle-même et non pour certaines fonctions qui la codent ([MM06b]). De plus, comme elle permet d'étudier la convergence de cartes en tant qu'espaces métriques elle conduit à des résultats sur la métrique de l'objet limite, notamment sur la distance jointe de  $k$  points, sur les géodésiques ainsi que sur de nombreuses propriétés topologiques. Par ailleurs, la topologie de Gromov-Hausdorff est une topologie fine sur les espaces métriques et les résultats de

convergence obtenus sont des résultats de convergence puissants. Cela permet en particulier pour les cartes, de tirer des résultats de convergence des propriétés asymptotiques de cartes planaires finies [LGP08, Cor. 1.2], [LG08, Prop.1,2,3].

Notez également que, si on note  $\mathbb{K}$  l'ensemble des classes d'isométrie des espaces métriques compacts, alors  $\mathbb{K}$  muni de  $d_{GH}$  est un espace métrique complet et séparable [EPW06, Théorème 1] (i.e. polonais), c'est donc en particulier un cadre agréable pour faire des probabilités. De là à dire que l'utilisation de la distance de Gromov-Hausdorff simplifie le travail du probabiliste... il n'y a qu'un pas que je ne franchirai pas.

Ces raisons nous ont conduit à étudier la convergence des triangulations en pile et des quadrangulations en pile normalisées pour la topologie de Gromov-Hausdorff (théorème 3.10). Une motivation supplémentaire venait du fait qu'on ne connaît pas aujourd'hui avec certitude la limite des quadrangulations sous la loi uniforme (c.f. 2.3), et on se demandait donc si la limite des triangulations en pile sous la loi uniforme pouvait être la même.

### 2.3 Petit historique des résultats de convergence

Comme annoncé dans la fin de la section 2.1, il existe deux grandes familles de résultats sur la convergence de grandes cartes aléatoires selon qu'on cherche une description locale limite de la carte (degré de la racine, taille des boules de rayon fini,...) ou une description globale (rayon, distance moyenne entre deux points,...). On ne donne ici que les résultats concernant les familles de cartes classiques (triangulations, quadrangulations générales,...), les résultats spécifiques aux triangulations en pile seront donnés dans la partie 3.3.

C'est sur les aspects locaux que portent les premiers résultats obtenus. Angel et Schramm montrent dans [AS03] que, pour la topologie de la convergence locale, la mesure uniforme sur l'ensemble des triangulations à  $n$  faces converge faiblement (lorsque  $n$  tend vers l'infini) vers une mesure portée par les triangulations infinies mais localement finies. Suivant une méthode résolument différente, Chassaing et Durhuss obtiennent ensuite des résultats similaires pour les quadrangulations enracinées sous la loi uniforme [CD06].

Depuis le début des années 2000, s'est développée une abondante littérature sur le comportement global des limites de grandes cartes. On ne présente rapidement ici que quelques résultats principaux, on pourra se rapporter à la section 1.3 du chapitre 4 pour une chronologie plus complète et plus précise.

Chassaing et Schaeffer obtiennent dans [CS04] les premiers résultats dans cette veine pour les quadrangulations enracinées sous la loi uniforme. Ils montrent entre autres que le rayon de la carte doit être renormalisé par  $n^{1/4}$  (où  $n$  désigne le nombre de faces de la carte) pour converger vers une limite finie non nulle, limite qu'ils caractérisent.

Marckert et Mokkadem définissent dans [MM06b] une notion de *carte brownienne* qui paraît être le bon candidat pour l'objet limite continu des cartes planaires aléatoires, objet dont l'existence avait été conjecturée par les physiciens. Ils montrent que les quadrangulations correctement renormalisées convergent vers la carte brownienne mais pour une topologie peu naturelle (convergence du contour des arbres qui codent la carte).

On conjecture néanmoins que la carte brownienne est bien la limite, après renormalisation, des familles classiques de cartes aléatoires pour la topologie de Gromov-Hausdorff. Cette conjecture rejoint le principe d'universalité généralement admis par les physiciens, selon lequel l'objet limite ne dépend pas de la famille (raisonnable) de cartes étudiée.

Dans [LG07], Le Gall obtient des résultats qui viennent appuyer cette conjecture. Il

montre en particulier que les quadrangulations sous la loi uniforme et renormalisées par  $n^{1/4}$  convergent (modulo l'extraction éventuelle d'une sous-suite) vers un espace métrique compact. Il donne une description de cet espace et montre que sa dimension de Hausdorff est égale à 4, résultat qui avait été conjecturé par les physiciens. La description de cet objet est différente de celle de la carte brownienne donnée dans [MM06b], on conjecture cependant que ces deux espaces sont identiques.

### 3 Triangulations en pile

#### 3.1 Définition des triangulations en pile

Le modèle de triangulations en pile intervient naturellement lorsqu'on cherche à construire des triangulations par ajouts successifs de sommets et d'arêtes. Il est défini de la manière intuitive suivante (une définition formelle est donnée dans la section 2.2 du chapitre 4).

Étant donnée une triangulation planaire enracinée, on choisit une face finie  $ABC$  dans laquelle on ajoute un sommet  $O$  ainsi que les arêtes  $AO$ ,  $BO$  et  $CO$ . Si on part d'un simple triangle enraciné, on obtient après  $k$  itérations une triangulation à  $2k + 2$  faces qu'on appelle une *triangulation en pile*, un exemple est donné à la figure 3.5. On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations à  $2k$  faces qui peuvent être obtenues par cette construction.

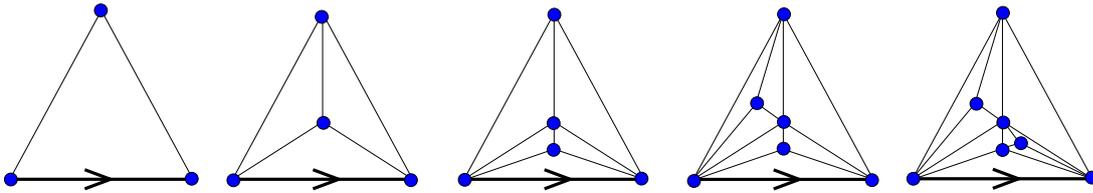


Fig. 3.5 – Construction itérative d'une triangulation en pile. Selon l'ordre choisi pour insérer les nouveaux sommets, il existe trois histoires possibles pour obtenir cette carte.

L'ensemble des triangulations en pile est strictement inclus dans l'ensemble des triangulations, on peut notamment remarquer que la deuxième triangulation de la figure 3.4 n'est pas une triangulation en pile car elle ne contient aucun nœud interne de degré 3.

Le nombre de triangulations en pile de taille fixée est en fait négligeable devant le nombre de triangulations générales. Comme on va le voir dans la section 5, le nombre de triangulations en pile à  $2n + 2$  faces est égal à :

$$\#\Delta_{2n+2} = \frac{1}{3n+1} \binom{3n+1}{n} \sim \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{(3)^{3n}}{(2)^{2n+2} n^{3/2}},$$

alors que, comme on l'a rappelé, d'après [Tut62] le nombre de triangulations planaires à  $2n + 2$  faces est égal à :

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!} \sim \frac{1}{\sqrt{6\pi n}} \frac{2^{8n+1}}{3^{3n}} n^n.$$

#### 3.2 Lois de probabilités sur les triangulations en pile

On étudie la convergence des triangulations en pile selon deux lois de probabilité :

- La première, naturelle du point de vue combinatoire, est la distribution uniforme sur  $\Delta_{2k}$ , notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ .

- La deuxième loi considérée  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  est la probabilité induite par la construction récursive des triangulations en pile : on part d'un triangle enraciné et on construit un élément de  $\Delta_{2k}$  en insérant  $k - 1$  sommets (et les arêtes correspondantes), à chaque étape, on choisit la face où aura lieu l'insertion uniformément parmi les faces existantes. Soit  $m \in \Delta_{2k}$ , alors  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta(m)$  est la probabilité d'obtenir  $m$  à la fin de cette construction. Le poids d'une triangulation sous cette loi est donc proportionnelle au nombre d'histoires qui mènent à cette carte. Sur la figure 3.6, la carte de gauche n'admet qu'une histoire possible (pour que le sommet  $v$  existe, le sommet  $u$  doit exister) tandis que la carte de droite admet deux histoires selon que l'on a inséré en premier le sommet  $u$  ou le sommet  $v$ . Sous  $\mathbb{Q}_8^\Delta$ , la carte de droite apparaît donc deux fois plus souvent que celle de gauche. Cet exemple montre en particulier que  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta \neq \mathbb{U}_{2k}^\Delta$  pour  $k \geq 4$ .

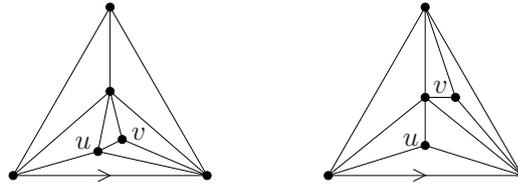


Fig. 3.6 – La triangulation de gauche n'admet qu'une histoire tandis que celle de droite en admet deux selon l'ordre d'insertion des sommets  $u$  et  $v$

### 3.3 Petit historique sur la convergence des triangulations en pile

Les triangulations en pile apparaissent dans la littérature pour de nombreuses raisons et sous de nombreuses terminologies. Je ne rappelle dans cette partie que les résultats concernant leur convergence et renvoie à la section 1.2 du chapitre 4 pour un aperçu de la diversité des domaines dans lesquels elles sont étudiées.

Le modèle de réseau apollonien aléatoire étudié par Zhou et al. [ZYW05], Zhang et al. [ZCFR06], et Zhang et al. [ZCZ<sup>+</sup>08] (lorsque leur paramètre  $d$  est égal à 2) coïncide avec notre modèle de triangulations en pile sous la loi historique  $\mathbb{Q}^\Delta$ . Par des méthodes physiennes et des simulations numériques, ils obtiennent notamment que le degré d'un sommet suit une loi puissance et que la distance entre deux points aléatoires est de l'ordre de  $\log n$ .

Darrasse et Soria [DS07] obtiennent la loi du degré dans un modèle de triangulations en pile, où la loi selon laquelle elles sont distribuées implique que, conditionnellement à leur taille, les triangulations suivent une loi uniforme. Indépendamment de nos travaux et avec des méthodes différentes, Bodini, Darasse et Soria [BDS08] ont obtenu la distribution limite de la distance entre deux sommets choisis aléatoirement dans une carte distribuée selon  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  ainsi que la convergence des moments de la distance à la racine d'un sommet choisi aléatoirement.

### 3.4 Triangulations en pile et arbres ternaires

Les triangulations en pile forment un modèle de cartes planaires agréable à étudier car il existe des bijections simples avec les arbres ternaires. En effet, étant donnée une triangulation en pile, on peut retrouver le premier sommet  $x$  qui a été inséré dans la

carte, car c'est le seul incident aux trois sommets  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$  adjacents à la face infinie. En décomposant la triangulation selon les arêtes  $E_0x$ ,  $E_1x$  et  $E_2x$ , on obtient trois triangulations en pile plus petites (c.f. figure 3.4). Dans chacune d'elles on peut réitérer de manière récursive cette décomposition, ce qui montre qu'une triangulation en pile à la même structure qu'un arbre ternaire. On reviendra en détail sur les bijections existant entre arbres ternaires et triangulations en pile dans la section 5.

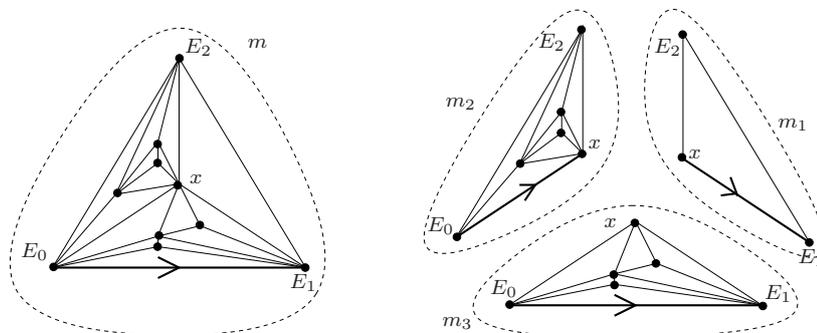


Fig. 3.7 – Décomposition d'une triangulation en pile selon le premier sommet. inséré

## 4 Arbres aléatoires et convergence

Les résultats que nous avons obtenus sur la convergence de triangulations en pile (énoncés dans les sections 6 et 7) reposent tous sur des résultats de convergence d'arbres ternaires. Dans cette section sont rappelées des notions classiques sur les arbres et sur la convergence d'arbres aléatoires qui seront nécessaires pour énoncer ensuite les résultats sur les cartes.

### 4.1 Rappels sur les arbres planaires

On rappelle dans cette partie quelques définitions sur les arbres planaires (plus de détails sur les arbres planaires sont donnés dans la section 2.3.1 du chapitre 4).

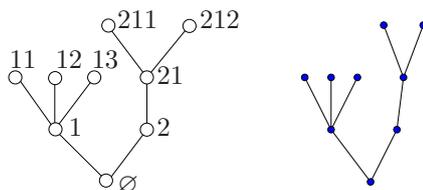


Fig. 3.8 – Un arbre enraciné et sa représentation classique dans le plan.

On adopte le formalisme de Neveu pour décrire les arbres planaires, c'est-à-dire que les arbres sont vus comme un ensemble de mots. Soit  $W = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$  l'ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  où l'on adopte la convention  $\mathbb{N}^0 = \{\varepsilon\}$  (où  $\varepsilon$  désigne le mot vide). Pour  $u = u_1 \dots u_n$  et  $v = v_1 \dots v_m$  deux mots de  $W$ , on désigne par  $uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$  la concaténation des mots  $u$  et  $v$ .

Soient  $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ , on note  $\{m_1, \dots, m_p\}^* = \bigcup_{n \geq 0} \{m_1, \dots, m_p\}^n$  l'ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\{m_1, \dots, m_p\}$ .

**Définition 3.5.** Un arbre planaire  $\mathbf{t}$  est un sous-ensemble de  $W$  tel que :

- $\mathbf{t}$  contient le mot vide  $\varepsilon$ , qu'on appelle la racine de l'arbre,
- s'il existe  $u \in W$  et  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $ui \in \mathbf{t}$ , alors  $u \in \mathbf{t}$ ,
- s'il existe  $u \in W$  et  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $ui \in \mathbf{t}$ , alors  $uj \in \mathbf{t}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ .

On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des arbres planaires.

Soit  $t \in \mathcal{T}$  et soit  $u \in t$ , on note  $c_u(t) = \max\{i \mid ui \in t\}$  le nombre d'enfants de  $u$ . Les éléments d'un arbre sont appelés ses nœuds, un nœud n'ayant pas d'enfant est une *feuille*, les autres nœuds étant les *nœuds internes*. On note  $t^\circ$  l'ensemble des nœuds internes de  $t$ . Le nombre de nœuds d'un arbre  $t$  est noté  $|t|$ . Un arbre binaire (resp. ternaire)  $t$  est un arbre planaire tel que  $c_u(t) \in \{0, 2\}$  (resp.  $c_u(t) \in \{0, 3\}$ ) pour tout  $u \in t$ . On note respectivement  $\mathcal{T}^{\text{bin}}$  et  $\mathcal{T}^{\text{ter}}$  l'ensemble des arbres binaires et ternaires et  $\mathcal{T}_n^{\text{bin}}$  et  $\mathcal{T}_n^{\text{ter}}$  l'ensemble des arbres binaires et ternaires à  $n$  nœuds.

L'interprétation classique d'un arbre planaire comme graphe permet de le munir de la distance de graphe. Par ailleurs, soit  $t$  un arbre planaire et  $u$  et  $v$  deux nœuds de  $t$ , on note  $w$  le plus grand préfixe commun à  $u$  et  $v$  et on définit  $u', v' \in W$  par  $u = wu'$  et  $v = wv'$ . On vérifie alors facilement que la fonction  $d_t$  définie par  $d_t(u, v) = |u'| + |v'|$  est une distance sur  $t$ . Il est facile de voir que la distance  $d_t$  ainsi définie coïncide avec la distance de graphe.

## 4.2 Arbres de Galton-Watson

Le formalisme des arbres de Galton-Watson permet de réinterpréter certaines des lois sur les arbres que l'on considère un peu plus loin. On rappelle ici la définition d'un arbre de Galton-Watson, ainsi que quelques propriétés élémentaires. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux ouvrages classiques sur le sujet, par exemple [AN72], [Har63].

Un *processus de Galton-Watson* est une chaîne de Markov  $(Z_n)_{n \geq 0}$  telle que  $Z_0 = 1$  et telle que pour  $k \geq 0$ ,  $Z_{k+1}$  soit donné par :

$$Z_{k+1} = \sum_{l=1}^{Z_k} Y_l^{(k)},$$

où les variables  $Y_l^{(k)}$  sont des variables aléatoires i.i.d à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et de loi  $(p_j)_{j=0,1,\dots}$  (i.e. pour tout  $j \geq 0$ ,  $P(Y_l^{(k)} = j) = p_j$ ). Un processus de Galton-Watson est généralement vu comme l'évolution d'une population, où :

- au temps  $k$ ,  $Z_k$  individus sont en vie,
- au temps  $k+1$ , chacun des  $Z_k$  individus disparaît, en donnant naissance à  $j$  individus avec probabilité  $p_j$  indépendamment des autres individus.

Dans ce contexte, la loi  $(p_j)_{j=0,1,\dots}$  est souvent appelée *loi de progéniture*, on note  $m$  sa moyenne. Une des questions naturelles lors de l'étude d'un processus de Galton-Watson, concerne son extinction éventuelle. On appelle *date d'extinction* du processus  $(Z_n)$  le premier temps  $T$  tel que  $Z_T = 0$  (ce qui entraîne  $Z_{T+k} = 0$ , pour  $k \geq 0$ ). Si  $p_0 > 0$ , il est clair que la probabilité d'extinction du processus est strictement positive (notamment  $Z_1 = 0$  avec probabilité  $p_0$ ). Si  $m \geq 1$ , la probabilité d'extinction vaut 1 ; le processus s'éteint presque sûrement.

Un arbre de *Galton-Watson* est un arbre généalogique correspondant à une population dont l'évolution suit un processus de Galton-Watson. C'est un arbre planaire

(c.f Définition 3.5). Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement aux arbres de Galton-Watson associés aux deux lois de reproduction suivantes : la loi  $\nu_{\text{bin}} = (\delta_0 + \delta_1)/2$  et la loi  $\nu_{\text{ter}} = (2\delta_0 + \delta_3)/3$ , on note  $P^{\text{bin}}$  et  $P^{\text{ter}}$  les lois correspondantes sur les arbres. La moyenne de  $\nu_{\text{bin}}$  et  $\nu_{\text{ter}}$  étant égale à un, les arbres tirés sous la loi  $P^{\text{bin}}$  et  $P^{\text{ter}}$  sont presque sûrement finis.

Par ailleurs si on conditionne des arbres tirés selon  $P^{\text{bin}}$  ou  $P^{\text{ter}}$  à être d'une taille fixée alors la loi obtenue est la loi uniforme sur les arbres binaires ou ternaires. Plus formellement :

$$P_n^{\text{ter}}(T = t) := P^{\text{ter}}(T = t \mid |t| = n) = \mathbb{U}_n^{\text{ter}}(t),$$

où  $\mathbb{U}_n^{\text{ter}}$  désigne la loi uniforme sur les arbres ternaires de taille  $n$ .

### 4.3 Convergence locale des arbres ternaires

Les arbres forment une famille de cartes particulières, on peut donc les munir de la topologie de la convergence locale définie pour les cartes dans la Définition 3.3 (on enracine les arbres en l'arête issue de la racine et qui pointe vers le nœud 1). On énonce dans cette section le comportement asymptotique des arbres sous la loi  $P^{\text{ter}}$  pour cette topologie.

Commençons par construire une loi  $P_\infty^{\text{ter}}$  sur l'ensemble des arbres ternaires. Un arbre  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  aléatoire sous la loi  $P_\infty^{\text{ter}}$  est construit en deux étapes : on choisit une *colonne vertébrale* ou *branche infinie* sur laquelle on greffe ensuite une famille  $(t(i))_i$  d'arbres finis autour de cette colonne vertébrale.

Plus précisément, soit  $\mathcal{W}_3 = \{1, 2, 3\}^*$  l'arbre ternaire complet infini et soit  $(X_i)$  une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi est la mesure uniforme sur  $\{1, 2, 3\}$ . On pose  $X(j) := X_1 \dots X_j$  pour  $j \geq 1$  et on définit  $L_\infty^{\text{ter}}$  une branche infinie aléatoire de  $\mathcal{W}_3$  par :

$$L_\infty^{\text{ter}} = (X(j), j \geq 0). \quad (4.1)$$

La branche infinie  $L_\infty^{\text{ter}}$  est la *colonne vertébrale* de  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$ . Soit maintenant  $(t(i))$  une suite i.i.d d'arbres de Galton-Watson distribués selon  $P^{\text{ter}}$ . On considère l'ensemble des nœuds de  $\mathcal{W}_3$  (ordonné dans l'ordre lexicographique) situés à distance 1 de  $L_\infty^{\text{ter}}$  et on greffe au  $i$ -ème l'arbre  $t(i)$  (voir la figure 4.3). L'arbre obtenu est  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  et on note  $P_\infty^{\text{ter}}$  sa loi.

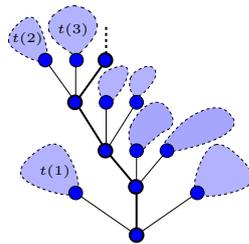


Fig. 3.9 – Exemple d'arbre  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  construit autour d'une colonne vertébrale.

**Proposition 3.6 (Gillet '03).** *Quand  $n$  tend vers l'infini,  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$  converge faiblement vers  $P_\infty^{\text{ter}}$  pour la topologie de la convergence locale.*

### 4.4 Arbre continu d'Aldous

Dans cette section, on étudie la convergence des arbres sous la loi  $P_n^{\text{ter}}$  pour la topologie de Gromov-Hausdorff.

On commence par rappeler le codage usuel d'es arbres en terme de chemin de Dyck. Soit  $t$  un arbre à  $n$  arêtes, imaginons qu'une fourmi parte de la racine de  $t$  et fasse le tour de l'arbre (en visitant les nœuds dans l'ordre lexicographique induit par le formalisme de Neveu) en parcourant une arête par unité de temps. On appelle *contour* de l'arbre la fonction de  $[0, 2n]$  dans  $[0, n]$  qui donne la hauteur de la fourmi dans l'arbre en fonction du temps (voir figure 3.10). Le graphe de cette fonction est un chemin de Dyck de longueur  $2n$ , c'est-à-dire un chemin situé dans le quart de plan positif partant de  $(0, 0)$ , arrivant en  $(2n, 0)$ , en faisant des pas  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .

Réciproquement, tout chemin de Dyck est le contour d'un unique arbre.

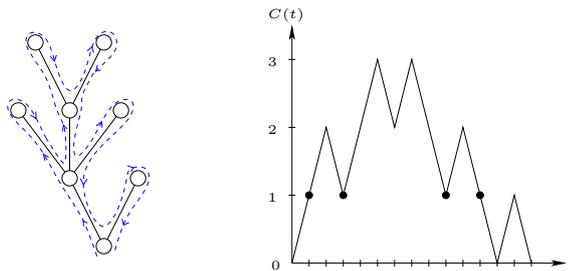


Fig. 3.10 – Un arbre et son contour

On introduit maintenant la notion d'arbre réel, en généralisant la construction des arbres « classiques » à partir de leur contour. Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ , on associe à  $f$  l'arbre réel défini de la manière suivante (c.f. figure 3.11). Pour  $s, s' \in [0, 1]$ , on pose :

$$m_f(s, s') := \min_{s \wedge s' \leq r \leq s \vee s'} f(r),$$

le minimum de  $f$  entre les abscisses  $s$  et  $s'$ . Cela permet de définir une relation d'équivalence sur  $[0, 1]$  en posant  $s \sim_f s'$  si et seulement si  $f(s) = f(s') = m_f(s, s')$ . L'arbre réel associé à  $f$  est défini comme l'espace quotient  $\mathcal{T}_f := [0, 1] / \sim_f$ .

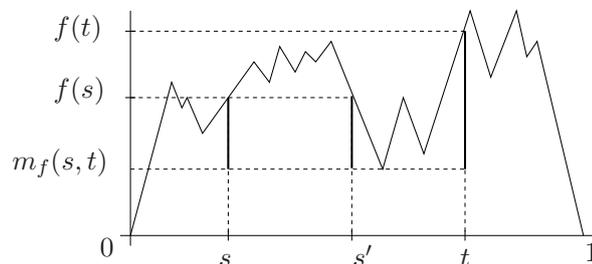


Fig. 3.11 – Graphe d'une fonction continue  $f$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$  et  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Sur cet exemple  $s \sim_f s'$  et la distance  $d_f(s, t) = d_f(s', t) = f(s) + f(t) - 2m_f(s, t)$  est la somme des longueurs des segments verticaux.

Les arbres planaires «classiques» se plongent de manière injective dans les arbres réels. Il suffit, pour le voir, de renormaliser par  $2n$  le chemin de Dyck qui code leur contour. Cela permet d'associer à chaque arbre planaire une fonction vérifiant les conditions ci-dessus de manière injective et donc d'associer à chaque arbre planaire l'arbre réel correspondant à cette fonction. De plus, cette représentation permet de retrouver les éléments de l'arbre planaire : par exemple, deux éléments  $s$  et  $s'$  de  $[0, 1]$  qui codent le même nœud de l'arbre planaire dans le chemin de Dyck renormalisé sont équivalents pour  $\equiv$ .

On peut munir un arbre réel d'une métrique qui prolonge la métrique  $d_t$  définie sur un arbre planaire. Soient  $s$  et  $s'$  deux éléments de  $[0, 1]$ , on pose :

$$d_f(s, s') = f(s) + f(s') - 2m_f(s, s'). \quad (4.2)$$

On peut s'assurer que  $d_f(s, s')$  ne dépend que des classes d'équivalence de  $s$  et de  $s'$  et que  $d_f$  est une distance sur  $\mathcal{T}_f$ . Muni de  $d_f$ , l'arbre réel  $\mathcal{T}_f$  est un espace métrique compact. Là encore, si  $f$  est le contour renormalisé d'un arbre planaire, la distance  $d_f$  coïncide avec la distance de graphe sur les arbres planaires.

Avant d'énoncer les résultats de convergence des arbres pour la topologie de Gromov-Hausdorff, je réalise une petite digression sur l'excursion brownienne (pour une présentation plus détaillée, voir par exemple [Pit06]). On note  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien normalisé, c'est-à-dire que  $B$  est un processus stochastique tel que  $B_0 = 0$ , dont les trajectoires sont continues, dont les accroissements disjoints sont indépendants et tels que  $B_{t+s} - B_t$  suit une loi normale de moyenne nulle et de variance  $s$ . De manière informelle, une *excursion brownienne normalisée* est un processus stochastique  $(e_t, 0 \leq t \leq 1)$  dont la loi est donnée par :

$$e \stackrel{(d)}{=} (B | B_t > 0 \text{ pour tout } 0 < t < 1 \text{ et } B_1 = 0),$$

où  $\stackrel{(d)}{=}$  désigne l'égalité en loi. Cette définition est non rigoureuse, puisqu'elle fait apparaître un conditionnement par un événement de probabilité nulle. Elle peut néanmoins être rendue rigoureuse (par exemple par la méthode de  $h$ -transformation de Doob [Kni81]).

L'excursion brownienne intervient naturellement lorsqu'on étudie la convergence de marches aléatoires dans  $\mathbb{N}$ , conditionnées à revenir en 0 après  $n$  étapes. Plus précisément, soit  $(X_i)_i$  une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne 0 et de variance 1, pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit  $S_t$  par interpolation linéaire de  $S_n$ . Soit  $T_- := \inf\{n | S_n < 0\}$ , alors [Kai76] quand  $n$  tend vers l'infini (le long d'une sous-suite de valeurs possibles de  $T_-$ ) :

$$(S_{nt}/\sqrt{n}, 0 \leq t \leq 1 | T_- = n) \xrightarrow[n]{(d)} (e_t, 0 \leq t \leq 1).$$

Revenons aux arbres, le contour d'un arbre distribué selon  $P_n^{\text{ter}}$  (c.f. section 4.2) n'est pas simplement l'excursion associée à une marche aléatoire ; la probabilité d'avoir un pas montant ou descendant à un instant dépend de manière compliquée de tout le passé du contour. Néanmoins, Aldous [Ald91] montre que correctement renormalisé, le contour d'une suite d'arbres distribués selon  $P_n^{\text{ter}}$  converge donc en loi vers l'excursion brownienne normalisée :

**Théorème 3.7 (Aldous '91).** Soit  $(t_n)$  une suite d'arbres indépendants tels que  $t_n \sim P_{3n+1}^{\text{ter}}$  et soit  $(C_n(k), 0 \leq k \leq 6n)$  la suite des contours associée à  $(t_n)$ , alors quand  $n$  tend vers l'infini

$$\left( \frac{C_n(6nu)}{\sqrt{3n}}, 0 \leq u \leq 1 \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\sqrt{2}e_u, 0 \leq u \leq 1)$$

Un bon candidat pour la limite des arbres est alors l'*arbre continu d'Aldous* ou CRT (« *continuum random tree* ») introduit par Aldous [Ald91] et [Ald93]. Le CRT est l'arbre réel codé par  $2e$ , où  $e(t) = (e(t), 0 \leq t \leq 1)$  est l'excursion brownienne normalisée. Aldous [Ald91], [Ald93] prouve que le CRT est effectivement la limite des arbres, au sens suivant (on pourra également se rapporter à Le Gall [LG05], Marckert & Mokkadem [MM03] ou Pitman [Pit06, Section 6] ) :

**Proposition 3.8.** Soit  $((T_n, d_{T_n}))_n$  une suite d'arbres (munis de leur distance de graphe) aléatoires indépendants tels que  $T_n \sim P_{3n+1}^{\text{ter}}$ , alors pour la topologie de Gromov-Hausdorff :

$$\left( T_n, \frac{d_{T_n}}{\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (T_{2e}, d_{2e}),$$

où  $(T_{2e}, d_{2e})$  est l'arbre continu d'Aldous.

## 5 Triangulations en pile et arbres ternaires

### 5.1 Bijection entre les triangulations en pile et les arbres ternaires

La décomposition des triangulations en pile donnée à la section 3.4 implique l'existence de bijections entre les triangulations en pile et les arbres ternaires. On donne ici une bijection particulière, fondamentale dans la suite pour déduire des résultats sur les cartes à partir des résultats sur les arbres.

En parallèle de la construction d'une triangulation en pile, on peut construire un arbre ternaire (comme représenté sur la figure 3.12), tel qu'à chaque étape de la construction, il existe une bijection entre les faces finies de la triangulation et les feuilles de l'arbre et entre les sommets internes de la triangulation et les nœuds internes de l'arbre. Cette construction est décrite de manière rigoureuse dans la section 2.3.2 du chapitre 4, il faut notamment s'assurer que l'arbre ternaire obtenu ne dépend pas de l'histoire choisie pour la triangulation en pile, c'est-à-dire que quel que soit l'ordre d'insertion des sommets choisis, l'arbre final obtenu soit le même.

Cet arbre est construit de la manière suivante : la triangulation réduite à un triangle correspond à l'arbre réduit à sa racine et, dans ce cas, la bijection entre les faces finies de la carte et les feuilles de l'arbre est simplement l'application qui associe la racine de l'arbre à l'unique face finie de la triangulation. On définit ensuite la bijection récursivement, supposons donnés une triangulation en pile et l'arbre ternaire correspondant ainsi que la bijection entre les faces finies de la triangulation et les feuilles de l'arbre. L'insertion d'un sommet (et des 3 arêtes correspondantes) dans une face finie de la triangulation se traduit dans l'arbre par le remplacement de la feuille associée à cette face par un nœud interne et ses trois fils. Ce nœud interne est alors défini comme l'image du nouveau sommet de la triangulation par la bijection entre les sommets internes de la carte et les nœuds internes

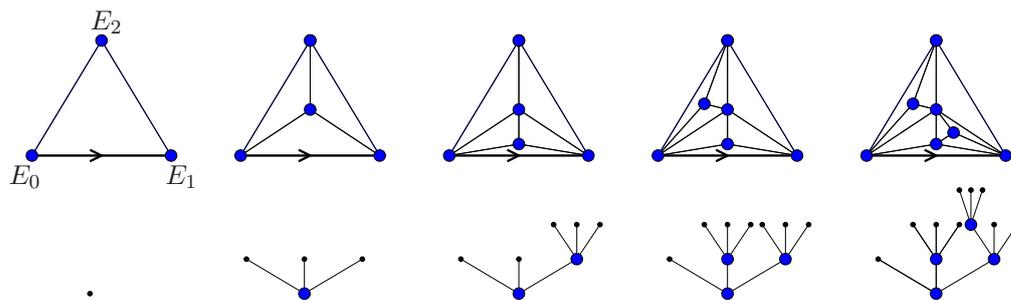
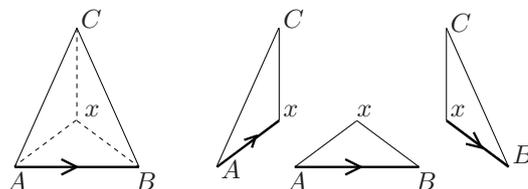


Fig. 3.12 – Construction en parallèle d'une triangulation en pile et d'un arbre ternaire

de l'arbre. Il reste à associer à chacune des nouvelles faces de la triangulation un des fils. Décider à quelle nouvelle feuille de l'arbre, on associe chacune des nouvelles faces de la carte relève d'un choix quasi-arbitraire. Dans [DS07] est donné un choix particulier, qu'on décrit ci-dessous, qui permet d'établir facilement des propriétés sur les distances dans la carte en fonction du codage des nœuds de l'arbre selon le formalisme de Neveu, propriétés énoncées dans la proposition 3.9.

Pour le triangle initial, on procède de la manière suivante : soit  $(E_0, E_1)$  l'arête racine et  $E_2$  le troisième sommet du triangle. L'insertion d'un sommet  $x$  dans la face  $(E_0, E_1, E_2)$  conduit à la formation de trois nouvelles faces  $(E_1, E_2, x)$ ,  $(E_0, x, E_2)$  et  $(E_0, E_1, x)$ . On enracine ces trois faces en  $(E_1, E_2)$ ,  $(E_0, x)$  et  $(E_0, E_1)$  respectivement et on les envoie respectivement sur les nœuds 1, 2 et 3 de l'arbre associé. De cette manière, à chaque étape de la construction, on munit chacune des faces de la carte d'une arête orientée. Lors de l'insertion d'un sommet dans une face, on appelle  $A$ ,  $B$  et  $C$  les sommets de cette face de telle sorte que  $(A, B)$  soit l'arête orientée. Soit  $u$  le nœud de l'arbre correspondant à la face  $ABC$ , on définit les images respectives des nœuds  $u1$ ,  $u2$  et  $u3$  comme les faces  $(B, C, x)$ ,  $(A, x, C)$  et  $(A, B, x)$  (c.f. figure 3.13).


 Fig. 3.13 – Propagation de l'orientation canonique des faces. Si la première face est envoyée sur  $u$ , alors les autres sont envoyées, de gauche à droite, sur  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_1$ .

## 5.2 Distance dans la triangulation

Cette partie est consacrée à la définition d'une fonctionnelle  $\Lambda$  sur des mots qui permet d'obtenir la distance entre deux sommet internes de la carte en fonction des nœuds de l'arbre qui leur sont associés.

Soit  $W_{1,2,3}$  l'ensemble des mots sur l'alphabet  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$  dans lesquels apparaissent au moins une fois chacune des lettres de  $\Sigma_3$ . Les mots 321, 123, 113211213123 sont par exemple des éléments de  $W_{1,2,3}$ .

Soit  $u = u_1 \dots u_k$  un mot sur l'alphabet  $\Sigma_3$ , on pose  $\tau_1(u) := 0$  et  $\tau_2(u) := \inf\{i \mid i > 0, u_i = 1\}$  le premier instant où apparaît un 1 dans l'écriture de  $u$ . Soit  $j \geq 3$ , on définit :

$$\tau_j(u) := \inf\{i \mid i > \tau_{j-1}(u) \text{ tel que } u_{1+\tau_{j-1}(u)} \dots u_i \in W_{1,2,3}\}.$$

Cela revient à décomposer  $u$  en facteurs, le premier se terminant dès qu'un 1 apparaît, les autres à chaque fois que chacune des lettres 1, 2 et 3 est apparue. Par exemple, si  $u = 22123122131 = 221\ 231\ 2213\ 1$  alors  $\tau_1(u) = 0$ ,  $\tau_2(u) = 3$ ,  $\tau_3(u) = 6$  et  $\tau_4(u) = 10$ . On note alors

$$\Lambda(u) = \max\{i \mid \tau_i(u) \leq |u|\}, \quad (5.1)$$

le nombre de tels facteurs dans un mot  $u$ .

De plus, soient  $u = wa_1 \dots a_k$  et  $v = wb_1 \dots b_l$  avec  $a_1 \neq b_1$ , (autrement dit  $w$  est le ppcm de  $u$  et de  $v$ ), on étend la définition de  $\Lambda$ , en posant :

$$\Lambda(u, v) = \Lambda(a_1 \dots a_k) + \Lambda(b_1 \dots b_l). \quad (5.2)$$

On résume dans la proposition suivante les propriétés de la bijection entre les arbres ternaires et les triangulations en pile. Le point (c) est dû à Darasse et Soria [DS07], la preuve des points (a) et (b) ainsi que de nombreuses remarques sont données dans la partie 2.3.2 du chapitre 4.

**Proposition 3.9.** *Pour tout  $K \geq 1$  il existe une bijection*

$$\begin{aligned} \Psi_K^\Delta : \Delta_{2K} &\longrightarrow \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}} \\ m &\longmapsto t := \Psi_K^\Delta(m) \end{aligned} ,$$

*qu'on étend en une bijection entre les sommets internes de  $m$  et les nœuds internes de  $t$  (on note  $u'$  l'image du sommet  $u$  par cette bijection), et entre les faces finies de  $m$  et les feuilles de  $t$  et ayant les propriétés suivantes :*

- (a) *Pour tout nœud interne  $u$  de  $m$ ,  $|\Lambda(u') - d_m(E_0, u)| \leq 1$ .*
- (b) *Pour tous nœuds internes  $u$  et  $v$  de  $m$ ,*

$$|d_m(u, v) - \Lambda(u', v')| \leq 4.$$

- (c) *Soit  $u$  un nœud interne de  $m$ , alors le degré de  $u$  est donné par :*

$$\deg_m(u) = 3 + \#\{v' \in t^\circ \mid v' = u'w', w' \in 1\{2, 3\}^* \cup 3\{1, 2\}^* \cup 2\{1, 3\}^*\}, \quad (5.3)$$

*où l'ensemble dans (5.3) est l'union des sous-arbres de  $t^\circ$  enracinés en  $u'1$ ,  $u'2$  et  $u'3$  et formés respectivement des « arbres binaires » dont les nœuds ne contiennent respectivement pas de 1, pas de 2, pas de 3.*

### 5.3 Loi induite sur les arbres

La bijection  $\Psi_K^\Delta$  définie dans la proposition 3.9, permet de transporter les deux lois  $\mathbb{U}_{2K}^\Delta$  et  $\mathbb{Q}_{2K}^\Delta$  sur l'ensemble  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  des arbres ternaires à  $3K - 2$  nœuds. On définit ainsi la distribution :

$$\mathbb{U}_{3K-2}^{\text{ter}} := \mathbb{U}_{2K}^\Delta \circ (\Psi_K^\Delta)^{-1} \quad (5.4)$$

qui est simplement la distribution uniforme sur  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  puisque  $\Psi_K^\Delta$  est une bijection et la distribution

$$\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}} := \mathbb{Q}_{2K}^\Delta \circ (\Psi_K^\Delta)^{-1} \quad (5.5)$$

qui donne à chaque arbre un poids proportionnel à son nombre d'histoires, cela revient à considérer la distribution des arbres obtenus lorsqu'on part d'un arbre réduit à une

racine et qu'à chaque étape on choisit, uniformément parmi les feuilles de l'arbre, une feuille qu'on remplace par un nœud interne et ses trois fils. Une description alternative de la loi  $\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}}$  est donnée dans la section 2.4 du chapitre 4.

## 6 Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi uniforme

On présente dans cette section les résultats obtenus sur le comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi uniforme. La première partie concerne la convergence pour la topologie de Gromov-Hausdorff. On énonce ensuite deux résultats concernant le comportement local de la carte : la deuxième partie traite de la convergence de la carte pour la topologie de la convergence locale et la troisième partie traite de la loi du degré des sommets.

On se contente ici d'introduire les objets qui interviennent dans les résultats de convergence sans entrer dans les détails techniques ni dans les preuves. Comme annoncé dans la section 5, ces résultats de convergence reposent sur la bijection entre les triangulations en pile et les arbres ternaires. Des comportements connus des arbres aléatoires sous différentes distributions de probabilité (et rappelés dans la section 4), on arrive à déduire des résultats sur les triangulations en pile. Il y a deux difficultés pour obtenir les résultats énoncés dans les deux premières parties. La première consiste à relier précisément les distances dans la carte aux distances dans l'arbre. On a vu en effet dans la section 5 qu'étant donné un sommet  $u$  d'une triangulation en pile  $m$ , la distance de  $u$  à la racine de  $m$  pouvait être obtenue comme une fonctionnelle simple du nœud  $u'$  associé à  $u$  dans l'arbre ternaire associé à  $m$  par la bijection  $\Psi^\Delta$ . Pour autant, on ne peut pas établir de liens non triviaux entre la distance de  $u$  à la racine de  $m$  et la distance de  $u'$  à la racine de  $t$  (par exemple, un mot formé de  $n$  fois la lettre 1 code un nœud situé à distance  $n$  de la racine de l'arbre et correspond à un sommet de la carte situé à distance 1 de la racine de celle-ci et ce quelle que soit la valeur de  $n$ ). La deuxième difficulté consiste à calculer la loi des fonctionnelles des arbres apparaissant. On donne une idée rapide dans chacune de ces parties des méthodes utilisées.

### 6.1 Convergence pour la topologie de Gromov-Hausdorff sous la loi uniforme

On a vu dans la section 4.4 que l'objet limite qui apparaît lorsqu'on étudie la convergence des arbres sous la loi uniforme pour la topologie de Gromov-Hausdorff est le CRT. On montre dans cette partie que les triangulations en pile sous la loi uniforme et correctement renormalisées convergent également vers le CRT. On n'énonce ici que le résultat principal concernant cette notion de convergence, d'autres résultats et leurs preuves sont donnés dans la section 5.2 du chapitre 4.

Pour tout  $n \geq 2$ , on tire une carte  $M_n$  selon la loi  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  (i.e.  $M_n$  est tirée uniformément parmi toutes les triangulations en pile à  $2n$  faces). On note  $m_n$  l'ensemble des sommets de  $M_n$  et on le munit de sa distance de graphe  $d_{m_n}$ .

Le théorème suivant donne la limite de la suite d'espaces métriques aléatoires  $(m_n, d_{m_n})$ .

**Théorème 3.10.** *Sous la loi  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,*

$$\left( m_n, \frac{d_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

*pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.*

Ce résultat établit donc la convergence, en tant qu'espace métrique, du modèle des triangulations en pile sous la loi uniforme. C'est, à notre connaissance, le seul cas où est obtenue la convergence, en tant qu'espace métrique, d'un modèle de cartes aléatoires (exception faite des arbres) et, à ce titre, on peut considérer que c'est le résultat majeur de ce chapitre.

*Idée de la preuve.* Soit  $M_n$  une carte sous la loi  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  et  $T$  l'arbre associé à  $m_n$  par la bijection  $\Psi^\Delta$ . Pour  $1 \leq r \leq n$ , on note  $w(r)$  le  $r$ -ième nœud interne de  $T$  quand on parcourt ses nœuds dans l'ordre lexicographique induit par le formalisme de Neveu et  $u(r)$  le sommet de  $M_n$  correspondant. D'après la proposition 3.9, on sait que pour tout  $1 \leq r, s \leq n$ ,

$$|d_{m_n}(u(r), u(s)) - \Lambda(w(r), w(s))| \leq 4.$$

Soient  $s, t \in [0, 1]$ , par abus de notation, on note  $d_{T^\circ}(ns, nt) := d_{T^\circ}(w(\lfloor ns \rfloor), w(\lfloor nt \rfloor))$  et  $d_{m_n}(ns, nt) := d_{m_n}(u(\lfloor ns \rfloor), u(\lfloor nt \rfloor))$ . Le théorème 3.10 est alors obtenu comme corollaire du résultat plus fort suivant :

**Proposition 3.11.** *Soient  $0 \leq s < t \leq 1$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , sous la loi  $\mathbb{U}_{3n+1}^\Delta$ , alors*

$$\left| \frac{d_{m_n}(ns, nt)}{(2/11)\sqrt{3n/2}} - \frac{d_{T^\circ}(ns, nt)}{\sqrt{3n/2}} \right| \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 0.$$

La preuve de cette proposition est le résultat le plus difficile de ce travail, elle consiste à contrôler de manière fine  $\Lambda(w(\lfloor ns \rfloor), w(\lfloor nt \rfloor))$ . L'idée est de montrer qu'en tant que processus, et au premier ordre,  $\Lambda(w(\lfloor ns \rfloor), w(\lfloor nt \rfloor))$  se comporte asymptotiquement comme  $(2/11)d_{T^\circ}(ns, nt)$ , et possède la même limite en distribution.

Notez que le facteur de normalisation  $2/11$  provient du lemme facile suivant :

**Lemme 3.12.** *Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d et distribuées uniformément sur  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$ . Soit  $W_n$  le mot  $X_1 \dots X_n$ , alors :*

$$n^{-1} \Lambda(W_n) \xrightarrow[n]{(a.s.)} \frac{2}{11}.$$

Les ingrédients clés de l'estimation de  $\Lambda$  sont la convergence des arbres ternaires vers l'arbre continu d'Aldous et une étude précise de la combinatoire des arbres ternaires. Tous les détails sont donnés dans la partie 9.1 du chapitre 4.  $\square$

## 6.2 Convergence locale sous la loi uniforme

### 6.2.1 Convergence locale des arbres vs convergence locale des cartes

Pour déduire de la proposition 3.6 concernant la convergence locale d'arbres, un résultat concernant la convergence locale de cartes, deux difficultés apparaissent. La première est de réussir à faire le lien entre la convergence d'une suite d'arbres ternaires et la convergence de la suite de triangulations en pile associée (via la bijection  $\Psi^\Delta$ ), il faut pour cela «relier les boules» dans la triangulation et dans la carte. On donne dans cette partie une description informelle et très partielle des idées qui interviennent (tous

les détails pourront être trouvés dans la section 4.3). La deuxième difficulté consiste à définir une bonne notion de carte infinie, on y reviendra dans la section suivante.

On a vu au début de la partie 6 que les boules d'un arbre et celles d'une carte peuvent être très différentes. Pour obtenir des résultats sur la convergence locale des triangulations sous la loi uniforme à partir de résultats sur la convergence locale d'arbres, il faut donc s'assurer que la probabilité qu'existent des noeuds situés très loin dans l'arbre et correspondant à des noeuds très proches de la racine dans la carte est faible. Ceci repose sur la structure particulière de l'arbre limite  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  construit autour d'une unique colonne vertébrale infinie.

### 6.2.2 Construction d'une triangulation infinie

Pour pouvoir étendre le résultat de convergence pour les arbres à un résultat de convergence pour les cartes, il faut définir une carte infinie à partir de l'arbre infini  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  défini dans la section 4.3. Autrement dit, cela revient à étendre la bijection  $\Psi^\Delta$ , définie dans la section 5 à des arbres infinis, une idée naturelle est de définir la carte infinie comme la limite (en un sens à préciser) de la suite des cartes  $(m_n)$  obtenues à partir des arbres  $(\mathbf{t}_n^{\text{ter}})$ , où  $(\mathbf{t}_n^{\text{ter}})$  est la suite des boules de rayon  $n$  de  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  (i.e. la suite des sous-arbres finis de  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  formés des sommets à distance au plus  $n$  de la racine). La bonne notion de limite à considérer est détaillée dans la section 4.3.1 du chapitre 4 et repose essentiellement sur le choix d'un plongement canonique pour chaque triangulation  $m_n$ .

Il faut ensuite s'assurer que la limite qu'on obtient est bien une *carte infinie* telle que définie par Angel et Schramm dans [AS03], autrement dit qu'elle vérifie la propriété suivante : si  $(\rho_n)$  est une suite de points appartenant à des arêtes distinctes de  $m$ , alors les point d'accumulation de  $(\rho_n)$  n'appartiennent ni à des arêtes, ni à des sommets de  $m$ .

Cette condition permet d'assurer que des faces ne sont pas créées artificiellement. Par exemple, on représente sur la figure 6.2.2 deux plongements possibles pour le graphe formé d'une ligne infinie : alors que chacune des cartes finies n'a qu'une face, selon la manière dont on choisit de plonger le graphe, la carte limite obtenue a une ou deux faces. C'est précisément le cas où une deuxième face est créée qu'on veut éviter. Dans le cas

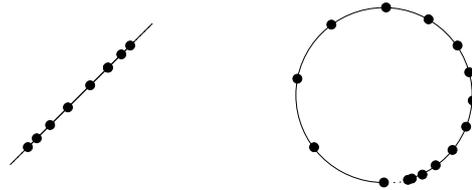


Fig. 3.14 – Deux plongements de la ligne infinie. Le plongement de gauche définit une carte infinie tandis qu'à droite, une deuxième face est créée artificiellement.

des triangulations en pile, on peut vérifier facilement qu'il existe un plongement *ad hoc* qui définit une carte infinie, c.f section 4.3.1 du chapitre 4. Cela légitime la définition suivante.

**Définition 3.13.** Soit  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  un arbre distribué selon  $P_\infty^{\text{ter}}$ , on note  $m_\infty$ , la carte (infinie) associée à  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  et  $P_\infty^\Delta$  la loi de  $m_\infty$ .

On peut alors montrer le théorème suivant (voir la preuve du théorème 4.22 correspondant dans le chapitre 4) :

**Théorème 3.14.** *La suite  $(\mathbb{U}_{2n}^\Delta)$  converge faiblement vers  $P_\infty^\Delta$  pour la topologie de la convergence locale, lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

### 6.3 Comportement asymptotique du degré sous la loi uniforme

On s'intéresse dans cette partie à la distribution du degré des sommets dans une triangulation en pile. Soit  $m$  une triangulation en pile et  $t$  l'arbre ternaire associé, en étudiant le nombre de nœuds de certains sous-arbres de  $t$ , on peut obtenir (voir section 6 du chapitre 4) la loi du degré des sommets dans une triangulation en pile sous la loi uniforme. La proposition suivante regroupe les résultats obtenus :

**Proposition 3.15.** *Soit  $m_n$  une carte distribuée selon  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,  $u(1)$  le premier sommet inséré dans  $m_n$  et  $\mathbf{u}$  un sommet aléatoire choisi uniformément parmi les sommets internes de  $m_n$ . Alors :*

- (i)  $\deg_{m_n}(u(1)) \xrightarrow[n]{(d)} X$  où pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X = k + 3) = \frac{k}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}}$ ,
- (ii)  $\deg_{m_n}(\mathbf{u}) \xrightarrow[n]{(d)} Y$  où pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(Y = k + 3) = \frac{1}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+2}}$ .

Dans [DS07] Darasse et Soria obtiennent, en utilisant des séries génératrices, le point (ii) de cette proposition mais pour un modèle de triangulations en pile différent où les triangulations sont tirées selon une distribution boltzmannienne. Néanmoins, modulo un lemme technique sur la distribution d'un sous-arbre d'un arbre de Galton-Watson, on peut déduire notre résultat du leur (les détails devraient être donnés dans un de leurs futurs articles).

On donne dans la section 6 du chapitre 4 une preuve de ce résultat reposant sur des résultats connus de combinatoire des arbres.

## 7 Comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi historique

On s'intéresse à présent à la convergence des triangulations en pile sous la loi historique. Leur comportement est très différent que dans le cas uniforme. Tout d'abord, il est facile de montrer que le degré de la racine converge presque sûrement vers l'infini avec le nombre de nœuds (voir la section 7.2), il ne peut donc pas y avoir de résultat de convergence locale. En revanche, il existe des résultats de convergence pour la carte renormalisée mais pas pour la topologie de Gromov-Hausdorff comme on va le voir dans la section suivante. On pourra se rapporter à la section 7 du chapitre 4 pour un exposé plus détaillé de tous les résultats donnés dans cette partie.

### 7.1 Convergence des cartes comme espace métrique sous la loi historique

Le comportement asymptotique des triangulations en pile sous la loi historique est décrit par le théorème suivant :

**Théorème 3.16.** Soit  $M_n$  une triangulation en pile sous la loi  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ,  $k$  nœuds de  $M_n$  choisis indépendamment et uniformément parmi les nœuds internes de  $M_n$ . On a :

$$\left( \frac{d_{M_n}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{3(2/11) \log n} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2} \xrightarrow[n]{\text{proba.}} (1_{i \neq j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2},$$

où la matrice  $(1_{i \neq j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}$  désigne la matrice de la distance discrète sur un ensemble à  $k$  éléments.

Pour la preuve de ce théorème, on pourra se rapporter à la preuve du théorème 4.32 qui lui correspond dans le chapitre 4.

La notion de convergence qui apparaît dans ce théorème est la convergence des lois fini-dimensionnelles. En fait, s'il existe un espace métrique limite dans ce cas, le théorème 3.16 implique qu'il ne peut être compact ; il ne peut donc pas y avoir de convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

Par ailleurs, contrairement au théorème 3.10 sur la convergence des triangulations sous la loi  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ , la renormalisation des arêtes est ici en  $\log(n)$  et non en  $\sqrt{n}$ . Ceci est cohérent avec les calculs de Zhou [ZYW05] et Zhang et al. [ZCFR06].

Dans cette partie, il faut un peu travailler pour obtenir le résultat sur les arbres mais, une fois prouvé, il implique quasiment directement le résultat sur les cartes. Le théorème 3.16 repose sur le théorème suivant sur les arbres ternaires dont la preuve est donnée dans la section 7 du chapitre 4 et repose sur l'interprétation comme arbres de fragmentation des arbres distribués sous la loi historique.

**Proposition 3.17.** Soit  $\mathbf{t}$  un arbre aléatoire sous la loi  $\mathbb{Q}_{3n-2}^{\text{ter}}$  (définie dans la section 5.3), et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux nœuds choisis indépendamment et uniformément parmi les nœuds internes de  $\mathbf{t}^\circ$  ; on note  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  leur plus grand ancêtre commun.

1) On a  $\left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(|\mathbf{u}| - \frac{3}{2} \log n, |\mathbf{v}| - \frac{3}{2} \log n\right) \xrightarrow[n]{(d)} (N_1, N_2)$  où  $N_1$  et  $N_2$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance égale à 1.

2) Soient  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_l$  les mots tels que  $\mathbf{u} = \mathbf{w}\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_l$ . On pose

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k \text{ et } \mathbf{v}^* = \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_l,$$

alors conditionnellement à leur longueur  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{v}^*$  sont des mots aléatoires indépendants formés respectivement de  $|\mathbf{u}^*|$  et  $|\mathbf{v}^*|$  lettres choisis indépendamment et uniformément dans  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$ .

3) Pour toute suite  $(a_n)$  qui converge vers l'infini, on a  $|\mathbf{w}|/a_n \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 0$ .

## 7.2 Comportement asymptotique du degré de la racine sous la loi historique

On donne dans cette section le comportement asymptotique du degré de la racine d'une triangulation en pile sous la loi historique. Le degré du  $j$ -ème nœud inséré dans la carte pourrait être obtenu de manière similaire comme décrit dans la section 7.2 du chapitre 4, où on trouvera également quelques observations sur la taille des faces et le degré asymptotique des nœuds.

Soit  $M_n$  une carte tirée selon la loi  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ , on note  $D^n$  le degré de la racine de  $M_n$ . Si on insère un nouveau sommet (et les trois arêtes correspondantes) dans une face choisie uniformément parmi les faces internes de  $M_n$ , on obtient une carte  $M_{n+1}$  de loi  $\mathbb{Q}_{2(n+1)}^\Delta$ . En notant  $D^{n+1}$  le degré de la racine de  $M_{n+1}$ , on voit facilement que :

$$D^{n+1} = D^n + B(D^n/(2n-1)),$$

où  $B(p)$  désigne une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Autrement dit,  $B(D^n/(2n-1))$  vaut 1 avec probabilité  $D^n/(2n-1)$  (c'est le cas où l'insertion du nouveau sommet a lieu dans une face adjacente à la racine) et vaut 0 sinon.

Cette chaîne de Markov suit en fait la même dynamique que l'un modèle d'urnes simple (décrit dans la section 7.2 du chapitre 4) et étudié par Flajolet et al. dans [FDP06, ex.7, p.94], cela permet d'obtenir le résultat suivant :

**Proposition 3.18.** *Soit  $M_n$  une carte distribuée selon  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ , on note  $E_0$  le sommet racine de  $M_n$ , alors :*

$$\mathbb{Q}_{2n}^\Delta(\deg_{M_n}(E_0 = k + 2)) = \frac{k-2}{n} 2^{k-1} \frac{\binom{2n-k+1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

## 8 Quadrangulations en pile

Alors que les triangulations en pile font l'objet d'une importante littérature, les quadrangulations en pile font un peu figure de parent pauvre. Cela vient peut-être du fait qu'il n'existe pas de modèles de quadrangulations en pile aussi naturels que leurs analogues pour les triangulations.

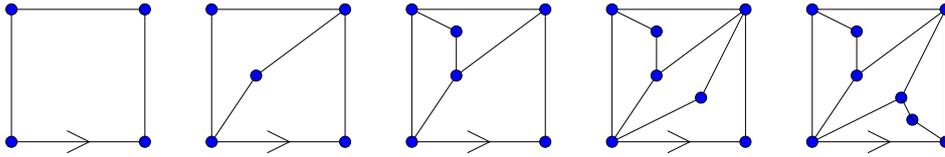
On commence par présenter le modèle de quadrangulations qui nous a semblé le plus naturel, malheureusement nous n'avons pas été en mesure d'établir de résultats analogues aux théorèmes 3.10 et 3.16 pour ce modèle. C'est pourquoi, on présente ensuite un second modèle, certes moins satisfaisant en termes de cartes, mais pour lequel les bijections avec les arbres se passent mieux, ce qui permet d'étendre sans difficulté tous les résultats obtenus pour les triangulations.

### 8.1 Un premier modèle de quadrangulations en pile

Ce premier modèle est décrit de manière plus détaillée dans la section 8.1 du chapitre 4, on le présente ici rapidement.

Étant donnée une quadrangulation, on choisit une face finie  $f$  dont on appelle  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les sommets (les arêtes incidentes à  $f$  étant  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  et  $DA$ ). On ajoute alors un sommet  $x$  dans  $f$  ainsi que la paire d'arêtes  $Ax$  et  $xC$  ou bien la paire  $Bx$  et  $xD$ . On note  $\square'_k$  l'ensemble des quadrangulations obtenues en partant d'un carré et après  $k-1$  telles insertions. Un exemple de construction d'une quadrangulation de  $\square'_5$  est représenté sur la figure 3.15.

Il existe des bijections entre ces quadrangulations et des modèles d'arbres (un exemple d'une telle bijection est donnée dans la proposition 4.36 du chapitre 4). Mais soit les arbres obtenus sont de degré non borné et dans ce cas les méthodes utilisées pour les arbres ternaires et les triangulations en pile ne s'appliquent plus, soit les arbres sont plus simples, mais les distances dans la carte ne s'obtiennent pas facilement en fonction des nœuds de l'arbre.

Fig. 3.15 – Construction d'une quadrangulation de  $\square'_k$ 

C'est ce qui nous a conduit à définir un deuxième modèle de quadrangulations en pile pour lequel il existe une bijection simple avec des arbres binaires.

## 8.2 Un modèle de quadrangulations en pile proche des arbres binaires

La définition formelle précise de ce modèle étant un peu fastidieuse, on n'en donne ici que l'intuition et on renvoie le lecteur à la section 8.2 du chapitre 4 pour les détails techniques.

La construction de ce modèle est similaire au modèle précédent : on part d'une quadrangulation, on choisit une face  $(A, B, C, D)$  et on insère un sommet  $x$  dans cette face ainsi qu'une paire d'arêtes  $Ax, xC$  ou  $Bx, xD$ . La différence avec le modèle de quadrangulations défini dans la section précédente est qu'à chaque étape, le choix de la paire d'arêtes que l'on insère,  $Ax, xC$  ou  $Bx, xD$ , est dicté par les étapes antérieures de la construction. L'idée est d'éviter la construction de paires d'arêtes « parallèles » du type  $Ax, xC$  et  $Ax', x'C$  (la troisième étape de la construction de la quadrangulation donnée figure 3.15 fait apparaître deux paires d'arêtes parallèles, une telle insertion est interdite dans ce nouveau modèle).

On note  $\square_k$  l'ensemble des quadrangulations obtenues en partant d'un carré et après  $k - 1$  insertions. Dans la suite, une quadrangulation en pile désignera un élément de  $\cup_{k \geq 1} \square_k$ .

Les éléments de  $\square_k$  peuvent être mis en bijection avec les arbres binaires à  $2k - 1$  nœuds. Il suffit de remarquer qu'étant donnée une quadrangulation en pile, on peut toujours retrouver le premier nœud et la première paire d'arêtes insérées. En découpant la quadrangulation selon cette paire d'arêtes, on obtient deux nouvelles quadrangulations en pile et on peut réitérer la décomposition.

On peut également construire en parallèle une quadrangulation en pile et l'arbre binaire correspondant comme représenté sur la figure 3.16. Comme pour les triangulations, il faut choisir à quelle face de la quadrangulation sont associés respectivement les fils gauche et droit d'un nœud de l'arbre.

La suite est similaire à ce qu'on a exposé sur les triangulations, les détails pourront être trouvés dans la section 8.3 du chapitre 4. Le choix d'une « bonne » bijection permet d'obtenir un codage des distances dans la quadrangulation en fonction de la représentation des nœuds de l'arbre sous forme de mots, on définit pour cela une fonction  $\Lambda'$  analogue à la fonction  $\Lambda$  introduite pour les triangulations. Cela nous permet d'étendre tous les résultats de convergence obtenus pour les triangulations en pile au cas des quadrangulations en pile. Ces résultats sont énoncés dans la section 8.3.1. Seule la constante de normalisation est différente et est égale à  $1/5$  au lieu de  $2/11$  (c.f. Lemme 4.38 du chapitre 4).

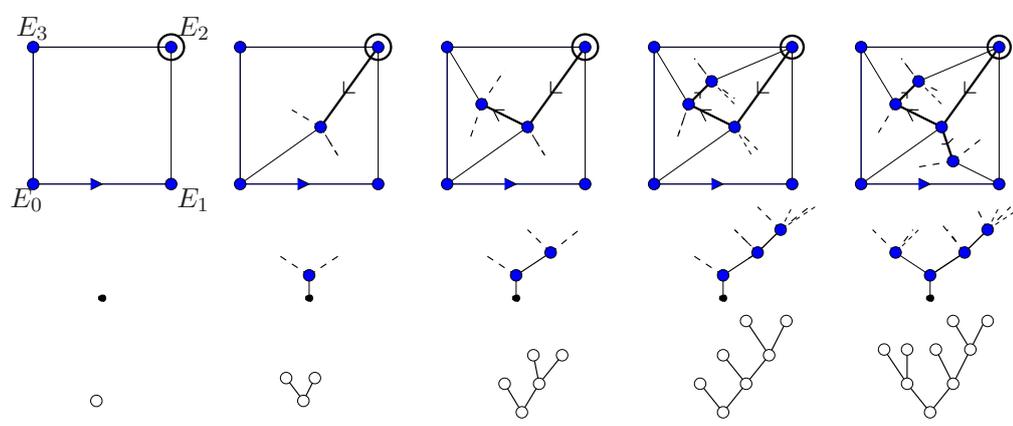


Fig. 3.16 – La construction en parallèle d'un arbre binaire et d'une quadrangulation en pile

# 4

## Some families of increasing planar maps

Ce chapitre est la reproduction de l'article [AM08] (à l'exception de la bibliographie qui a été fondue avec la bibliographie générale de la thèse) écrit avec Jean-François Marckert. Des prérequis à ce travail et un résumé des résultats sont donnés dans le chapitre 3 qui pourra servir de guide de lecture à ce chapitre pour un lecteur non familier des cartes planaires.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>124</b>
1.1	Contents . . . . .	125
1.2	Literature about stack-triangulations . . . . .	126
1.3	Literature about convergence of maps . . . . .	127
<b>2</b>	<b>Stack-triangulations</b> . . . . .	<b>129</b>
2.1	Planar maps . . . . .	129
2.2	Formal construction of stack-triangulations . . . . .	129
2.3	Combinatorial facts . . . . .	131
2.4	Induced distribution on the set of ternary trees . . . . .	137
<b>3</b>	<b>Topologies</b> . . . . .	<b>138</b>
3.1	Topology of local convergence . . . . .	138
3.2	Gromov-Hausdorff topology . . . . .	138
<b>4</b>	<b>Local convergence of stack-triangulations under <math>U_{2n}^\Delta</math></b> . . . . .	<b>139</b>
4.1	Galton-Watson trees conditioned by the size . . . . .	139
4.2	Local convergence of uniform ternary trees . . . . .	140
4.3	Local convergence of stacked-triangulations . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Asymptotic under the Gromov-Hausdorff topology</b> . . . . .	<b>143</b>
5.1	Gromov-Hausdorff convergence of rescaled GW trees . . . . .	144
5.2	Gromov-Hausdorff convergence of stack-triangulations . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Asymptotic behavior of the typical degree</b> . . . . .	<b>147</b>
<b>7</b>	<b>Asymptotic behavior of stack-triangulations under <math>Q_{2n}^\Delta</math></b> . . . . .	<b>150</b>
7.1	Poisson-Dirichlet fragmentation . . . . .	152
7.2	Some features of large maps under $Q^\Delta$ . . . . .	154
<b>8</b>	<b>Two families of increasing quadrangulations</b> . . . . .	<b>156</b>
8.1	A first model of growing quadrangulations . . . . .	156
8.2	A family of stack-quadrangulations . . . . .	157
8.3	The function $\Lambda'$ . . . . .	159

9 Appendix . . . . . 162  
 9.1 Proof of the Theorems of Section 5 . . . . . 162

Stack-triangulations appear as natural objects when one wants to define some families of increasing triangulations by successive additions of faces. We investigate the asymptotic behavior of rooted stack-triangulations with  $2n$  faces under two different distributions. We show that the uniform distribution on this set of maps converges, for a topology of local convergence, to a distribution on the set of infinite maps. In the other hand, we show that rescaled by  $n^{1/2}$ , they converge for the Gromov-Hausdorff topology on metric spaces to the continuum random tree introduced by Aldous. Under a distribution induced by a natural random construction, the distance between random points rescaled by  $(6/11) \log n$  converge to 1 in probability.

We obtain similar asymptotic results for a family of increasing quadrangulations.

### 1 Introduction

Consider a rooted triangulation of the plane. Choose a finite triangular face  $ABC$  and add inside a new vertex  $O$  and the three edges  $AO$ ,  $BO$  and  $CO$ . Starting at time 1 from a single rooted triangle, after  $k$  such evolutions, a triangulation with  $2k + 2$  faces is obtained. The set of triangulations  $\Delta_{2k}$  with  $2k$  faces that can be reached by this growing procedure is not the set of all rooted triangulations with  $2k$  faces. The set  $\Delta_{2k}$  – called the set of stack-triangulations with  $2k$  faces – can be naturally endowed with two very different probability distributions:

- the first one, very natural for the combinatorial point of view, is the uniform distribution  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,
- the second probability  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  maybe more realistic following the description given above, is the probability induced by the construction when the faces where the insertion of edges are done are chosen uniformly among the existing finite faces.

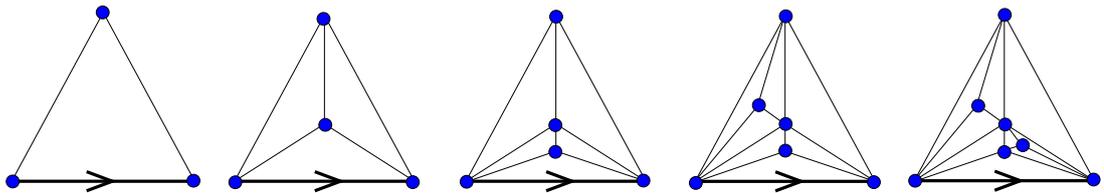


Figure 4.1: Iterative construction of a stack-triangulation. Note that three different histories lead to the final triangulation.

The aim of this paper is to study these models of random maps. Particularly, we are interested in large maps when the number of faces tends to  $+\infty$ . It turns out that this model of triangulations is combinatorially simpler than the set of all triangulations. Under the two probabilities  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  and  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$  we exhibit a *global limit behavior* of these maps.

A model of increasing quadrangulations is also treated at the end of the paper. In few words this model is as follows. Begin with the rooted square and successively choose a finite face  $ABCD$ , add inside a node  $O$  and two new edges:  $AO$  and  $OC$  (or  $BO$  and  $OD$ ). When these two choices of pair of edges are allowed we get a model of quadrangulations that we were unable to treat as wanted (see Section 8.1). When only a suitable choice is possible, we get a model very similar to that of stack-triangulations that may be

endowed also with two different natural probabilities. The results obtained are, up to the normalizing constants, the same as those obtained for stack-triangulations. For sake of brevity, only the case of stack-triangulations is treated in details.

We present below the content of the paper and a rough description of the results, the formal statements being given all along the paper.

## 1.1 Contents

In Section 2 we define formally the set of triangulations  $\Delta_{2n}$  and the two probabilities  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  and  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ . This section contains also a bijection between  $\Delta_{2n}$  and the set  $\mathcal{T}_{3n-2}^{\text{ter}}$  of ternary trees with  $3n - 2$  nodes deeply used in the paper. In Section 3 are presented the two topologies considered in the paper:

- the first one is an ultra-metric topology called *topology of local convergence*. It aims to describe the limiting local behavior of a sequence of maps (or trees) around their roots,
- the second topology considered is the *Gromov-Hausdorff topology* on the set of compact metric spaces. It aims to describe the limiting behavior of maps (or trees) seen as metric spaces where the distance is the graph distance. The idea here is to normalize the distance in maps by the order of the diameter in order to observe a limiting behavior.

In Section 4.1 are recalled some facts concerning Galton-Watson trees conditioned by the size  $n$ , when the offspring distribution is  $\nu_{\text{ter}} = \frac{1}{3}\delta_3 + \frac{2}{3}\delta_0$  (the tree is ternary in this case). It is recalled (Section 4.2) that they converge under the topology of local convergence to an infinite branch, (the spine or infinite line of descent) on which are grafted some critical ternary Galton-Watson trees; rescaled by  $n^{1/2}$  they converge for the Gromov-Hausdorff topology to the continuum random tree (CRT), introduced by Aldous [Ald91] (Section 5.1).

Sections 4 and 5 are devoted to the statements and the proofs of the main results of the paper concerning random triangulations under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ , when  $n \rightarrow +\infty$ . The strongest theorems of these parts, that may also be considered as the strongest results of the entire paper, are:

- the weak convergence of  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  for the topology of local convergence to a measure on infinite triangulations (Theorem 4.22, Section 4),
- the convergence in distribution of the metric of stack-triangulations for the Gromov-Hausdorff topology (the distance being the graph distance divided by  $\sqrt{6n}/11$ ) to the CRT (Theorem 4.25, Section 5). It is up to our knowledge, the only case where the convergence of the metric of a model of random maps is proved (apart from trees).

Section 7 is devoted to the study of  $\Delta_{2n}$  under  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ . Under this distribution, there is no local convergence around the root, its degree going a.s. to  $+\infty$ . Theorem 4.32 says that seen as metric spaces they converge normalized by  $(6/11)\log n$ , in the sense of the finite dimensional distributions, to the discrete distance on  $[0, 1]$  (the distance between different points is 1). Hence, there is no weak convergence for the Gromov-Hausdorff topology, the space  $[0, 1]$  under the discrete distance being not compact. Section 7.2 contains some elements stating the speed of growing of the maps (the evolution of the node degrees, or the size of a sub-map).

Section 8 is devoted to the study of a model of quadrangulations very similar to that of stack-triangulations, and to some questions related to another family of growing quadrangulations.

Last, the Appendix, Section 9, contains the proofs that have been extracted from the text for sake of clarity.

## 1.2 Literature about stack-triangulations

The fact that stack-triangulations are in bijection with ternary trees, is well known, and will be proved in Section 4.5, using the idea of Darrasse and Soria [DS07].

Stack-triangulations appear in the literature for very various reasons. In Bernardi and Bonichon [BB07], stack-triangulations are shown to be in bijection with intervals in the Kreweras lattice (and realizers being both minimal and maximal). The set of stack triangulations coincides also with the set of plane triangulations having a unique Schnyder wood (see Felsner and Zickfeld [FZ08]).

These triangulations appear also around the problem of graph uniquely 4-colorable. A graph  $G$  is uniquely 4-colorable if it can be colored with 4 colors, and if every 4-coloring of  $G$  produces the same partition of the vertex set into 4 color classes. There is an old conjecture saying that the family of maps having this property is the set of stack-triangulations. We send the interested reader to Böhme & al. [BSV98] and references therein for more information on the question.

As illustrated on Figure 4.2, these triangulations appear also in relation with Apollonian circles. We refer to Graham & al. [GLM<sup>+</sup>05], and to several other works of the same authors, for remarkable properties of these circles.

The so-called Apollonian networks, are obtained from Apollonian space-filling circles packing. First, we consider the Apollonian space-filling circles packing. Start with three adjacent circles as on Figure 4.2. The hole between them is filled by the unique circle that touches all three, forming then three new smaller holes. The associated triangulations is obtained by adding an edge between the center of the new circle  $C$  and the three centers of the circles tangent to  $C$ . If each time a unique hole receives a circle, the set of triangulation that may be obtained is the set of stack-triangulations. If each hole received a circle altogether at the same time, we get the model of Apollonian networks. We refer to Andrade & al. [AHAdS05] and references therein for some properties of this model of networks.

The random Apollonian model of network studied by Zhou & al. [ZYW05], Zhang & al. [ZCFR06], and Zhang & al. [ZCZ<sup>+</sup>08] (when their parameters  $d$  is 2) coincides with our model of stack-triangulations under  $\mathbb{Q}^\Delta$ . Using physicist methodology and simulations they study among others the degree distribution (which is seen to respect a power-law) and the distance between two points taken at random (that is seen to be around  $\log n$ ).

Darrasse and Soria [DS07] obtained the degree distribution on a model of “Boltzmann” stacked triangulations, where this time, the size of the quadrangulations is random, and uniformly distributed conditionally to its size. Bodini, Darrasse and Soria [BDS08], computed the limiting distribution (and the moment convergence) of the distance of a random node to the root, and between two random nodes under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  (these results are obtained with a method absolutely different to those involved to prove Theorem 4.25). Their results is in accordance with Theorem 4.25.

We end the introduction by reviewing the known asymptotic behaviors of quadrangulations and triangulations with  $n$  faces under the uniform distribution (or close distributions in some sense).

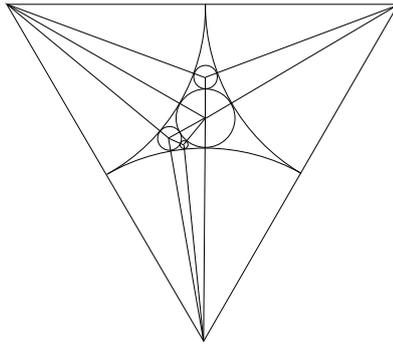


Figure 4.2: Construction of Apollonian's circles by successive insertions of circles (the starting point is three tangent circles). To get the triangulation associated, add an edge between the center of the new circle  $C$  and the three centers of the circles tangent to  $C$ .

### 1.3 Literature about convergence of maps

We refer to Angel & Schramm [AS03], Chassaing & Schaeffer [CS04] Bouttier & al. [BDFG04] for an overview of the history of the study of maps from the combinatorial point of view, and to the references therein for the link with the 2-dimensional quantum gravity of physicists. We here focus on the main results concerning the convergence of maps. We exclude the results concerning trees (which are indeed also planar maps).

In the very last years, many studies concerning the behavior of large maps have been published. The aim in these works was mainly to define or to approach a notion of limiting map. Appeared then two different points of view, two different topologies to measure this convergence.

Angel & Schramm [AS03] showed that the uniform distribution on the set of rooted triangulations with  $n$  faces (in fact several models of triangulations are investigated) converges weakly for a topology of local convergence (see Section 3.1) to a distribution on the set of infinite but locally finite triangulations. In other words, for any  $r$ , the sub-map  $S_r(n)$  obtained by keeping only the nodes and edges at distance smaller or equal to  $r$  from the root vertex, converges in distribution toward a limiting random map  $S_r$ . By a theorem of Kolmogorov this allows to show the convergence of the uniform measure on triangulations with  $n$  faces to a measure on the set of infinite but locally finite rooted triangulations (see also Krikun [Kri04] for a simple description of this measure). Chassaing & Durhuus [CD06] obtained then a similar result, with a totally different approach, on uniform rooted quadrangulations with  $n$  faces.

The second family of results concerns the convergence of rescaled maps: the first one in this direction has been obtained by Chassaing & Schaeffer [CS04] who studied the limiting profile of quadrangulations. The (cumulative) profile  $(\text{Prof}(k), k \geq 0)$  of a rooted graph, defined in Section 5, gives the successive number of nodes at distance smaller than  $k$  from the root. Chassaing & Schaeffer [CS04, Corollary 4] showed that

$$\left( \frac{\text{Prof}((8n/9)^{1/4}x)}{n} \right)_{x \geq 0} \rightarrow (\mathcal{J}[m, m+x])_{x \geq 0}$$

where the convergence holds weakly in  $D([0, +\infty), \mathbb{R})$ . The random probability measure  $\mathcal{J}$  is ISE the Integrated super Brownian excursion. ISE is the (random) occupation measure of the Brownian snake with lifetime process the normalized Brownian excursion, and  $m$  is the minimum of the support of  $\mathcal{J}$ . The radius, i.e. the largest distance to the

- root, is also shown to converge, divided by  $(8n/9)^{1/4}$ , to the range of ISE. Then,
- Marckert & Mokkadem [MM06b] showed the same result for pointed quadrangulations with  $n$  faces,
  - Marckert & Miermont [MM07c] showed that up to a normalizing constant, the same asymptotic holds for pointed rooted bipartite maps under Boltzmann distribution with  $n$  faces, (the weight of a bipartite map is  $\prod_{f \text{ face of } m} w_{\deg(f)}$  where the  $(w_{2i})_{i \geq 0}$  is a “critical sequence of weight”),
  - Weill [Wei07] obtained the same results as those of [MM07c] in the rooted case,
  - Miermont [Mie06] provided the same asymptotics for rooted pointed Boltzmann maps with  $n$  faces with no restriction on the degree,
  - Weill and Miermont [MW08] obtained the same result as [Mie06] in the rooted case.

All these results imply that if one wants to find a (finite and non trivial) limiting object for rescaled maps, the edge-length in maps with  $n$  faces has to be fixed to  $n^{-1/4}$  instead of 1. In Marckert & Mokkadem [MM06b], quadrangulations are shown to be obtained as the gluing of two trees, thanks to the Schaeffer’s bijection (see [Sch98b, CS04, MM06b]) between quadrangulations and well labeled trees. They introduce also a notion of random compact continuous map, “the Brownian map”, a random metric space candidate to be the limit of rescaled quadrangulations. In [MM06b] the convergence of rescaled quadrangulations to the Brownian map is shown but not for a “nice topology”. As a matter of fact, the convergence in [MM06b] is a convergence of the pair of trees that encodes the quadrangulations to a pair of random continuous trees, that also encodes, in a sense similar to the discrete case, a continuous object that they name the Brownian map. “Unfortunately” this convergence does not imply – at least not in an evident way – the convergence of the rescaled quadrangulations viewed as metric spaces to the Brownian map for the Gromov-Hausdorff topology.

Some authors think that the Brownian map is indeed the limit, after rescaling, of classical families of maps (those studied in [CS04, MM06b, MM07c, Wei07, Mie06, MW08]) for the Gromov-Hausdorff topology. Evidences in this direction have been obtained by Le Gall [LG07] who proved the following result. He considers  $M_n$  a  $2p$ -angulations with  $n$  faces under the uniform law. Then, he shows that at least along a suitable subsequence, the metric space consisting of the set of vertices of  $M_n$ , equipped with the graph distance rescaled by the factor  $n^{1/4}$ , converges in distribution as  $n \rightarrow \infty$  towards a limiting random compact metric space, in the sense of the Gromov-Hausdorff distance. He proved that the topology of the limiting space is uniquely determined independently of  $p$  and of the subsequence, and that this space can be obtained as the quotient of the CRT for an equivalence relation which is defined from Brownian labels attached to the vertices. Then Le Gall & Paulin [LGP08] show that this limiting space is topologically a sphere. The description of the limiting space is a little bit different from the Brownian map but one may conjecture that these two spaces are identical.

Before coming back to our models and results we would like to stress on two points.

- The topology of local convergence (on non rescaled maps) and the Gromov-Hausdorff topology (on rescaled map) are somehow orthogonal topologies. The Gromov-Hausdorff topology considers only what is at the scaling size (the diameter, the distance between random points, but not the degree of the nodes for example). The topology of local convergence considers only what is at a finite distance from the root. In particular, it does not measure at all the phenomenons that are at the right scaling factor, if this scaling goes to  $+\infty$ . This entails that in principle one may not deduce any non-trivial limiting behavior for the Gromov-Hausdorff topology from the topology of local convergence, and vice versa.
- There is a conjecture saying that properly rescaled random planar maps conditioned

to be large should converge to a limiting continuous random surface, whose law should not depend up to scaling constant from the family of reasonable maps that are sample. This conjecture still holds even if the family of stack-maps studied here converges to some objects that can not be the limit of uniform quadrangulations. The reason is that stack-maps are in some sense not reasonable maps.

## 2 Stack-triangulations

### 2.1 Planar maps

A planar map  $m$  is a proper embedding without edge crossing of a connected graph in the sphere. Two planar maps are identical if one of them can be mapped to the other by a homeomorphism that preserves the orientation of the sphere. A planar map is a quadrangulation if all its faces have degree four, and a triangulation if all its faces have degree three. There is a difference between the notions of planar maps and planar graphs, a planar graph having possibly several non-homeomorphic embeddings on the sphere.

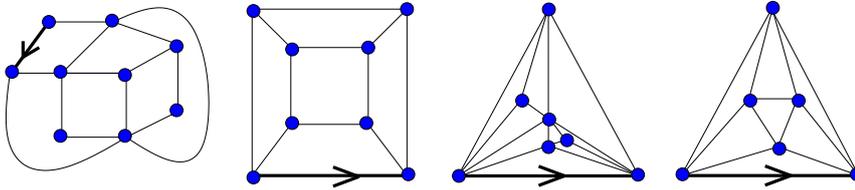


Figure 4.3: Two rooted quadrangulations and two rooted triangulations.

In this paper we deal with rooted planar maps  $(m, E)$ : an oriented edge  $E = (E_0, E_1)$  of  $m$  is distinguished. The point  $E_0$  is called the root vertex of  $m$ . Two rooted maps are identical if the homeomorphism preserves also the distinguished oriented edge. Rooting maps like this allows to avoid non-trivial automorphisms. By a simple projection, rooted planar maps on the sphere are in one to one correspondence with rooted planar maps on the plane, where the root of the latter is adjacent to the infinite face (the unbounded face) and is oriented in such a way that the infinite face lies on its right, as on Figure 4.3. From now on, we work on the plane.

For any map  $m$ , we denote by  $V(m), E(m), F(m), F^\circ(m)$  the sets of vertices, edges, faces and finite faces of  $m$ ; for any  $v$  in  $V(m)$ , we denote by  $\deg(v)$  the degree of  $v$ . The graph distance  $d_G$  between two vertices of a graph  $G$  is the number of edges in a shortest path connecting them. The set of nodes of a map  $m$  equipped with the graph distance denoted by  $d_m$  is naturally a metric space. The study of the asymptotic behavior of  $(m, d_m)$  under various distributions is the main aim

### 2.2 Formal construction of stack-triangulations

We build here  $\Delta_{2k}$  the set of *stack-triangulations* with  $2k$  faces, for any  $k \geq 1$ .

Set first  $\Delta_2 = \{\Theta\}$  where  $\Theta$  denotes the unique rooted triangle (the first map in Figure 4.1). Assume that  $\Delta_{2k}$  is defined for some  $k \geq 1$  and is a set of rooted triangulations with  $2k$  faces. We now define  $\Delta_{2(k+1)}$ . Let

$$\Delta_{2k}^\bullet = \{(m, f) \mid m \in \Delta_{2k}, f \in F^\circ(m)\}$$

be the set of rooted triangulations from  $\Delta_{2k}$  with a distinguished finite face. For any  $(m, f) \in \Delta_{2k}^\bullet$ ,  $\Phi(m, f)$  is the following rooted triangulation: draw  $m$  in the plane, add a

point  $x$  inside the face  $f$  and three non-crossing edges inside  $f$  between  $x$  and the three vertices of  $f$  adjacent to  $x$  (see Figure 4.4). The obtained map has  $2k + 2$  faces.

We call  $\Delta_{2(k+1)} = \Phi(\Delta_{2k}^\bullet)$  the image of this application.

On Figure 4.3, the first triangulation is in  $\Delta_{10}$  (see also Figure 4.1) The second one is not in  $\Delta_8$  since it has no internal node having degree 3.

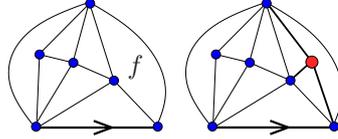


Figure 4.4: A triangulation  $(m, f)$  with a distinguished face and its image by  $\Phi$ .

**Definition 4.1.** We call *internal vertex* of a stack-triangulation  $m$  every vertex of  $m$  that is not adjacent to the infinite face (all the nodes but three).

We call *history* of a stack-triangulation  $m_k \in \Delta_{2k}$  any sequence  $((m_i, f_i), i = 1, \dots, k-1)$  such that  $m_i \in \Delta_{2i}$ ,  $f_i \in F^\circ(m_i)$  and  $m_{i+1} = \Phi(m_i, f_i)$ . We let  $\mathcal{H}(m)$  be the set of histories of  $m$ , and  $H_\Delta(k) = \{\mathcal{H}(m) \mid m \in \Delta_{2k}\}$ .

We define here a special drawing  $\mathcal{G}(m)$  of a stack-triangulation  $m$ . The embedding  $\mathcal{G}(\Theta)$  of the unique rooted triangle  $\Theta$  is fixed at position  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0)$ ,  $E_2 = e^{i\pi/3}$  (where  $E_0, E_1, E_2$  are the three vertices of  $\Theta$ , and  $(E_0, E_1)$  its root). The drawing of its edges are straight lines drawn in the plane. To draw  $\mathcal{G}(m)$  from  $\mathcal{G}(m')$  when  $m = \Phi(m', f')$ , add a point  $x$  in the center of mass of  $f'$ , and three straight lines between  $x$  and the three vertices of  $f'$  adjacent to  $x$ . The faces of  $\mathcal{G}(m)$  hence obtained are geometrical triangles. Presented like this,  $\mathcal{G}(m)$  seems to depend on the history of  $m$  used in its construction, and thus we should have written  $\mathcal{G}_h(m)$  instead of  $\mathcal{G}(m)$ , where the index  $h$  would have stood for the history  $h$  used. But it is easy to check (see Proposition 4.6) that if  $h, h'$  are both in  $\mathcal{H}(m)$  then  $\mathcal{G}_{h'}(m) = \mathcal{G}_h(m)$ .

**Definition 4.2.** The drawing  $\mathcal{G}(m)$  is called the *canonical drawing* of  $m$ .

### 2.2.1 Two distributions on $\Delta_{2k}$

For any  $k \geq 1$ , we denote by  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$  the uniform distribution on  $\Delta_{2k}$ .

We now define a second probability  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$ . For this, we construct on a probability space  $(\Omega, \mathbb{P})$  a process  $(M_n)_{n \geq 1}$  such that  $M_n$  takes its values in  $\Delta_{2n}$  as follows: first  $M_1$  is the rooted triangle  $\Theta$ . At time  $k + 1$ , choose a finite face  $F_k$  of  $M_k$  uniformly among the finite faces of  $M_k$  and this independently from the previous choices and set

$$M_{k+1} = \Phi(M_k, F_k).$$

We denote by  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  the distribution of  $M_k$ . Its support is exactly  $\Delta_{2k}$ .

The weight of a map under  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  being proportional to its number of histories, it is easy to check that  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta \neq \mathbb{U}_{2k}^\Delta$  for  $k \geq 4$ .

### 2.3 Combinatorial facts

We begin this section where is presented the bijection between ternary trees and stack-triangulations with some considerations about trees.

#### 2.3.1 Definition of trees

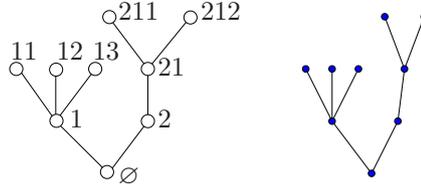


Figure 4.5: A rooted tree and its usual representation on the plane.

Consider the set  $W = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$  of finite words on the alphabet  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  where by convention  $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ . For  $u = u_1 \dots u_n, v = v_1 \dots v_m \in W$ , we let  $uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$  be the concatenation of the words  $u$  and  $v$ . For  $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ , we let  $\{m_1, \dots, m_p\}^* = \bigcup_{n \geq 0} \{m_1, \dots, m_p\}^n$  be the set of finite words with letters  $m_1, \dots, m_p$ .

**Definition 4.3.** A planar tree  $\mathbf{t}$  is a subset of  $W$

- containing the root-vertex  $\emptyset$ ,
- such that if  $ui \in \mathbf{t}$  for some  $u \in W$  and  $i \in \mathbb{N}$ , then  $u \in \mathbf{t}$ ,
- and such that if  $ui \in \mathbf{t}$  for some  $u \in W$  and  $i \in \mathbb{N}$ , then  $uj \in \mathbf{t}$  for all  $j \in \{1, \dots, i\}$ .

We denote by  $\mathcal{T}$  the set of planar trees. For any  $u \in t$ , let  $c_u(t) = \max\{i \mid ui \in t\}$  be the number of children of  $u$ . The elements of a tree  $t$  are called nodes, a node having no child a leaf, the other nodes the internal nodes. The set of leaves of  $t$  will be denoted by  $\partial t$ , and its set of internal nodes by  $t^\circ$ . The number of nodes of a tree  $t$  is denoted by  $|t|$ .

A binary (resp. ternary) tree  $t$  is a planar tree such that  $c_u(t) \in \{0, 2\}$  (resp.  $c_u(t) \in \{0, 3\}$ ) for any  $u \in t$ . We denote by  $\mathcal{T}^{\text{bin}}$  and  $\mathcal{T}^{\text{ter}}$  the set of finite or infinite binary and ternary trees, and by  $\mathcal{T}_n^{\text{bin}}$  and  $\mathcal{T}_n^{\text{ter}}$  the corresponding set of trees with  $n$  nodes.

If  $u$  and  $v$  are two nodes in  $t$ , we denote by  $u \wedge v$  the deepest common ancestor of  $u$  and  $v$ , i.e. the largest word  $w$  prefix to both  $u$  and  $v$  (the node  $u \wedge v$  is in  $t$ ). The length  $|u|$  of a word  $u \in W$  is called the height or depth of  $u$ , or graph distance of  $u$  to the root, if considered as a vertex of some tree. For  $u = u_1 \dots u_n \in t$ , we let  $u[j] = u_1 \dots u_j$  and  $[[\emptyset, u]] = \{\emptyset, u[1], \dots, u[n]\}$  be the ancestral line of  $u$  back to the root. For any tree  $t$  and  $u$  in  $t$ , the fringe subtree  $t_u := \{w \mid uw \in t\}$  is in some sense, the subtree of  $t$  rooted in  $u$ . Finally recall that the lexicographical order (LO) on  $W$  induces a total ordering of the nodes of any tree.

We now give a formalism to describe the growth of trees. We denote by  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\bullet} := \{(t, u) \mid t \in \mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}, u \in \partial t\}$  the set of ternary trees with  $3n + 1$  nodes with a distinguished leaf. Very similarly with the function  $\Phi$  defined in Section 2.2, we define the application  $\phi$  from  $\mathcal{T}_{3k+1}^{\text{ter}\bullet}$  into  $\mathcal{T}_{3k+4}^{\text{ter}}$  as follows; for any  $(t, u) \in \mathcal{T}_{3k+1}^{\text{ter}\bullet}$ , let  $t' := \phi(t, u)$  be the tree  $t \cup \{u1, u2, u3\}$  obtained from  $t$  by the replacement of the leaf  $u$  by an internal node having 3 children.

**Definition 4.4.** *As for maps (see Definition 4.1), for any tree  $t \in \mathcal{T}_{3k-2}^{\text{ter}}$ , a history of a tree  $t$  is a sequence  $h' = ((t_i, u_i), i = 1, \dots, k-1)$  such that  $(t_i, u_i) \in \mathcal{T}_{3i-2}^{\text{ter}\bullet}$  and  $t_{i+1} = \phi(t_i, u_i)$ . The set of histories of  $t$  is denoted by  $\mathcal{H}(t)$ , and we denote  $H_{\mathcal{T}}(k) = \{\mathcal{H}(t) \mid t \in \mathcal{T}_{3k-2}^{\text{ter}}\}$ .*

**2.3.2 The fundamental bijection between stack-triangulations and ternary trees**

Before explaining the bijection we use between  $\Delta_{2K}$  and  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  we define a function  $\Lambda$  which will play an eminent role in our asymptotic results concerning the metrics in maps. Let  $W_{1,2,3}$  be the set of words containing at least one occurrence of each element of  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$  as for example 321, 123, 113211213123. Let  $u = u_1 \dots u_k$  be a word on the alphabet  $\Sigma_3$ . Define  $\tau_1(u) := 0$  and  $\tau_2(u) := \inf\{i \mid i > 0, u_i = 1\}$ , the rank of the first apparition of 1 in  $u$ . For  $j \geq 3$ , define

$$\tau_j(u) := \inf\{i \mid i > \tau_{j-1}(u) \text{ such that } u_{1+\tau_{j-1}(u)} \dots u_i \in W_{1,2,3}\}.$$

This amounts to decomposing  $u$  into subwords, the first one ending when the first 1 appears, the subsequent ones ending each time that each of the three letters 1, 2 and 3 has appeared again. For example if  $u = 22123122131$  then  $\tau_1(u) = 0, \tau_2(u) = 3, \tau_3(u) = 6, \tau_4(u) = 10$ . Denote by

$$\Lambda(u) = \max\{i \mid \tau_i(u) \leq |u|\} \tag{2.1}$$

the number of these non-overlapping subwords. Further for two words (or nodes)  $u = wa_1 \dots a_k$  and  $v = wb_1 \dots b_l$  with  $a_1 \neq b_1$ , (in this case  $w = u \wedge v$ .) set

$$\Lambda(u, v) = \Lambda(a_1 \dots a_k) + \Lambda(b_1 \dots b_l). \tag{2.2}$$

We call the one or two parameters function  $\Lambda$  the *passage function*.

We now describe a bijection  $\Psi_K^\Delta$  between  $\Delta_{2K}$  and  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  having a lot of important properties. This bijection is inspired from Darrasse & Soria [DS07].

**Proposition 4.5.** *For any  $K \geq 1$  there exists a bijection*

$$\begin{aligned} \Psi_K^\Delta : \Delta_{2K} &\longrightarrow \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}} \\ m &\longmapsto t := \Psi_K^\Delta(m) \end{aligned}$$

*such that:*

- (a) *Each internal node  $u$  of  $m$  corresponds bijectively to an internal node  $v$  of  $t$ . We denote for sake of simplicity by  $u'$  the image of  $u$ .*
- (b) *Each leaf of  $t$  corresponds bijectively to a finite triangular face of  $m$ .*
- (c) *For any  $u$  internal node of  $m$ ,  $\Lambda(u') = d_m(E_0, u)$ .*
- (d) *For any  $u$  and  $v$  internal nodes of  $m$*

$$|d_m(u, v) - \Lambda(u', v')| \leq 4. \tag{2.3}$$

- (e) *Let  $u$  be an internal node of  $m$ . We have*

$$\deg_m(u) = 3 + \#\{v' \in t^\circ \mid v' = u'w', w' \in 1\{2, 3\}^* \cup 3\{1, 2\}^* \cup 2\{1, 3\}^*\}, \tag{2.4}$$

*where the set in (2.4) is the union of the subtrees of  $t^\circ$  rooted in  $u'1, u'2$  and  $u'3$  formed by the “binary trees” having no nodes containing a 1, resp. a 2, resp a 3.*

We will write  $\Psi^\Delta$  instead of  $\Psi_K^\Delta$  when no confusion on  $K$  is possible.

Property (e) in Proposition 4.5 is given in Darrasse & Soria [DS07], where it is used to derive the asymptotic degree distribution of a random node under a Boltzmann distribution (see Section 6). We give below a complete proof of Proposition 4.5. The quotes around binary trees signal that by construction these branching structures do not satisfy the requirements of Definition 4.3.

The existence of a bijection between  $\Delta_{2K}$  and  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  is well known and is a simple consequence of the ternary decomposition of the maps in  $\Delta_{2K}$ , as illustrated on Figure 4.6: in the first step of the construction of  $m$ , the insertion of the three first edges incident to the node  $x$  in the triangle  $\Theta$  splits it into three parts that behave clearly as stack-triangulations. The node  $x$  may be recovered at any time since it is the unique vertex incident to the three vertices incident to the infinite face. The bijection induced

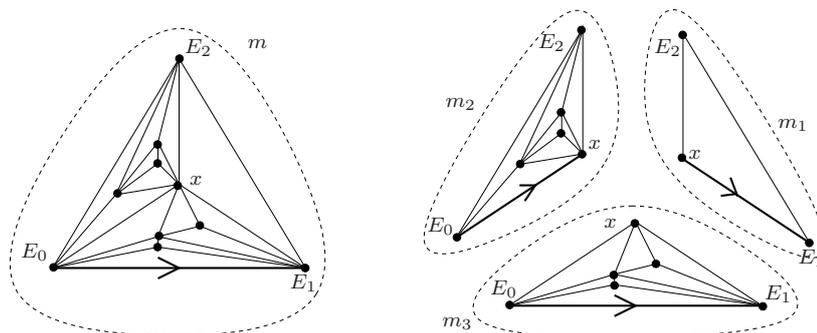


Figure 4.6: Decomposition of a stack-triangulation using the recovering of the first inserted node.

by this decomposition (this is illustrated on Figure 4.6) can be defined in order to encode the distance between the nodes in the maps, and then to get the properties announced in Proposition 4.5. This construction, presented below, is inspired by Darrasse & Soria [DS07].

The proof of Proposition 4.5 we propose raises on an iterative argument, and then will raise on the notion of histories. Since a stack-triangulation generally owns several histories, we need to show some consistence properties of the construction, more or less intuitively clear. The consistence needed relies on an association between the triangular faces of the canonical drawing introduced in Definition 4.2 and the words on  $\Sigma_3$ : thanks to the canonical drawing, there is a sense to talk of a face  $f$  without referring to a map, and thanks to our construction of trees, there is a sense to talk of a node  $u$  – which is a word – without referring to a tree. We will call *canonical face* a geometrical face corresponding to a canonical drawing, given together with an oriented edge: the notation  $f = (A, B, C)$  will refer to the canonical face  $f$  admitting  $(A, B)$  as oriented edge.

Let us now design a bijection  $\psi^\Delta$  which associates a word in  $\Sigma_3$  with each canonical face. The image by  $\psi^\Delta$  of the unique canonical face  $(E_0, E_1, E_2)$  of the unique rooted triangle  $\Theta$  on  $\Delta_2$  is  $\emptyset$ , the empty word on  $\Sigma_3$ . We now proceed by induction and consider  $\mathcal{F}_K$  the set of canonical faces belonging to at least one of the canonical drawings of a map of  $\Delta_{2K}$ . Assume by induction that for any face  $f$  in  $\mathcal{F}_K$ ,  $\psi^\Delta(f)$  is well defined and is a word of  $\Sigma_3$ . Assume also that there is only one canonical face associated with a geometrical face: if  $(x_1, x_2, x_3)$  and  $(y_1, y_2, y_3)$  are elements of  $\mathcal{F}_K$  associated with the same geometrical face, then  $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ .

Let  $f = (A, B, C)$  be a canonical face belonging to  $\mathcal{F}_K$ . The growing of a map having

$f$  as a face, in the face  $f$ , is as explained above, obtained by inserting a node  $x$  in  $f$  and three edges between  $x$  and the nodes  $A, B$  and  $C$ . The three "new" canonical faces are set to be  $(B, C, x)$ ,  $(A, x, C)$ ,  $(A, B, x)$  (this fixes the respected oriented edges, that are chosen in such a way that the infinite face lies on the right of each of these new faces seen as maps, and then allow a successive decomposition, see Figure 4.7). If the image of  $f$  by  $\psi^\Delta$  is  $u$ , we associate respectively with the three "new" faces the nodes  $u_1, u_2$  and  $u_3$ . The quotes around "new" signal that a face in  $\mathcal{F}_K$  may belong also in some  $\mathcal{F}_j$  for  $j < K$ , and then these new faces may "already" belong to  $\mathcal{F}_K$ . Since the procedure of construction of the faces does not depend on the time  $K$ , the association of  $u_1, u_2$  and  $u_3$  with the new faces is consistent in time. One now can check easily that  $\psi^\Delta$  is now defined for any face of  $\mathcal{F}_{K+1}$ , and that the properties assumed on  $\mathcal{F}_K$  are inherited in  $\mathcal{F}_{K+1}$ .

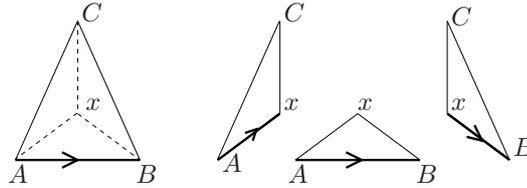


Figure 4.7: Heritage of the canonical orientation of the faces. If the first face is sent on  $u$ , then the other ones, from left to right are sent on  $u_2, u_3$  and  $u_1$

Now, the bijection  $\psi^\Delta$  induces a bijection  $\psi_K^\Delta$  between the set  $H_\Delta(K)$  of histories of the maps of  $\Delta_{2K}$  and  $H_T(K)$  the set of histories of the trees of  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  (for any  $K \geq 1$ ). More precisely, the application  $\psi_K^\Delta$  is defined as follows. The history of the unique stack-triangulation with 4 faces is  $(\Theta, (E_0, E_1, E_2))$ , and we fix its image to be  $(\{\emptyset\}, \emptyset)$  the tree reduced to the root vertex, marked on this node (which is a leaf). Let now  $K \geq 3$  be fixed and let  $h_K = ((m_i, f_i), i = 1, \dots, K - 1)$  be a history of a triangulation  $m_K$  of  $\Delta_{2K}$ . Recall the content of Section 2.2. In particular we have  $m_K = \Phi(m_{K-1}, f_{K-1})$ .

By induction assume that a tree-history  $h'_{K-1} := ((t_i, u_i), i = 1, \dots, K - 2)$  is associated with  $h_{K-1} := ((m_i, f_i), i = 1, \dots, K - 2)$  by  $\psi_{K-1}^\Delta$ . Particularly, we assume by induction that for any  $i \leq K - 2$ ,  $u_i$  is given by  $\psi^\Delta(f_i)$  (that is the node marked in  $t_i$  corresponds to the face marked in  $m_i$ ). More globally, thinking to the construction induced by the history, this implies

$$t_{K-1}^\circ = \{\psi^\Delta(f_i) \mid 1 \leq i \leq K - 2\}.$$

To define  $h'_K$ , we let

$$\begin{cases} u_{K-1} = \psi^\Delta(f_{K-1}) \\ t_{K-1} = t_{K-2} \cup \{\psi^\Delta(f_{K-2})1, \psi^\Delta(f_{K-2})2, \psi^\Delta(f_{K-2})3\} \end{cases} .$$

Since  $u_{K-1} = \psi^\Delta(f_{K-1})$  is a leaf of  $t_{K-2}$ ,  $t_{K-1}$  is indeed a tree, and also  $u_{K-1}$  is a leaf of  $t_{K-1}$ ; hence  $h'_K := ((t_i, u_i), i = 1, \dots, K - 1)$  is a history of a tree, say  $t_K$ . We then set:

$$\psi_K^\Delta(h_K) = h'_K. \tag{2.5}$$

This ends the induction. It turns out that  $\psi_K^\Delta$  is a bijection, as stated in the next Lemma. Before stating it, we introduce a notation: if  $h_K = ((m_i, f_i), i = 1, \dots, K - 1)$  is a history of  $m_K$  then for any  $j < K$ , we let  $h_j$  be  $((m_i, f_i), i = 1, \dots, j - 1)$  the history restricted to the  $j - 1$  first s:  $h_j$  is the history of a map denoted by  $m_j$ ; accordingly, we do the same for tree-histories.

**Lemme 4.6.** For any  $K \geq 1$ ,  $\psi_K^\Delta$  is a bijection between  $H_\Delta(K)$  and  $H_T(K)$  such that:

(i) The family  $(\psi_K^\Delta, K \geq 1)$  is consistent: if  $\psi_K^\Delta(h_K) = h'_K$  then for any  $j < K$ ,

$$\psi_j^\Delta(h_j) = h'_j.$$

(ii) Robustness:  $h(1)$  and  $h(2)$  are two histories of  $m$  iff  $\psi_K^\Delta(h(1)) = \psi_K^\Delta(h(2))$  are histories of the same tree  $t$ .

This Lemma follows easily the construction of  $\psi^\Delta$ . Now, the point (ii) of this Lemma allows to build an application  $\Psi_K^{\Delta,*} : \Delta_{2K} \rightarrow \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  by associating  $m_K$  with  $t_K$  (this bijection  $\Psi_K^{\Delta,*}$  has all the nice properties announced in Proposition 4.5).

*Note 4.7.* We may rephrase what we have done: take any history of a given map  $m$ , and construct iteratively the corresponding ternary tree using  $\psi^\Delta$ . The last tree obtained does not depend on the history chosen, but only on  $m$ .

**Lemme 4.8.** Let  $\Psi_K^{\Delta,*} : \Delta_{2K} \rightarrow \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  the application defined above.

i)  $\Psi_K^{\Delta,*}$  is a bijection;

ii) Let  $t = \Psi_K^{\Delta,*}(m)$ . The properties assertion (a), (b), (c), (d), (e) of Proposition (4.5) holds true.

*Proof.* The application  $\Psi_K^{\Delta,*}$  is a bijection thanks to the previous Lemma (ii). To prove (ii) of the present Lemma we introduce the notion of type of a face, and of a node (of a word on  $\Sigma_3$ ). For any face  $(u, v, w)$  in  $m$ , define

$$\text{type}(u, v, w) := (d_m(E_0, u), d_m(E_0, v), d_m(E_0, w)), \quad (2.6)$$

the distance of  $u, v, w$  to the root-vertex of  $m$ . Since  $u, v$ , and  $w$  are neighbors, the type of any triangle is  $(i, i, i)$ ,  $(i, i, i+1)$ ,  $(i, i+1, i+1)$  for some  $i$ , or a permutation of this.

We then prolong the construction of  $\Phi$  given above, and mark the nodes of  $t$  with the types of the corresponding faces. For any internal node  $u' \in t$  with  $\text{type}(u') = (i, j, k)$ ,

$$\begin{cases} \text{type}(u'1) = (1 + i \wedge j \wedge k, & j, & k), \\ \text{type}(u'2) = (i, & 1 + i \wedge j \wedge k, & k), \\ \text{type}(u'3) = (i, & j, & 1 + i \wedge j \wedge k) \end{cases} \quad (2.7)$$

as one can easily check with a simple figure: this corresponds as said above to the fact that if the leaf  $u$  is associated with the “empty” triangle  $(A, B, C)$ , then the insertion of a node  $x$  in  $(A, B, C)$  is translated by the insertion in the tree of the nodes  $u1$  (resp.  $u2$ ,  $u3$ ) associated with  $(x, B, C)$  (resp.  $(A, x, B)$ ,  $(A, B, x)$ ). Formula (2.7) gives then the types of these three faces. Using that  $\text{type}(\emptyset) = (0, 1, 1)$ , giving  $t$  the types of all nodes are known and are obtained via the deterministic evolution rules (2.7). The distance of any internal node  $u$  to the root of  $m$  is computed as follows: assume that  $u$  has been inserted at a certain date in a face  $f = (A, B, C)$ . Then clearly its distance to the root vertex is

$$d_m(E_0, u) = g(\text{type}(f)),$$

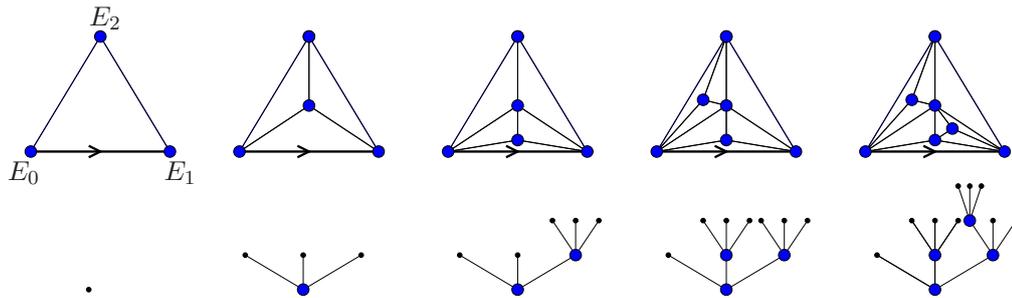


Figure 4.8: Construction of the ternary tree associated with an history of a stack-triangulation

where  $g(i, j, k) = 1 + (i \wedge j \wedge k)$ . Moreover, since an internal node in  $m$  corresponds to the insertion of three children in the tree, each internal node  $u$  of  $m$  corresponds to an internal node  $u'$  of  $t$  and

$$d_m(E_0, u) = g(\text{type}(u')).$$

It remains to check that for any  $u' \in t$ ,

$$g(\text{type}(u')) = \Lambda(u') \tag{2.8}$$

as defined above. This is a simple exercise: the initial type (that of  $\emptyset$ ) varies along a branch of  $t$  only when a 1 occurs in the nodes. Then the type passes from  $(i, i, i)$  to  $(i + 1, i + 1, i + 1)$  when the three letters 1, 2 and 3 has appeared: this corresponds to the incrementation of the distance to the root in the triangulation. This leads to (c).

*Note 4.9.* The notion of type of a face  $f$  is canonical as we saw, when we proved that it is a function of the ancestors of  $u = \psi^\Delta(f)$ . Showing this property directly seems a bit ugly.

(d) Consider  $u$  and  $v$  two internal nodes of  $m$ . The node  $w' = u' \wedge v'$  corresponds to the smallest canonical face  $f = (A, B, C)$  containing  $u$  and  $v$ . Assume  $u' = w'1 \dots$  and  $v' = w'2 \dots$ , then  $u$  and  $v$  belong respectively to the canonical faces  $(w, B, C)$  and  $(A, w, C)$ . Therefore there exists  $x \in \{w, A, B, C\}$  such that  $d_m(u, v) = d_m(u, x) + d_m(v, x)$  which leads directly to  $|d_m(u, v) - (d_m(u, w) + d_m(v, w))| \leq 2$ . The remaining cases are treated similarly. Let us investigate now the relation between  $w$  and  $u$  and  $\Lambda(a_1 \dots a_j)$  in the case where  $u = wa_1 \dots a_j$ . Each triangle appearing in the construction of  $m$  behaves as a copy of  $m$  except that its type is not necessarily  $(i, i + 1, i + 1)$  (as was the type of  $\emptyset$ ). Then the distance of the node  $u = wa_1 \dots a_j$  to  $w$  may be not exactly  $\Lambda(a_1 \dots a_j)$ . We now show that

$$|d_m(w, u) - \Lambda(a_1 \dots a_j)| \leq 1.$$

This difference comes from the initialization of the counting of the non-overlapping subwords from  $W_{1,2,3}$  in  $a_1 \dots a_j$ . This counting has to begin when a face of type  $(i, i, i)$  has been reached. Since we no longer consider the distance between  $u$  and the root but between  $u$  and  $w$ , the definition of the type has to be slightly modified. Let  $u = (A, B, C)$  be the canonical face associated to  $w'a_1 \dots a_j$ , we define  $\text{type}_w(u)$  as  $(d_m(A, w), d_m(B, w), d_m(C, w))$ .

Let  $a = a_1 \dots a_k$  be a word on  $\Sigma_3$ . Define  $\tau'_1(a) := 1$ ,  $\tau'_2(a) := \inf\{i \mid i > 1, a_i = a_1\}$ , the rank of the second apparition of  $a_1$  in  $a$  and  $\tau'_j(a) = \tau_j(a)$  for  $j \geq 3$  (the definition

of  $\tau_j$  is given in Equation (8.1)). Lastly we set

$$\Lambda_w(a) = \max\{i \mid \tau_i(a) \leq |a|\}.$$

Let  $u = wa_1 \dots a_j$ , it is clear that  $d_m(u, w) = \Lambda_w(a_1 \dots a_j)$  (see the proof of Property (c) of Proposition 4.5). Furthermore for any word  $a$  on the alphabet  $\Sigma_3$ ,

$$|\Lambda(z) - \Lambda_w(z)| \leq 1,$$

which concludes the proof.

(e) Let  $u$  be an internal vertex of  $m$  and let  $f = (A, B, C)$  be the canonical face containing  $u$ . Let  $v$  be a vertex of  $m$ . Then  $d_m(u, v) = 1$  if  $v = A, B, C$  or if  $v' = u'a_1 \dots a_j$  for a certain  $a_1 \dots a_j \in \mathcal{W}_3$ . Assume  $a_1 = 1$ . Then  $(\psi^\Delta)^{-1}(u'a_1) = (u, B, C)$ . Now  $d_m(u, v) = 1$  if and only if  $u$  is an adjacent vertex to  $(\psi^\Delta)^{-1}(u'a_1 \dots a_j)$ . Furthermore, such a face is of the form  $(u, B, y)$ ,  $(u, x, y)$  or  $(u, x, C)$  meaning that  $a_2 \dots a_j \in \{2, 3\}^*$  (which can be done by induction). The two remaining cases  $a_1 = 2$  and  $a_1 = 3$  are done in the same way.  $\square$

## 2.4 Induced distribution on the set of ternary trees

The bijection  $\Psi_K^\Delta$  transports the distributions  $\mathbb{U}_{2K}^\Delta$  and  $\mathbb{Q}_{2K}^\Delta$  on the set of ternary trees  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$ .

1) First, the distribution

$$\mathbb{U}_{3K-2}^{\text{ter}} := \mathbb{U}_{2K}^\Delta \circ (\Psi_K^\Delta)^{-1} \tag{2.9}$$

is simply the uniform distribution on  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  since  $\Psi_K^\Delta$  is a bijection.

2) The distribution

$$\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}} := \mathbb{Q}_{2K}^\Delta \circ (\Psi_K^\Delta)^{-1} \tag{2.10}$$

is the distribution giving a weight to a tree proportional to its number of histories, that is the number of histories of the corresponding triangulation.

We want to give here another representation of the distribution  $\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}}$ .

**Definition 4.10.** We call increasing ternary tree  $\mathbf{t} = (T, l)$  a pair such that:

- $T$  is the set of internal nodes of a ternary tree,
- $l$  is a bijective application between  $T$  (viewed as a set of nodes) onto  $\{1, \dots, |T|\}$  such that  $l$  is increasing along the branches (thus  $l(\emptyset) = 1$ ).

Notice that  $T$  is not necessarily a tree as defined in Section 2.3.1: for example  $T$  may be  $\{\emptyset, 2\}$ .

Let  $\mathcal{I}_K^{\text{ter}}$  denotes the set of increasing ternary trees  $(T, l)$  such that  $|T| = K$  (i.e.  $T$  is the set of internal nodes of a tree in  $\mathcal{T}_{3K+1}^{\text{ter}}$ ).

The number of histories of a ternary tree  $t \in \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  is given by the

$$w_{K-1}(t^\circ) = \#\{(t^\circ, l) \in \mathcal{I}_{K-1}^{\text{ter}}\}$$

the number of increasing trees having  $t^\circ$  as first coordinate, in other words, with shape  $t^\circ$ . Indeed in order to record the number of histories of  $t$  an idea is to mark the internal nodes of  $t$  by their apparition time, the root being marked 1. Hence the marks are increasing along the branches, and there is a bijection between  $\{1, \dots, K-1\}$  and the set of internal nodes of  $t$ . Conversely, any labeling of  $t^\circ$  with marks having these properties corresponds indeed to a history of  $m$ . Thus

**Lemme 4.11.** *For any  $K \geq 1$ , the distribution  $\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}}$  has the following representation*

$$\mathbb{Q}_{3K-2}^{\text{ter}}(t) = C_{K-1} \cdot w_{K-1}(t^\circ), \quad \text{for any } t \in \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$$

where  $C_{K-1}$  is the constant  $C_{K-1} := \left( \sum_{t' \in \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}} w_{K-1}(t'^\circ) \right)^{-1}$ .

### 3 Topologies

#### 3.1 Topology of local convergence

The topology induced by the distance  $d_L$  defined below will be called “topology of local convergence”. Its aim is to describe an asymptotic behavior of maps (or more generally graphs) around their root. We stress on the fact that no rescaling is involved in this part.

We borrow some considerations from Angel & Schramm [AS03]. Let  $\mathcal{M}$  be the set of rooted maps  $(m, e)$  where  $e = (E_0, E_1)$  is the distinguished edge of  $m$ . The maps from  $\mathcal{M}$  are not assumed to be finite, but only locally finite, i.e. the degree of the vertices are finite. For any  $r \geq 0$ , denote by  $B_m(r)$  the map having as set of vertices

$$V(B_m(r)) = \{u \in V(m) \mid d_m(u, E_0) \leq r\},$$

the vertices in  $m$  with graph distance to  $E_0$  non greater than  $r$ , and having as set of edges, the edges in  $E(m)$  between the vertices of  $V(B_m(r))$ .

For any  $m = (m_1, e)$  and  $m' = (m', e')$  in  $\mathcal{M}$  set

$$d_L(m, m') = 1/(1 + k) \tag{3.1}$$

where  $k$  is the supremum of the radius  $r$  such that  $B_m(r)$  and  $B_{m'}(r)$  are equals as rooted maps. The application  $d_L$  is a metric on the space  $\mathcal{M}$ . A sequence of rooted maps converges to a given rooted map  $m$  (for the metric  $d_L$ ) if eventually they are equivalent with  $m$  on arbitrarily large combinatorial balls around their root. In this topology, all finite maps are isolated points, and infinite maps are their accumulation points. The space  $\mathcal{M}$  is complete for the distance  $d_L$  since given a Cauchy sequence of locally finite embedded rooted maps it is easy to see that it is possible to choose for them embeddings that eventually agree on balls of any fixed radius around the root. Thus, the limit of the sequence exists (as a locally finite embedded maps). In other words, the space  $\mathcal{T}$  of (locally finite embedded rooted) maps is complete.

The space of triangulations (or of quadrangulations) endowed with this metric is not compact since one may find a sequence of triangulations being pairwise at distance 1. The topology on the space of triangulations induces a weak topology on the linear space of measures supported on planar triangulations.

#### 3.2 Gromov-Hausdorff topology

The other topology we are interested in will be the suitable tool to describe the convergence of rescaled maps to a limiting object. The point of view here is to consider maps endowed with the graph distance as metric spaces. The topology considered – called the Gromov-Hausdorff topology – is the topology of the convergence of compact (rooted) metric spaces. We borrow some considerations from Le Gall & Paulin [LGP08] and from

Le Gall [LG05, Section 2]. We send the interested reader to these works and references therein.

First, recall that the Hausdorff distance in a metric space  $(E, d_E)$  is a distance between the compact sets of  $E$ ; for  $K_1$  and  $K_2$  compacts in  $E$ ,

$$d_{Haus(E)}(K_1, K_2) = \inf\{r \mid K_1 \subset K_2^r, K_2 \subset K_1^r\}$$

where  $K^r = \cup_{x \in K} B_E(x, r)$  is the union of open balls of radius  $r$  centered on the points of  $K$ . Now, given two pointed (i.e. with a distinguished node) compact metric spaces  $((E_1, v_1), d_1)$  and  $((E_2, v_2), d_2)$ , the Gromov-Hausdorff distance between them is

$$d_{GH}(E_1, E_2) = \inf\{d_{Haus(E)}(\phi_1(E_1), \phi_2(E_2)) \vee d_E(\phi_1(v_1), \phi_2(v_2))\},$$

where the infimum is taken on all metric spaces  $E$  and all isometric embeddings  $\phi_1$  and  $\phi_2$  from  $(E_1, d_1)$  and  $(E_2, d_2)$  in  $(E, d_E)$ . Let  $\mathbb{K}$  be the set of all isometric classes of compact metric spaces, endowed with the Gromov-Hausdorff distance  $d_{GH}$ . It turns out that  $(\mathbb{K}, d_{GH})$  is a complete metric space, which makes it appropriate to study the convergence in distribution of  $\mathbb{K}$ -valued random variables.

The Gromov-Hausdorff convergence is then a consequence of any convergence of  $E'_n$  to  $E'_\infty$ , when  $E'_n$  and  $E'_\infty$  are some isomorphic embeddings of  $E_n$  and  $E_\infty$  in a common metric space  $(E, d_E)$ . In the proofs, we exhibit a space  $(E, d_E)$  where this convergence holds; hence, the results of convergence we get are stronger than the only convergence for the Gromov-Hausdorff topology. In fact, it holds for a sequence of parametrized spaces.

## 4 Local convergence of stack-triangulations under $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$

We first begin by giving some information about Galton-Watson trees conditioned by the size. These facts will be used also in Section 5.

### 4.1 Galton-Watson trees conditioned by the size

Consider  $\nu_{\text{ter}} := \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3$  as a (critical) offspring distribution of a Galton-Watson (GW) process starting from one individual. Denote by  $P^{\text{ter}}$  the law of the corresponding GW family tree; we will also write  $P_n^{\text{ter}}$  instead of  $P^{\text{ter}}(\cdot \mid |t| = n)$ .

**Lemme 4.12.**  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$  is the uniform distribution on  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$ .

*Proof.* A ternary tree  $t$  with  $3n + 1$  nodes has  $n$  internal nodes having 3 children and  $2n + 1$  leaves with degree 0. Hence  $P_{3n+1}^{\text{ter}}(\{t\}) = 3^{-n}(2/3)^{2n+1}/P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})$ . This is constant on  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  and has support  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$ .  $\square$

The conclusion is that for any  $K \geq 1$

$$P_{3K-2}^{\text{ter}} = \mathbb{U}_{3K-2}^{\text{ter}}. \tag{4.1}$$

Following (2.9), this gives us a representation of the uniform distribution on  $\mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}}$  in terms of conditioned GW trees. This will be our point of view in the sequel of the paper.

We would like to point out that the number of ternary trees with a given number of nodes, as well as the number of forests  $\#\mathcal{F}_{\text{ter}}^r(k)$  of ternary trees with  $r$  roots and a total number of nodes  $K$  are well known:

$$\#\mathcal{T}_{3K+1}^{\text{ter}} = \frac{1}{3K+1} \binom{3K+1}{K} \quad \text{and} \quad \#\mathcal{F}_{\text{ter}}^r(K) = \frac{r}{K} \binom{K}{(K-r)/3}. \tag{4.2}$$

These formulas are consequence of the so-called rotation/conjugation principle due to Raney, or Dvoretzky-Motzkin (see Pitman [Pit06], Section 5.1 for more information on this principle).

We now state some results concerning the local convergence of uniform ternary trees. The limiting random tree will be used to build the limiting random maps, local limit of stacked-triangulations.

## 4.2 Local convergence of uniform ternary trees

We endow  $\mathcal{T}^{\text{ter}}$  with the local distance  $d_L$  defined in (3.1): instead of redefining an ad hoc metric similar to  $d_L$  on the set of planar trees, we identify the set of trees with the set of rooted planar maps with one face (this is classical, and corresponds to the embedding of planar trees in the plane respecting the cyclical order around the vertices). Under this metric, the accumulation points of sequences of trees  $(t_K)$  such that  $|t_K| = 3K - 2$  are infinite trees. It is known that the sequence  $(P_{3K-2}^{\text{ter}})$  converges weakly for the topology of local convergence. Let us describe a random tree  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  under the limit distribution, denoted by  $P_\infty^{\text{ter}}$ .

Let  $\mathcal{W}_3$  be the infinite complete ternary tree and let  $(X_i)$  be a sequence of i.i.d. r.v. uniformly distributed on  $\Sigma_3$ . Define

$$L_\infty^{\text{ter}} = (X(j), j \geq 0) \quad (4.3)$$

the infinite path in  $\mathcal{W}_3$  starting from the root  $(\emptyset)$  and containing the words  $X(j) := X_1 \dots X_j$  for any  $j \geq 1$ . Take a sequence  $(t(i))$  of GW trees under  $P^{\text{ter}}$  and graft them on the neighbors of  $L_\infty^{\text{ter}}$ , that is on the nodes of  $\mathcal{W}_3$  at distance 1 of  $L_\infty^{\text{ter}}$  (sorted according to the LO). The tree obtained is  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$ . In the literature the branch  $L_\infty^{\text{ter}}$  is called the *spine* or the *infinite line of descent* in  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$ .

**Proposition 4.13.** (Gillet [Gil03]) *When  $n \rightarrow +\infty$ ,  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$  converges weakly to  $P_\infty^{\text{ter}}$  for the topology of local convergence.*

This result is due to Gillet [Gil03, Section III] (see Theorems III.3.1, III.4.2, III.4.3, III.4.4).

*Note 4.14.* The distribution  $P_\infty^{\text{ter}}$  is usually called “size biased GW trees”. We send the interested reader to Section 2 in Lyons & al. [LPP95] to have an overview of this object. In particular, this distribution is known to be the limit for local convergence of critical GW trees conditioned by the non extinction.

## 4.3 Local convergence of stacked-triangulations

The first aim of this part is to define a map  $m_\infty$  built thanks to  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  with the help of a limiting “bijection” analogous to the functions  $\Psi_K^\Delta$ ’s. Some problems arise when one wants to draw or define an infinite map on the plane since we have to deal with accumulation points and possible infinite degree of vertices. We come back on this point in Section 4.3.1. We now describe a special class of infinite trees – we call them *thin ternary trees* – that will play an important role further.

**Definition 4.15.** An infinite line of descent in a tree is a sequence  $(u_i, i \geq 0)$  such that:  $u_0$  is the root  $\emptyset$ , and  $u_i$  is a child of  $u_{i-1}$  for any  $i \geq 1$ . We call thin ternary tree a ternary tree having a unique infinite line of descent  $L = (u_i, i \geq 0)$ , satisfying moreover  $\Lambda(u_n) \xrightarrow[n]{\rightarrow} \infty$  (which will be written  $\Lambda(L) = \infty$ ). The set of thin ternary trees is denoted by  $\mathcal{T}_{\text{thin}}^{\text{ter}}$ .

**Lemma 4.16.** The support of  $P_\infty^{\text{ter}}$  is included in  $\mathcal{T}_{\text{thin}}^{\text{ter}}$ .

*Proof.* By construction  $L_\infty^{\text{ter}}$  is an infinite line of descent in  $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$  that satisfies clearly a.s.  $\Lambda(L_\infty^{\text{ter}}) = +\infty$ . This line is a.s. unique because the sequence  $(t(i))$  of grafted trees are critical GW trees and then have a.s. all a finite size. □

For any tree  $t$ , finite or not, denote the  $\Lambda$ -ball of  $t$  of radius  $r$  by

$$B_r^\Lambda(t) := \{u \mid u \in t, \Lambda(u) \leq r\}.$$

**Lemma 4.17.** For any tree  $t \in \mathcal{T}_{\text{thin}}^{\text{ter}}$  and any  $r \geq 0$ ,  $\#B_r^\Lambda(t)$  is finite.

*Proof.* Let  $L$  be the unique infinite line of descent of  $t$ . Since  $\Lambda(L) = +\infty$ ,  $B_r^\Lambda(t)$  contains only a finite part say  $\llbracket \emptyset, u \rrbracket$  of  $L$ . This part is connected since  $\Lambda$  is non decreasing: if  $w = uv$  for two words  $u$  and  $v$  then  $\Lambda(w) \geq \Lambda(u)$ . Using again that  $\Lambda$  is non decreasing,  $B_r^\Lambda(t)$  is contained in  $\llbracket \emptyset, u \rrbracket$  union the finite set of finite trees rooted on the neighbors of  $\llbracket \emptyset, u \rrbracket$ . □

**Proposition 4.18.** If a sequence of trees  $(t_n)$  converges for the local topology to a thin tree  $t$ , then for any  $r \geq 0$  there exists  $N_r$  such that for any  $n \geq N_r$ ,  $B_r^\Lambda(t_n) = B_r^\Lambda(t)$ .

*Proof.* Suppose that this is not true. Then take the smallest  $r$  for which there does not exists such a  $N_r$  (then  $r \geq 1$  since the property is clearly true for  $r = 0$ ). Let  $l_r$  be the length of the longest word in  $B_r^\Lambda(t)$ . Since  $d_L(t_n, t) \leq 1/(l_r + 1)$  for  $n$  say larger than  $N'_r$ , for those  $n$  the words in  $t_n$  and  $t$  with at most  $l_r$  letters coincide. This implies that  $B_r^\Lambda(t) \subset B_r^\Lambda(t_n)$  and that this inclusion is strict for a sub-sequence  $(t_{n_k})$  of  $(t_n)$ . Hence one may find a sequence of words  $w_{n_k}$  such that:  $\Lambda(w_{n_k}) = r$ ,  $w_{n_k} \in t_{n_k}$ ,  $w_{n_k} \notin t$ . Let  $w'_{n_k}$  be the smallest (for the LO) elements of  $(t_{n_k})$  with this property. In particular, the father  $w_{n_k}^f$  of  $w'_{n_k}$  satisfies either:

- (a)  $\Lambda(w_{n_k}^f) = r - 1$  or,
- (b)  $\Lambda(w_{n_k}^f) = r$  and then  $w_{n_k}^f$  belongs to  $B_r^\Lambda(t)$ .

For  $n$  large enough, say larger than  $N_{r-1}$ ,  $B_{r-1}^\Lambda(t_n)$  coincides with  $B_{r-1}^\Lambda(t)$  (since  $r$  is the first number for which this property does not hold). Hence, the set  $S_f = \{w_{n_k}^f \mid n_k \geq N_{r-1} \wedge N'_r\} \subset B_r^\Lambda(t)$  is finite by the previous Lemma. Then the sequence  $(w'_{n_k})$  takes its values in the set of children of the nodes of  $S_f$ , the finite set say  $S_r$ . Consider an accumulation point  $p$  of  $(w'_{n_k})$ . The point  $p$  is in the finite set  $\{w'_{n_k}, k \geq 0\}$  and then not in  $t$ . But  $p$  is in  $t$  since  $t$  contains all (finite) accumulations points of all sequences  $(x_n)$ , where  $x_n \in t_n$ . This is a contradiction. □

### 4.3.1 A notion of infinite map

This section is much inspired by Angel & Schramm [AS03] and Chassaing & Durhuus [CD06, Section 6].

We call infinite map  $m$ , the embedding of a graph in the plane having the following properties:

- ( $\alpha$ ) it is locally-finite, that is the degree of all nodes is finite,
- ( $\beta$ ) if  $(\rho_n, n \geq 1)$  is a sequence of points belonging to distinct edges of  $m$ , then accumulation points of  $(\rho_n)$  are not on  $m$  (neither on the edges or on the vertices of  $m$ ).

This last condition ensures that no face is created artificially. For example, we want to avoid a drawing of an infinite graph where each node has degree 2 (an infinite graph line, in some sense) that would create two faces or more, as would result by a drawing of this graph where the two extremities accumulate on the same point. Avoiding the creation of artificial faces allows to ensure that homeomorphisms of the plane are still the right tools to discriminate similar objects.

In the following we define an application  $\Psi_\infty^\Delta$  that associates with a tree  $t$  of  $\mathcal{T}_{\text{thin}}^{\text{ter}}$  an infinite map  $\Psi_\infty^\Delta(t)$  of the plane. Before this, let us make some remarks. Let  $t \in \mathcal{T}_{\text{thin}}^{\text{ter}}$ , for any  $r$ , set  $t(r)$  the tree having as set of internal nodes  $B_r^\Delta = B_r^\Delta(t)$ . We have clearly  $d_L(t(r), t) \xrightarrow[r]{} 0$ . Moreover, since  $t(r)$  is included in  $t(r+1)$ , the map  $m_r = (\Psi^\Delta)^{-1}(t(r))$  is “included” in  $m_{r+1}$ . The quotes are there to recall that we are working on equivalence classes modulo homeomorphisms and that the inclusion is not really defined *stricto sensu*. In order to have indeed an inclusion, an idea is to use the canonical drawing (see Definition 4.2) : the inclusion  $\mathcal{G}(m_r) \subset \mathcal{G}(m_{r+1})$  is clear if one uses a history leading to  $m_{r+1}$  that passes from  $m_r$ , which is possible thanks to Property (i) of Proposition 4.6 and the fact that  $t(r) \subset t(r+1)$ . Now  $(\mathcal{G}(m_r))$  is a sequence of increasing graphs. Let  $\mathcal{G}_t$  be defined as the map  $\cup_r \mathcal{G}(m_r)$  and having as set of nodes and edges those belonging to at least one of the  $\mathcal{G}(m_r)$ .

**Proposition 4.19.** *For any thin tree  $t$ , the map  $\mathcal{G}_t$  satisfies ( $\alpha$ ) and ( $\beta$ ).*

*Proof.* The first assertion comes from the construction and the finiteness of the balls  $B_r^\Delta$  (by Lemma 4.17). For the second assertion, just notice that for any  $r$ , only a unique face of  $m_r$  contains an infinite number of faces of  $\mathcal{G}_t$ . Indeed,  $t(r)$  is included in  $t$  and  $t$  owns only one infinite line of descent  $L$ . Hence among the set of fringe subtrees  $\{t_u \mid u \in t(r)\}$  of  $t$  (each of them corresponding to the nodes that will be inserted in one of the triangular faces of  $m_r$ ) only one has an infinite cardinality. It remains to check that the edges do not accumulate, and for this, we have only to follow the sequence of triangles  $(F_k)$  that contains an infinite number of faces, those corresponding with the nodes of  $L$ . Moreover, by uniqueness of the infinite line of descent in  $t$ , the family of triangles  $(F_k)$  forms a decreasing sequence for the inclusion. Consider now the subsequence  $F_{n_k}$  where  $g(\text{type}(F_{n_k})) = g(\text{type}(F_{n_{k-1}})) + 1$ . The triangle  $F_{n_k}$  has then all its sides different from  $F_{n_{k-1}}$ . Hence any accumulation points  $\rho$  of  $(\rho_n)$  (as defined in ( $\beta$ )) must belong to  $\cap F_k$ . By the previous argument,  $\rho$  does not belong to any side of those triangles, which amounts to saying that  $\rho$  lies outside  $m$ .  $\square$

**Proposition 4.20.** *Let  $(t_n)$  be a sequence of trees,  $t_n \in \mathcal{T}_{3n-2}^{\text{ter}}$ , converging for the local topology to a thin tree  $t$ . Then the sequence of maps  $(\Psi_n^\Delta)^{-1}(t_n)$  converges to  $\mathcal{G}_t$  for the local topology.*

*Proof.* If  $(t_n)$  converges to  $t$  then for any  $r$ , there exists  $n_r$  such that for any  $n \geq n_r$ ,  $B_r^\Delta(t_n) = B_r^\Delta(t)$ . Hence, if  $n$  is large enough,  $d_L((\Psi_n^\Delta)^{-1}(t_n), \mathcal{G}_t) \leq 1/(r+1)$ .  $\square$

We have till now, work on topological facts, separated in some sense from the probabilistic considerations. It remains to deduce the probabilistic properties of interest.

### 4.3.2 A law on the set of infinite stack-maps

The set  $\mathcal{T}^{\text{ter}}$  is a Polish space for the topology  $d_L$ . In such a space, Skorohod's representation theorem (see e.g. [Kal02, Theorem 4.30]) applies. Since  $P_{3n-2}^{\text{ter}}$  converges to  $P_\infty^{\text{ter}}$ , there exists a space  $\Omega$  on which are defined altogether  $\tilde{\mathbf{t}}_\infty, \tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2, \dots$ , such that  $\tilde{\mathbf{t}}_n \sim P_{3n-2}^{\text{ter}}$  for any  $n$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_\infty \sim P_\infty^{\text{ter}}$ , and such that  $\tilde{\mathbf{t}}_n \xrightarrow[n]{(a.s.)} \tilde{\mathbf{t}}_\infty$ . Moreover, thanks to Lemma 4.16,  $\tilde{\mathbf{t}}_\infty$  is a.s. a thin tree.

We then work on this space  $\Omega$  and use the almost sure properties of  $\tilde{\mathbf{t}}_\infty$ . The convergence in distribution of our theorem will be a consequence of the a.s. convergence on  $\Omega$ .

**Definition 4.21.** *We denote by  $P_\infty^\Delta$  the distribution of  $m_\infty := \mathcal{G}_{\tilde{\mathbf{t}}_\infty}$ .*

A simple consequence of Proposition 4.20 is the following assertion. Since  $d_L(\tilde{\mathbf{t}}_n, \tilde{\mathbf{t}}_\infty) \xrightarrow[n]{(a.s.)} 0$  then

$$d_L\left((\Psi_n^\Delta)^{-1}(\tilde{\mathbf{t}}_n), \mathcal{G}_{\tilde{\mathbf{t}}_\infty}\right) \xrightarrow[n]{(a.s.)} 0. \quad (4.4)$$

This obviously implies the following result.

**Theorem 4.22.**  *$(\mathbb{U}_{2n}^\Delta)$  converges weakly to  $P_\infty^\Delta$  for the topology of local convergence.*

## 5 Asymptotic under the Gromov-Hausdorff topology

The asymptotic behavior of GW trees under  $P_n^{\text{ter}}$  is very well studied. We focus in this section on the limiting behavior under the Gromov-Hausdorff topology. The facts described here will be used later in the proof of the theorems stating the convergence of stack-triangulations. In addition we stress on the fact that the limit of rescaled stack-maps under the uniform distribution is the same limit as the one of GW trees: the continuum random tree.

### 5.1 Gromov-Hausdorff convergence of rescaled GW trees

We present here the limit of rescaled GW trees conditioned by the size for the Gromov-Hausdorff topology. We borrow some considerations from Le Gall & Weill [LGW06] and Le Gall [LG05].

We adopt the same normalizations as Aldous [Ald91, Ald93]: the Continuum Random Tree (CRT)  $\mathcal{T}_{2e}$  can be defined as the real tree coded by twice a normalized Brownian excursion  $e = (e_t)_{t \in [0,1]}$ . Indeed, any function  $f$  with duration 1 and satisfying moreover  $f(0) = f(1) = 0$ , and  $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$  may be viewed as coding a continuous tree as follows (illustration can be found on Figure 4.9). For every  $s, s' \in [0, 1]$ , we set

$$m_f(s, s') := \inf_{s \wedge s' \leq r \leq s \vee s'} f(r).$$

We then define an equivalence relation on  $[0, 1]$  by setting  $s \sim_f s'$  if and only if  $f(s) = f(s') = m_f(s, s')$ . Finally we put

$$d_f(s, s') = f(s) + f(s') - 2m_f(s, s') \tag{5.1}$$

and note that  $d_f(s, s')$  only depends on the equivalence classes of  $s$  and  $s'$ .

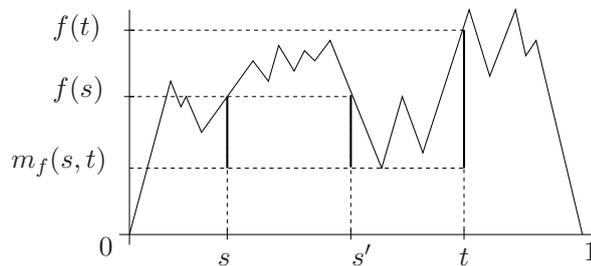


Figure 4.9: Graph of a continuous function  $f$  satisfying  $f(0) = f(1) = 0$  and  $f(x) \geq 0$  on  $[0,1]$ . In this example  $s \sim_f s'$  and the distance  $d_f(s, t) = d_f(s', t) = f(s) + f(t) - 2m_f(s, t)$  is the sum of the lengths of the vertical segments.

Then the quotient space  $\mathcal{T}_f := [0, 1]/ \sim_f$  equipped with the metric  $d_f$  is a compact  $\mathbb{R}$ -tree (see e.g. Section 2 of [Duq05]). In other words, it is a compact metric space such that for any two points  $\sigma$  and  $\sigma'$  there is a unique arc with endpoints  $\sigma$  and  $\sigma'$  and furthermore this arc is isometric to a compact interval of the real line. We view  $\mathcal{T}_f$  as a rooted  $\mathbb{R}$ -tree, whose root  $\rho$  is the equivalence class of 0.

The CRT is the metric space  $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e})$ . In addition to the usual genealogical order of the tree, the CRT  $\mathcal{T}_{2e}$  inherits a LO from the coding by  $2e$ , in a way analogous to the ordering of (discrete) plane trees from the left to the right.

Discrete trees  $T$  are now equipped with their graph distances  $d_T$ .

**Proposition 4.23.** *The following convergence holds for the GH topology. Under  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$ ,*

$$\left( T, \frac{d_T}{\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}).$$

*Proof.* The convergence for the GH topology is a consequence of the convergence for any suitable encoding of trees. The offspring distribution  $\nu_{\text{ter}} := \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3$  is critical (in other words has mean 1) and variance 2. The convergence of rescaled GW trees conditioned by their size is proved by Aldous [Ald91, Ald93]. (See also Le Gall [LG05] or Marckert & Mokkadem [MM03], Section 6 of Pitman [Pit06]).  $\square$

## 5.2 Gromov-Hausdorff convergence of stack-triangulations

We begin with a simple asymptotic result concerning the function  $\Lambda$  defined in Section 2.3.2.

**Lemme 4.24.** *Let  $(X_i)_{i \geq 1}$  be a sequence of random variables uniform in  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$ , and independent. Let  $W_n$  be the word  $X_1 \dots X_n$ .*

(i)  $n^{-1}\Lambda(W_n) \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Lambda_\Delta$  where

$$\Lambda_\Delta := 2/11. \tag{5.2}$$

(ii)  $\mathbb{P}(|\Lambda(W_n) - n\Lambda_\Delta| \geq n^{1/2+u}) \xrightarrow[n]{} 0$  for any  $u > 0$ .

*Proof.* If  $W$  is the infinite sequence  $(X_i)$ , clearly  $\tau_2(W) \sim \text{Geometric}(1/3)$  and for  $i \geq 3$ , the  $(\tau_i(W) - \tau_{i-1}(W))$ 's are i.i.d., independent also from  $\tau_2$ , and are distributed as  $1 + G_1 + G_2$  where  $G_1 \sim \text{Geometric}(1/3)$  and  $G_2 \sim \text{Geometric}(2/3)$  [the distribution  $\text{Geometric}(p)$  is  $\sum_{k \geq 1} p(1-p)^{k-1} \delta_k$ ]. It follows that  $\mathbb{E}(\tau_i(W) - \tau_{i-1}(W)) = 11/2$  for  $i \geq 3$  and  $\mathbb{E}(\tau_2(W)) = 3 < +\infty$ . By the renewal theorem assertion (i) holds true. For the second assertion, write

$$\{|\Lambda(W_n) - n\Lambda_\Delta| \geq n^{1/2+u}\} = \{\tau_{n\Lambda_\Delta + n^{1/2+u}} \leq n\} \cup \{\tau_{n\Lambda_\Delta - n^{1/2+u}} \geq n\}.$$

By the Bienaymé-Tchebichev inequality the probability of the events in the right hand side goes to 0.  $\square$

For every integer  $n \geq 2$ , let  $M_n$  be a random rooted map under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ . Denote by  $m_n$  the set of vertices of  $M_n$  and by  $d_{m_n}$  the graph distance on  $m_n$ . We view  $(m_n, d_{m_n})$  as a random variable taking its values in the space of isometric classes of compact metric spaces.

**Theorem 4.25.** *Under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,*

$$\left( m_n, \frac{d_{m_n}}{\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

*for the Gromov-Hausdorff topology on compact metric spaces.*

This theorem is a corollary of the following stronger Theorem stating the convergence of maps seen as parametrized metric spaces. In order to state this theorem, we need to parametrize the map  $M_n$ . The set of internal nodes of  $m_n$  inherits of an order, the LO on trees, thanks to the function  $\Psi_n^\Delta$ . Let  $u(r)$  be the  $r$ th internal node of  $m_n$  for  $r \in \{0, \dots, n-1\}$ . Denote by  $d_{m_n}(k, j)$  the distance between  $u(k)$  and  $u(j)$  in  $m_n$ . We need in the following theorem to interpolate  $d_{m_n}$  between the integer points to obtain a continuous function. Any smooth enough interpolation is suitable. [For example, define  $d_{m_n}$  as the plane interpolation on the triangles with integer coordinates of the form  $(a, b)$ ,  $(a+1, b)$ ,  $(a, b+1)$  and  $(a, b+1)$ ,  $(a+1, b+1)$ ,  $(a+1, b)$ ].

**Theorem 4.26.** Under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,

$$\left( \frac{d_{m_n}(ns, nt)}{\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2}} \right)_{(s,t) \in [0,1]^2} \xrightarrow[n]{(d)} (d_{2e}(s, t))_{(s,t) \in [0,1]^2}, \quad (5.3)$$

where the convergence holds in  $C[0, 1]^2$  (even if not indicated, the space  $C[0, 1]$  and  $C[0, 1]^2$  are equipped with the topology of uniform convergence).

The proof of this Theorem is postponed to Section 9.1.

**Proof of Theorem 4.25.** To explain why Theorem 4.25 is a consequence of Theorem 4.26, we introduce the notion of correspondence between two pointed compact metric spaces. Let  $((E, v), d)$  and  $((E', v'), d')$  be two pointed compact metric spaces. We say that  $\mathcal{R} \subset E \times E'$  is a *correspondence* between  $((E, v), d)$  and  $((E', v'), d')$  if  $(v, v') \in \mathcal{R}$  and for every  $x \in E$  (resp.  $x' \in E'$ ) there exists  $y' \in E'$  (resp.  $y \in E$ ) such that  $(x, y') \in \mathcal{R}$  (resp.  $(x', y) \in \mathcal{R}$ ). The distortion of  $\mathcal{R}$  is defined by

$$\text{dis}(\mathcal{R}) = \sup\{|d(x, y) - d'(x', y')| : (x, x'), (y, y') \in \mathcal{R}\}.$$

It has been proved in [EPW06] that

$$d_{GH}(E, E') = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathcal{C}\}, \quad (5.4)$$

where  $\mathcal{C}$  denotes the set of all correspondences between  $((E, v), d)$  and  $((E', v'), d')$ .

Let  $m_n$  be a uniform stack-triangulation with  $2n$  faces. Then one can construct a correspondence  $\mathcal{R}_n$  between  $((m_n, E_0), d_{m_n}/\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2})$  and a continuous tree  $\mathcal{T}_{2e}$  thanks to the parametrization of  $m_n$ , that is

$$\mathcal{R}_n = \{(u(ns), s) \in m_n \times \mathcal{T}_{2e} : s \in [0, 1]\}.$$

Now using Theorem 4.26, by Skorohod's representation theorem there exists a space  $\Omega$  where a copy  $\widetilde{d}_{m_n}$  of  $d_{m_n}$ , and a copy  $\widetilde{d}_{2e}$  of  $d_{2e}$  satisfies  $\widetilde{d}_{m_n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \widetilde{d}_{2e}$  in  $C[0, 1]^2$ . On this space the correspondence  $\text{dis}(\widetilde{\mathcal{R}}_n) = \sup\{|\widetilde{d}_{m_n}(ns, nt)/\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2} - \widetilde{d}_{2e}(s, t)| : (s, t) \in [0, 1]^2\}$ . On the space  $\Omega$ , a.s.  $\text{dis}(\widetilde{\mathcal{R}}_n) \rightarrow 0$ , which implies Theorem 4.25 (together with (5.4)).  $\square$

The profile  $\text{Prof}_m := (\text{Prof}_m(t), t \geq 0)$  of a map  $m$  with root vertex  $E_0$  is the càdlàg-process

$$\text{Prof}_m(t) = \#\{u \in V(m) \mid d_m(E_0, u) \leq t\}, \text{ for any } t \geq 0.$$

The radius  $R(m) = \max\{d_m(u, E_0) \mid u \in V(m)\}$  is the largest distance to the root vertex in  $m$ .

As a corollary of Theorem 4.25 or Theorem 4.26, we have:

**Corollary 4.27.** Under  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ , the process

$$\left( n^{-1} \text{Prof}_{m_n}(\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2} v) \right)_{v \geq 0} \xrightarrow[n]{(d)} \left( \int_0^v l_{2e}^x dx \right)_{v \geq 0} \quad (5.5)$$

where  $l_{2\mathbf{e}}^x$  stands for the local time of twice the Brownian excursion  $2\mathbf{e}$  at position  $x$  at time 1, and where the convergence holds in distribution in the set  $D[0, +\infty)$  of càdlàg functions endowed with the Skorohod topology. Moreover

$$\frac{R(m_n)}{\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2}} \xrightarrow[n]{(d)} 2 \max \mathbf{e}$$

*Proof.* Let  $D_n(s) = \frac{dm_n(ns,0)}{\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2}}$  be the interpolated distance to  $E_0$ . By (5.3),  $(D_n(s))_{s \in [0,1]} \xrightarrow[n]{(d)} (2\mathbf{e}(s))_{s \in [0,1]}$  in  $C[0,1]$ . By Skorohod's representation theorem there exists a space  $\Omega$  where a copy  $\tilde{D}_n$  of  $D_n$ , and a copy  $\tilde{\mathbf{e}}$  of  $\mathbf{e}$  satisfies  $\tilde{D}_n \xrightarrow[n]{(a.s.)} 2\tilde{\mathbf{e}}$  in  $C[0,1]$ . We work from now on on this space, and write  $\widetilde{\text{Prof}}_n$  the profile corresponding to  $\tilde{D}_n$ . For any  $v$  such that  $\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2} v$  is an integer,

$$n^{-1} \widetilde{\text{Prof}}_n(\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2} v) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\tilde{D}_n(s) \leq v} ds.$$

For every  $v$ , a.s.,  $\int_0^1 \mathbb{1}_{\tilde{D}_n(s) \leq v} ds \rightarrow \int_0^v l_{2\tilde{\mathbf{e}}}^x dx$ . To see this, take any  $\varepsilon > 0$  and check that  $\|\tilde{D}_n - 2\tilde{\mathbf{e}}\|_\infty \rightarrow 0$  yields

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{2\tilde{\mathbf{e}}(s) \leq v - \varepsilon} ds \leq \int_0^1 \mathbb{1}_{\tilde{D}_n(s) \leq v} ds \leq \int_0^1 \mathbb{1}_{2\tilde{\mathbf{e}}(s) \leq v + \varepsilon} ds. \quad (5.6)$$

Since the Borelian measure  $\mu_{2\mathbf{e}}(B) = \int_0^1 \mathbb{1}_{2\mathbf{e}(s) \in B} ds$  has no atom a.s.,  $v \rightarrow \int_0^v l_{2\mathbf{e}}^x dx$  is continuous and non-decreasing. Hence since  $v \rightarrow \int_0^1 \mathbb{1}_{D_n(s) \leq v} ds$  is non decreasing and by (5.6) we have  $\int_0^1 \mathbb{1}_{D_n(s) \leq v} ds \rightarrow \int_0^v l_{2\mathbf{e}}^x dx$  a.s. for any  $v \geq 0$ . Thus,  $(v \rightarrow \int_0^1 \mathbb{1}_{D_n(s) \leq v} ds) \rightarrow (v \rightarrow \int_0^v l_{2\mathbf{e}}^x dx)$  in  $C[0,1]$ . This yields the convergence of  $\text{Prof}_{m_n}$  as asserted in (5.5).

For the second assertion, note that  $f \rightarrow \max f$  is continuous on  $C[0,1]$ . Since  $\tilde{D}_n \xrightarrow[n]{(a.s.)} 2\tilde{\mathbf{e}}$  then  $\max \tilde{D}_n \xrightarrow[n]{(a.s.)} \max 2\tilde{\mathbf{e}}$ , and then also in distribution.  $\square$

## 6 Asymptotic behavior of the typical degree

The results obtained in this part are summed up in the following Proposition.

**Proposition 4.28.** *Let  $m_n$  be a map  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  distributed,  $u(1)$  the first node inserted in  $m_n$ , and  $\mathbf{u}$  be a random node chosen uniformly among the internal nodes of  $m_n$ .*

- (i)  $\deg_{m_n}(u(1)) \xrightarrow[n]{(d)} X$  where for any  $k \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X = k + 3) = \frac{k}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}}$ ,
- (ii)  $\deg_{m_n}(\mathbf{u}) \xrightarrow[n]{(d)} Y$  where for any  $k \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(Y = k + 3) = \frac{1}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+2}}$ .

The (ii) point has been shown by Darrasse & Soria [DS07], in the case of a model of stack-triangulations under a Boltzmann model. Assertion (ii) follows nevertheless their work, and a technical lemma saying that in a Galton-Watson tree  $\mathbf{t}$  conditioned to have a total size  $n$  with offspring distribution  $\nu_{\text{ter}}$ , the fringe subtree  $\mathbf{t}_{\mathbf{u}}$  taken at a random node  $\mathbf{u}$ , converges in distribution to a Galton-Watson tree under  $\nu_{\text{ter}}$  (with no conditioning) when  $n \rightarrow +\infty$ . This argument should be detailed in a forthcoming work of Darrasse & Soria. We give below an elementary proof of this Lemma avoiding the Boltzmann distribution, and the generating function.

**Lemma 4.29.** *Let  $T$  be a random tree under  $\mathbb{U}_{3n+1}^{\text{ter}}$  and  $\mathbf{u}$  be chosen uniformly in  $T^\circ$ . We have  $|T_{\mathbf{u}}| \xrightarrow{(d)} \mathbf{K}$  where  $\mathbb{P}(\mathbf{K} = 3k + 1) = \frac{2^{2k+1}}{3^{3k}(3k+1)} \binom{3k+1}{k}$ , for  $k \geq 1$ . Moreover, conditionally on  $|T_{\mathbf{u}}| = m$ ,  $T_{\mathbf{u}}$  has the uniform distribution in  $\mathcal{T}_m^{\text{ter}}$ .*

*Note 4.30.* There are several ways to check that the limiting sequences in Proposition 4.28 and Lemma 4.29 define indeed some probability distributions. One may use an approach using generating functions. Alternatively, one may use probabilistic arguments.

For the sum in the Lemma, proceed as follows: Consider the family tree of a Galton-Watson process with the critical offspring distribution  $\nu_{\text{ter}}$  starting from one individual. Each of the  $\frac{1}{3^{k+1}} \binom{3k+1}{k}$  ternary trees having  $3k+1$  nodes, has weight  $\frac{2^{2k+1}}{3^{3k+1}}$  under this law. The a.s. extinction of this Galton-Watson process rewrites  $\sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k+1}}{3^{3k}(3k+1)} \binom{3k+1}{k} = 1$ .

Using the same idea, check that  $\sum_{k \geq 0} \frac{3}{2k+3} \binom{2k+3}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}}$  is the extinction probability of a binary Galton-Watson process with offspring distribution  $\mu(0) = 2/3$  and  $\mu(2) = 1/3$ , starting with 3 individuals: since it is sub-critical, this probability is 1.

A probabilistic proof of  $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}} = 1$  runs as follows: one checks that this sum equals  $\frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_{2k+4} = -4)$  where  $S_j$  is a sum of  $j$  i.i.d. random variables taking values  $-1$  or  $+1$  with probability  $2/3$  and  $1/3$ . Then  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_{2k+4} = -4) = \mathbb{E}(\sum_j \mathbb{1}_{S_j = -4})$  is the mean time passed by the random walk  $S$ , at position  $-4$ : the identity is exact since  $-4$  can be reached only at even dates. But the mean sojourn time in a given position with negative ordinate is 3, since the drift of the random walk is  $-1 \times (2/3) + 1 \times (1/3) = -1/3$ .

**Proof of Lemma 4.29.** Consider

$$\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star} := \{(t, u) \mid t \in \mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}, u \in t^\circ\}, \quad \mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\bullet} := \{(t, u) \mid t \in \mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}, u \in \partial t\}$$

the set of ternary trees with a distinguished internal node, resp. leaf. For any tree  $t$  and  $u \in t$  set  $t[u] = \{v \in t \mid v \text{ is not a descendant of } u\}$ . Each element  $(t, u)$  of  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star}$  can be decomposed bijectively as a pair  $[(t[u], u), t_u]$  where  $(t[u], u)$  is a tree with a marked leaf, and  $t_u$  is a ternary tree having at least one internal node. Hence, for any  $n$ , the function  $\rho$  defined by  $\rho(t, u) := [(t[u], u), t_u]$  is a bijection from  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star}$  onto  $\bigcup_{k=1}^n \left( \mathcal{T}_{3(n-k)+1}^{\text{ter}\bullet} \times \mathcal{T}_{3k+1}^{\text{ter}} \right)$ .

Since the trees in  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  have the same number of internal nodes, choosing a tree  $T$  uniformly in  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  and then a node  $u$  uniformly in  $T^\circ$ , amounts to choosing a marked tree  $(T, u)$  uniformly in  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star}$ . We then have, for any fixed  $k$ ,

$$\mathbb{U}_{3n+1}^{\text{ter}}(|T_{\mathbf{u}}| = 3k + 1) = \#\mathcal{T}_{3(n-k)+1}^{\text{ter}\bullet} \#\mathcal{T}_{3k+1}^{\text{ter}} (\#\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star})^{-1}. \tag{6.1}$$

When  $n \rightarrow +\infty$ , this tends to the result announced in the Lemma, using (4.2),  $\#\mathcal{T}_{3m+1}^{\text{ter}\bullet} = (2m + 1)\#\mathcal{T}_{3m+1}^{\text{ter}}$  and  $\#\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}\star} = n\#\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  and

$$\#\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}} = \frac{1}{3n + 1} \binom{3n + 1}{n} \sim \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{3^{3n}}{2^{2n+2} n^{3/2}}. \tag{6.2}$$

To conclude that we have indeed a convergence in distribution of  $\text{deg}_T(\mathbf{u})$  under  $\mathbb{U}_{3n+1}^{\text{ter}}$  to  $\mathbf{K}$ , we use that the limit sums to 1 (see Note 4.30). The second assertion of the Lemma is clear.  $\square$

**Proof of Proposition 4.28.** As illustrated on Figure 4.10, for any  $t \in \mathcal{T}^{\text{ter}}$ , we let

$$t^{\text{deg}} := \{v \mid v \in t, v \in 1\{2, 3\}^* \cup 2\{1, 3\}^* \cup 3\{1, 2\}^*\}.$$

In general  $t^{\text{deg}}$  is a forest of three pseudo-trees: pseudo here means that the connected components of  $t^{\text{deg}}$  have a tree structure but do not satisfies the first and third points in Definition 4.3. For sake of compactness, we will however up to a slight abuse of language call these three pseudo-trees, binary trees (combinatorially their are binary trees).

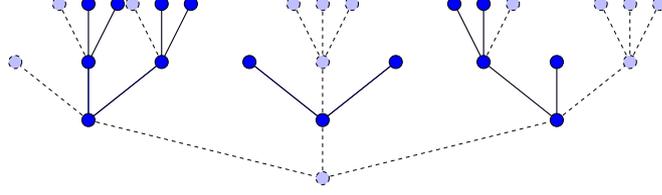


Figure 4.10: A ternary tree  $t$  and  $t^{\text{deg}}$ . Plain vertices belong to  $t^{\text{deg}}$ .

(i) Let  $T$  be a tree  $\mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}$  distributed and  $m = (\Psi_n^\Delta)^{-1}(T)$ . By Property (iii) of Proposition 4.5,

$$\deg_m(u(1)) = 3 + \#(T^{\text{deg}} \cap T^\circ), \quad (6.3)$$

or in other words  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta(\deg(u(1)) = k + 3) = \mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T^{\text{deg}}| = 2k + 3)$ . Each ternary tree  $t$  not reduced to the root vertex can be decomposed in a unique way as a pair  $(t^{\text{deg}}, f)$  where  $f := (t(1), \dots, t(k)) \in (\mathcal{T}^{\text{ter}})^k$  is a forest of ternary trees, and  $k = \#(t^{\text{deg}} \cap t^\circ)$ . Let  $\mathcal{F}_{\text{bin}}^n(k)$  (resp  $\mathcal{F}_{\text{ter}}^n(k)$ ) be the set of forests composed with  $n$  binary (resp. ternary) trees and total number of nodes  $k$ . For  $0 \leq k < n - 1$ , we get:

$$\mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T^{\text{deg}}| = 2k + 3) = \frac{\#\mathcal{F}_{\text{bin}}^3(2k + 3)\#\mathcal{F}_{\text{ter}}^k(3n - 2k - 6)}{\#\mathcal{T}_{3n-2}^{\text{ter}}}. \quad (6.4)$$

A well known consequence of the rotation/conjugation principle (see Pitman [Pit06] Section 5.1) is that

$$\#\mathcal{F}_{\text{bin}}^m(n) = \frac{m}{n} \binom{n}{(n-m)/2}, \quad \text{and} \quad \#\mathcal{F}_{\text{ter}}^m(n) = \frac{m}{n} \binom{n}{(n-m)/3} \quad (6.5)$$

with the convention that  $\binom{a}{b}$  is 0 if  $b$  is negative or non integer. We then have

$$\mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T^{\text{deg}}| = 2k + 3) = \frac{\frac{3}{2k+3} \binom{2k+3}{k} \frac{k}{3n-2k-6} \binom{3n-2k-6}{n-k-2}}{\frac{1}{3n-2} \binom{3n-2}{n-1}}. \quad (6.6)$$

We get  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta(\deg_{m_n}(u(1)) = k + 3) \rightarrow \frac{k}{n} \frac{2^{k+3}}{k+3} \binom{2k+2}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}}$ , limit which is indeed a probability distribution (see Note 4.30).

(ii) Now let  $m_n$  be  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  distributed and  $\mathbf{u}$  be a uniform internal node of  $m_n$ . Let  $T = \Psi^\Delta(m_n)$  and  $\mathbf{u}'$  be the internal node of  $T$  corresponding to  $\mathbf{u}$ . We have this time  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta(\deg_m(\mathbf{u}) = k + 3) = \mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T_{\mathbf{u}'}^{\text{deg}}| = 2k + 3)$ . First by a simple counting argument,

$$\mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T_{\mathbf{u}'}^{\text{deg}}| = 2k + 3 \mid |T_{\mathbf{u}'}| = 3j - 2) = \mathbb{U}_{3j-2}^{\text{ter}}(|T^{\text{deg}}| = 2k + 3).$$

Conditioning on  $|T_{\mathbf{u}'}|$ , using Formulas (6.1) and (6.6) we get after simplification

$$q_{n,k} := \mathbb{U}_{3n-2}^{\text{ter}}(|T_{\mathbf{u}'}^{\text{deg}}| = 2k + 3) = \sum_{j \geq k+2} q_{n,k,j} \quad (6.7)$$

where

$$q_{n,k,j} = (\mathbb{1}_{j \leq n}) \frac{3}{2k+3} \binom{2k+3}{k} \frac{\binom{k}{3j-2k-6} \binom{3j-2k-6}{j-k-2} \binom{3(n-j)}{n-j}}{\binom{3n-3}{2n-1}}.$$

We have  $\lim_n \binom{3(n-j)}{n-j} / \binom{3n-3}{2n-1} = 2^{2j-1} / 3^{3j-3}$ , and thus

$$\sum_{j \geq k+2}^{\infty} \lim_n q_{n,k,j} = \tilde{q}_k := \frac{3}{2k+3} \binom{2k+3}{k} \frac{2^{k+3}}{3^{2k+3}}, \tag{6.8}$$

which is the probability distribution announced to be the limit of  $q_{n,k}$ . To end the proof we have to explain why the exchange  $\lim_n$  and  $\sum_{j \geq k+2}$  is legal.

By Fatou's lemma, for any  $k$  one has

$$\limsup_n q_{n,k} = \bar{q}_k \geq \underline{q}_k = \liminf_n q_{n,k} \geq \tilde{q}_k.$$

Since  $(\tilde{q}_k)$  is a probability distribution,  $\sum \tilde{q}_k = 1$ . And clearly for any  $K$ ,  $\bar{q}_1 + \dots + \bar{q}_K = \limsup_n q_{n,1} + \dots + q_{n,K} \leq 1$ . Hence, we have that  $\sum \bar{q}_k = 1$  (it is greater than  $\sum \tilde{q}_k = 1$  and smaller than 1), this implies that  $\sum \underline{q}_k = \sum \bar{q}_k = \sum \tilde{q}_k = 1$  and then for any  $k$ ,  $\bar{q}_k = \underline{q}_k = \tilde{q}_k$  and then  $\lim_k q_k$  exists and is  $\tilde{q}_k$ .  $\square$

## 7 Asymptotic behavior of stack-triangulations under $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$

We first present a result concerning ternary trees under  $\mathbb{Q}_{3n-2}^{\text{ter}}$ .

**Proposition 4.31.** *Let  $\mathbf{t}$  be a random tree under  $\mathbb{Q}_{3n-2}^{\text{ter}}$ , and  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  be two nodes chosen uniformly and independently in  $\mathbf{t}^\circ$ ; let  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  be their deepest common ancestor.*

1) *We have  $\left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(|\mathbf{u}| - \frac{3}{2} \log n, |\mathbf{v}| - \frac{3}{2} \log n\right) \xrightarrow[n]{(d)} (N_1, N_2)$  where  $N_1$  and  $N_2$  are independent centered Gaussian r.v. with variance 1.*

2) *Let  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  and  $\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_l$  be the unique words such that  $\mathbf{u} = \mathbf{w}\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  and  $\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_l$ . Set*

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k \text{ and } \mathbf{v}^* = \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_l.$$

*Conditionally to  $(|\mathbf{u}^*|, |\mathbf{v}^*|)$  (their lengths)  $\mathbf{u}^*$  and  $\mathbf{v}^*$  are independent random words composed with  $|\mathbf{u}^*|$  and  $|\mathbf{v}^*|$  independent letters uniformly distributed in  $\Sigma_3 = \{1, 2, 3\}$ .*

3) *For any  $a_n \rightarrow +\infty$ , we have  $|\mathbf{w}|/a_n \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 0$ .*

[Notice that in the second assertion, the words  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  and  $\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_l$  may be empty.]

The following theorem may be considered as the strongest result of this section. As explained in its proof, it is an immediate consequence of Proposition 4.31.

**Theorem 4.32.** *Let  $M_n$  be a stack-triangulation under  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ . Let  $k \in \mathbb{N}$  and  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  be  $k$  nodes of  $M_n$  chosen independently and uniformly among the internal nodes of  $M_n$ . We have*

$$\left( \frac{D_{M_n}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{3\Lambda_\Delta \log n} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2} \xrightarrow[n]{\text{proba.}} (1_{i \neq j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}$$

*The matrix  $(1_{i \neq j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}$  is the matrix of the discrete distance on a set of  $k$  points.*

This is consistent with the computations of Zhou [ZYW05] and Zhang & al [ZCFR06].

*Proof.* The convergence stated in the theorem is equivalent to the (in appearance weaker) following statement: if  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  are two i.i.d. uniform random internal nodes in  $M_n$ , then

$$\frac{D_{M_n}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{3\Lambda_\Delta \log n} \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 1.$$

Now, consider  $\mathbf{t} := \Psi^\Delta(M_n)$  and write

$$|D_{M_n}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - \Lambda(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)| \leq 4$$

(by (2.3)) where  $\mathbf{v}'_1$  and  $\mathbf{v}'_2$  are the internal nodes corresponding to  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  by the bijection  $\Psi^\Delta$ . Notice that  $\mathbf{v}'_1$  and  $\mathbf{v}'_2$  are i.i.d. uniform in  $\mathbf{t}^\circ$ . Now write,

$$|\Lambda(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) - \Lambda(\mathbf{v}'_1^*) - \Lambda(\mathbf{v}'_2^*)| \leq 2$$

and use Proposition 4.31 : asymptotically  $\mathbf{v}'_1^*$  and  $\mathbf{v}'_2^*$  have each of them a length around  $3 \log n / 2$  (more precisely  $\mathbb{P}(|\mathbf{v}'_i^*| - 3/2 \log n| \geq \varepsilon \log n) \rightarrow 0$  for  $i \in \{1, 2\}$  and any  $\varepsilon > 0$ ) and the letters of  $\mathbf{v}'_1^*$  and  $\mathbf{v}'_2^*$  are independent. A simple application of Lemma 4.24 gives the result.  $\square$

We now focus on Proposition 4.31 and on its proof. This Proposition is more or less part of the folklore. Bergeron & al [BFS92], in particular in Theorem 8 and Example 1 p.7, proved that

$$\left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(|\mathbf{u}| - \frac{3}{2} \log n\right) \xrightarrow[n]{(d)} N_1. \quad (7.1)$$

Below we present a formal proof of this proposition using a ‘‘Poisson-Dirichlet fragmentation’’ point of view, very close to that used in Broutin & al. [BDMdlS08, Section 7] where the height of increasing trees is investigated. They show that in increasing trees the asymptotic proportion  $n^{-1}(|t_1|, \dots, |t_d|)$  of nodes in the subtrees of the root are given by a Poisson-Dirichlet distribution. The point of view developed below is different in nature, since we first take a Poisson-Dirichlet fragmentation and then show that the fragmentation tree is distributed as an increasing tree, leading then at once to the convergence of  $n^{-1}(|t_1|, \dots, |t_d|)$ . The following Subsection is mostly contained in the more general work of Dong & al. [DGM06] (particularly Section 5). We give a straight exposition below for the reader convenience, in a quite different vocabulary.

## 7.1 Poisson-Dirichlet fragmentation

We construct here a representation of the distribution  $\mathbb{Q}_{3K-2}^\Delta$  as the distribution of the underlying tree of a fragmentation tree. Let begin with the description of the deterministic fragmentation tree associated with a sequence of choices  $\mathbf{b} = (b_i)_{i \geq 1}$ ,  $b_i \in [0, 1]$  and a sequence  $\mathbf{y} = (y^u)_{u \in \mathcal{W}_3} = (y_1^u, y_2^u, y_3^u)_{u \in \mathcal{W}_3}$  indexed by the infinite complete ternary tree  $\mathcal{W}_3 = \bigcup_{n \geq 0} \{1, 2, 3\}^n$ , where for any  $i \in \{1, 2, 3\}$  and  $u \in \mathcal{W}_3$ ,  $y_i^u > 0$  and  $\sum_{i=1}^3 y_i^u = 1$ . The sequence  $(y^u)$  may be thought as the fragmentation structure associated with the tree.

With these two sequences we associate a sequence  $F_n = F(n, \mathbf{b}, \mathbf{y})$  of ternary trees with  $3n + 1$  leaves, where each node is marked with an interval as follows.

- At time 0,  $F_0$  is the tree  $\{\emptyset\}$  (reduced to the root) marked by  $I_\emptyset = [0, 1)$ .
- Assume now that  $F_i$  is built, and is a ternary tree with  $3i + 1$  nodes each marked with an interval included in  $[0, 1)$ , and such that the leaves-intervals  $(I_u, u \in \partial T_i)$  form a partition of  $[0, 1)$ . Then the tree  $F_{i+1}$  is obtained from  $F_i$  as follows. Consider  $u^*$  the

leaf whose associated interval  $I_{u^*}$  contains  $b_{i+1}$ . Give to  $u^*$  the 3 children  $u^*1, u^*2, u^*3$ . Now split the interval  $I_{u^*}$  into  $(I_{u^*1}, I_{u^*2}, I_{u^*3})$  with respective size proportions given by  $y^{u^*}$ : if  $I_{u^*} = [a, b)$  then set  $I_{u^*i} = [a + (b - a) \sum_{j=1}^{i-1} y_j^{u^*}, a + (b - a) \sum_{j=1}^i y_j^{u^*})$  for every  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Let  $\Omega_{\mathcal{F}}$  be the set of fragmentation trees (a tree where each node is marked by an interval). We define the projection  $\pi$  from  $\Omega_{\mathcal{F}}$  to  $\mathcal{T}^{\text{ter}}$  as the application sending a fragmentation tree  $F$  to its underlying tree  $\pi(F)$ , that is the tree  $F$  without marks.

We now let  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{y}$  be random. For  $d \geq 2$  consider the simplex

$$\Delta_{d-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \mid x_i \geq 0 \text{ for every } i \in \{1, \dots, d\} \text{ and } \sum_{i=1}^d x_i = 1 \right\}.$$

The  $d - 1$ -dimensional Dirichlet distribution with parameter  $\alpha \in (0, +\infty)$ , denoted  $\text{Dir}_{d-1}(\alpha)$ , is the probability measure (on  $\Delta_{d-1}$ ) with density

$$\mu_{d,\alpha}(x_1, \dots, x_d) := \frac{\Gamma(d\alpha)}{\Gamma(\alpha)^d \Gamma(d)} x_1^{\alpha-1} \dots x_d^{\alpha-1} \tag{7.2}$$

with respect to  $dS_d$  the uniform measure on  $\Delta_{d-1}$ .

Consider the following discrete time process  $(\mathbf{F}_n)$  where  $\mathbf{F}_n = F(n, \mathbf{B}, \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{B}$  is a sequence of i.i.d. random variables uniform on  $[0, 1]$ , and  $\mathbf{Y} = (Y^u)_{u \in \mathcal{W}_d}$  is a sequence of i.i.d. r.v. with  $\text{Dir}_{d-1}(\alpha)$  distribution (independent from  $\mathbf{B}$ ), with  $d = 3$ , and  $\alpha = \frac{1}{d-1} = 1/2$ . When like here, the choice of the interval that will be fragmented is equal to the size of the fragment, the fragmentation is said to be biased by the size.

**Proposition 4.33.** *If  $d = 3$  and  $\alpha = \frac{1}{d-1}$  for any  $K \geq 1$  the distribution of  $\pi(\mathbf{F}_K)$  is  $\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}$ .*

*Note 4.34.* The construction done in the ternary case, can be extended in the  $d$ -ary case without any problem (with  $d \geq 2$ ). The distribution of the underlying fragmentation tree corresponding to the Dirichlet distribution  $\mu_{d,\alpha}$  with  $\alpha = \frac{1}{d-1}$  is a distribution on  $d$ -ary tree similar to  $\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}$ : it corresponds to  $d$ -ary increasing trees, and can also be constructed thanks to successive insertions of internal nodes uniformly on the existing leaves.

*Proof.* Denote by  $\mathbb{P}_{3K+1}^F$  the distribution of  $\pi(\mathbf{F}_K)$  and  $\mathbf{t}^{(K)}$  a r.v. having this distribution. Knowing  $Y^\emptyset = (Y_1^\emptyset, Y_2^\emptyset, Y_3^\emptyset)$ , the distribution of the vector  $(|\mathbf{t}_1^{(K)\circ}|, |\mathbf{t}_2^{(K)\circ}|, |\mathbf{t}_3^{(K)\circ}|)$  giving the size of the subtrees of  $\mathbf{t}^{(K)}$  is multinomial  $(K - 1, Y_1^\emptyset, Y_2^\emptyset, Y_3^\emptyset)$ ; indeed for  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $|\mathbf{t}_i^{(K)\circ}| = \#\{l \in \{1, \dots, K - 1\} \mid B_l \in I_i\}$  where  $I_i = [\sum_{j=1}^{i-1} Y_j^\emptyset, \sum_{j=1}^i Y_j^\emptyset)$ . Let us integrate this. We have

$$\mathbb{P}_{3K+1}^F(\{t \mid |t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\}) = \int_{\Delta_2} \binom{K-1}{k_1, k_2, k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \mu_{3, \frac{1}{2}}(x_1, x_2, x_3) dS_3(x_1, x_2, x_3) \tag{7.3}$$

for any non negative integers  $k_1, k_2, k_3$  summing to  $K - 1$ . This leads to

$$\mathbb{P}_{3K+1}^F(\{t \mid |t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\}) = \binom{K-1}{k_1, k_2, k_3} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)^3} \frac{\prod_{i=1}^3 \Gamma(k_i + 1/2)}{\Gamma(k_1 + k_2 + k_3 + 3/2)}. \tag{7.4}$$

The comparison with  $\mathbb{Q}^{\text{ter}}$  is done as follows. Let count the number of constructions leading to a tree  $t$  such that  $|t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}$ . The sum of the number of histories of the trees with  $m$  internal nodes is  $N_m := \prod_{i=0}^{m-1} (2i+1)$  since at each step of the history, we choose one leaf of the tree and at the  $k$ -th step, the tree has  $2k+1$  leaves. Hence

$$\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}(\{t \mid |t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\}) = \binom{K-1}{k_1, k_2, k_3} \frac{\prod_{i=1}^3 N_{k_i}}{N_K}.$$

Since

$$\Gamma(k_i + 1/2) = 2^{-k_i} N_{k_i} \Gamma(1/2)$$

and

$$\Gamma(k_1 + k_2 + k_3 + 3/2) = 2^{-k_1 - k_2 - k_3} N_{k_1 + k_2 + k_3 + 1} \Gamma(3/2),$$

and after simplification, we check that  $\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}(\{t \mid |t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\}) = \mathbb{P}_{3K+1}^F(\{t \mid |t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\})$ , that is the size of the subtrees of the root have the same distribution under  $\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}$  or under  $\mathbb{P}_{3K+1}^F$ .

To conclude the proof of the proposition, we use a recursive argument, by conditioning on the subtree sizes. Fix  $k_1, k_2, k_3$  summing to  $K-1$ , and consider the law of  $(t_1^\circ, t_2^\circ, t_3^\circ)$  conditionally on  $\{|t_i^\circ| = k_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$  under  $\mathbb{Q}_{3K+1}^{\text{ter}}$ , and next under  $\mathbb{P}_{3K+1}^F$ . One then checks easily that under this conditioning and under each law, the subtrees  $(t_1^\circ, t_2^\circ, t_3^\circ)$  is a vector of independent random variables, and have respectively the law  $\mathbb{Q}_{3k_1+1}^{\text{ter}} \times \mathbb{Q}_{3k_2+1}^{\text{ter}} \times \mathbb{Q}_{3k_3+1}^{\text{ter}}$  and  $\mathbb{P}_{3k_1+1}^F \times \mathbb{P}_{3k_2+1}^F \times \mathbb{P}_{3k_3+1}^F$  (the fundamental reason for the fragmentation case is that independent random variables  $U_1, \dots, U_k$  conditioned to belong to an interval  $I$  are again independent and uniform in  $I$ ).  $\square$

**Proof of Proposition 4.31.** Let  $r$  fixed, and let  $n > r$ . Let us examine the probability that  $\mathbf{w}$  is not in  $\mathbf{t}^{(r)} = \pi(\mathbf{F}_r)$ . Conditionally on  $I(r) := (I_u, u \in \mathbf{t}^{(r)})$  the vector size  $(|\mathbf{t}_u^{(n)\circ}|, u \in \partial\mathbf{t}^{(r)})$ , giving the number of internal nodes in the fringe subtrees of  $\mathbf{t}^{(n)}$  at the leaves of  $\mathbf{t}^{(r)}$ , has the multinomial  $(n-r, (|I_u|, u \in \partial\mathbf{t}^{(r)}))$  distribution. The event  $\{\mathbf{w} \notin \mathbf{t}^{(r)\circ}\}$  is equal to the event

$$E_r := \{\mathbf{u} \text{ and } \mathbf{v} \text{ belong to the same subtree of the family } (\mathbf{t}_u^{(n)\circ}, u \in \partial\mathbf{t}^{(r)})\}.$$

Knowing  $I(r)$  the probability of  $E_r$  is  $\sum_{u \in \mathbf{t}^{(r)}} |I_u|^2 \leq \max |I_u| \sum_{u \in \mathbf{t}^{(r)}} |I_u| = \max |I_u|$ , since this event occurs only if the two variables uniform  $b_i$  corresponding to  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  belong to the same interval  $I_u$ . Hence

$$\mathbb{P}(|\mathbf{w}| \geq r) \leq \mathbb{P}(\mathbf{w} \notin \mathbf{t}^{(r)\circ}) \leq \mathbb{E} \left( \max_{u \in \partial\mathbf{t}^{(r)}} |I_u| \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad (7.5)$$

since in a size biased fragmentation process where the fragmentation measure does not charge 0, the maximal size of the fragments goes a.s. to 0 when the time  $\rightarrow +\infty$ . Property (3) follows.

We now prove (1). By the strong long of large number, knowing  $I(r)$ ,

$$\forall u \in \partial\mathbf{t}^{(r)}, \quad \frac{|\mathbf{t}_u^{(n)\circ}|}{n} \xrightarrow{(a.s.)} \frac{|I_u|}{n} \quad (7.6)$$

and then one will assume now that  $N$  is chosen such that for any  $n \geq N$ ,  $\frac{|\mathbf{t}_u^{(n)\circ}|}{n} \in [|I_u|/2, 2|I_u|]$  for any  $u \in \partial\mathbf{t}^{(r)}$  (the lengths  $|I_u|$  are a.s. all non zero). Again, conditionally to their sizes  $(|\mathbf{t}_u^{(n)\circ}|, u \in \partial\mathbf{t}^{(r)}) = (s_1, \dots, s_{2r+1})$ , the trees  $(\mathbf{t}_u^{(n)\circ}, u \in \partial\mathbf{t}^{(r)})$  are independent trees, the  $i$ th having the law  $\mathbb{Q}_{s_i}^{\text{ter}}$ .

Consider the event  $E_{r,\varepsilon} := \{\max I(r) < \varepsilon\}$ . As said above, for any  $\varepsilon' > 0$ , any  $\varepsilon > 0$ , if  $r$  is large enough,  $\mathbb{P}(E_{r,\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon'$ . Let us condition by  $E_{r,\varepsilon}$ , and let us choose  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{t}^{(n)\circ}$ , with  $n > N$ . With probability close to 1 (under  $E_{r,\varepsilon}$ ), the random nodes  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  belong to two different subtrees  $|\mathbf{t}_w^{(n)\circ}|$  and  $|\mathbf{t}_{w'}^{(n)\circ}|$  for  $\{w, w'\} \subset \partial\mathbf{t}^{(r)}$ ; in this case, their distance in  $\mathbf{t}^{(n)}$  is, up to 2, the sum of their respective height in  $|\mathbf{t}_w^{(n)\circ}|$  and  $|\mathbf{t}_{w'}^{(n)\circ}|$ . Let us condition additionally on  $w$  and  $w'$ . Knowing that  $\mathbf{u}$  is in  $|\mathbf{t}_w^{(n)\circ}|$ ,  $\mathbf{u}$  is uniform in this tree. By the characterization of the law of  $\mathbf{t}_w^{(n)\circ}$  conditionally to its size  $a_n := |\mathbf{t}_w^{(n)\circ}|$ , and (7.1), we get

$$\left(\frac{3}{2} \log a_n\right)^{-1/2} \left(\mathbf{u} - \frac{3}{2} \log a_n\right) \xrightarrow{(d)} N_1; \tag{7.7}$$

Since conditionally on  $I(r)$ , for any  $n$  large enough  $a_n \in [|I_w|n/2, 2|I_w|n]$ , then

$$\left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(\mathbf{w} - \frac{3}{2} \log n\right) \xrightarrow{(d)} N_1, \tag{7.8}$$

and the same hold for  $\mathbf{v}$ , the limiting variable being noted  $N_2$ . Since conditionally to their size,  $\mathbf{t}_w^{(n)\circ}$  and  $\mathbf{t}_{w'}^{(n)\circ}$  are independent, the distance between  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  is conditionally to these sizes, independent. Since this independence holds whatever are  $w$  and  $w'$ , and since the limit of  $\left(\left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(\mathbf{u} - \frac{3}{2} \log n\right), \left(\frac{3}{2} \log n\right)^{-1/2} \left(\mathbf{v} - \frac{3}{2} \log n\right)\right)$  is  $(N_1, N_2)$  with  $N_1, N_2$  i.i.d. Gaussian  $N(0, 1)$ , whatever are  $w \neq w'$  fixed in  $\mathbf{t}^{(r)}$ , (i) holds true.

Property (ii) follows a simple symmetry argument. □

We give now some indications about the limiting behavior of triangulations under the law  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ .

### 7.2 Some features of large maps under $\mathbb{Q}^\Delta$

Some asymptotic results allowing to understand the behavior of large maps under  $\mathbb{Q}^\Delta$  can also be proved using the fragmentations processes. In particular using that the size of a subtree rooted on a given node  $u$  evolves (asymptotically) linearly in time (this is due, as said before, to the rate of insertions of nodes in  $T_u$  which is constant and given by  $|I_u|$ ), the same results holds true for a fixed face in the triangulation. Moreover, the length  $|I_u|$  is the product of  $|u|$  marginals of Poisson-Dirichlet random variables. Hence  $N_n(f)$  the number of internal nodes present in the canonical face  $f$  at time  $n$  behaves as follows:  $n^{-1}N_n(f)$  converges a.s. toward a random variable  $N_f$  almost surely in  $(0, 1)$ . This fragmentation point of view allows to prove much more : the a.s. joint convergence of  $n^{-1}(N_{f_1}, \dots, N_{f_k})$  for the (disjoint or not) faces  $f_i$  of  $m_j$  toward a limiting random variable taking its value in  $\mathbb{R}^k$ , and whose limiting distribution may be described in terms of product of Poisson-Dirichlet random variables.

The degree of a node may also be followed when  $n$  goes to  $+\infty$ . If  $v(j)$  denotes the  $j$ th node inserted in  $m_n$ , one may prove that  $\deg(v(j))$  goes to infinity with  $n$ . The degree of a node follows indeed a simple Markov chain since it increases if and only if a node is inserted in a face adjacent to  $v(j)$  and this occurs with a probability equals to  $\deg(v(j))$  divided by the current number of internal faces. Denoting by  $D_j^n$  the degree of  $\deg(v(j))$  at time  $n$  (recall that  $D_j^j = 3$ ), under  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$ , we have that for  $n > j$  and  $k \geq 3$ , conditionally on  $D_j^n$

$$D_j^{n+1} = D_j^n + B\left(D_j^n / (2n - 1)\right) \tag{7.9}$$

where we have denoted by  $B(p)$  a Bernoulli random variable with parameter  $p$  (in other words  $\mathbb{Q}_{2(n+1)}^\Delta(\deg(v(j)) = k + 1) = \frac{k}{2n-1}\mathbb{Q}_{2n}^\Delta(\deg(v(j)) = k) + \frac{2n-k-2}{2n-1}\mathbb{Q}_{2n}^\Delta(\deg(v(j)) = k + 1)$ ).

This chain has the same dynamics as the following simple model of urn. Consider an urn with 3 white balls and  $2j - 2$  black balls at time 0. At each step pick a ball and replace it in the urn. If the picked ball is white then add one white ball and one black ball, and if it is black, add two black balls. The number  $N_j^t$  of white balls at time  $t$  has the same law as  $D_j^{j+t}$  (the number of black balls behaves as the number of finite faces of  $m_{j+t}$  not incident to  $v(j)$ ). This model of urn has been studied in Flajolet & al. [FDP06, p.94] (to use their results, take  $a_0 = 3$ ,  $b_0 = 2j - 2$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\alpha = 1$  and replace  $n$  by  $n - j$ ). For example, we derive easily from their results the following proposition.

**Proposition 4.35.** *Let  $m_n$  be a map  $\mathbb{Q}_{2n}^\Delta$  distributed and  $v(j)$  the  $j$ -th node inserted, for  $n > j$  and  $1 \leq k \leq n - j$ , we get*

$$\mathbb{Q}_{2n}^\Delta(\text{deg}_{m_n}(v(j)) = k + 3) = \frac{\Gamma(n - j + 1)\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \binom{k + 2}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n - \frac{i}{2} - 2}{n - j}$$

where  $\binom{a}{b} = a(a - 1) \dots (a - b + 1)/b!$ .

This model of urns has also been studied by Janson [Jan06]; Theorem 1.3 in [Jan06] gives the asymptotic behavior of urns under these dynamics, depending on the initial conditions. The discussion given in Section 3.1 of [Jan06] shows that the asymptotic behavior of  $D_j(n)$  is quite difficult to describe. One may use (7.9) to see that  $\mathbb{E}(D_j^{n+1} | D_j^n) = D_j^n(1 + \frac{1}{2n-1})$  to show that  $(M_j^n)_{n \geq j}$  defined by

$$M_j^n = D_j^n / u_n$$

is a  $\mathcal{F}_n$  martingale, where  $\mathcal{F}_n = \sigma(D_j^k, j \leq k \leq n)$  for any sequence  $u_n$  such that  $u_{n+1} = u_n(2n)/(2n - 1)$ . This allows to see that

$$\mathbb{E}(D_j^n) = \mathbb{E}(D_j^j) \prod_{k=j}^{n-1} (2k)/(2k - 1) = 3 \prod_{k=j}^{n-1} (2k)/(2k - 1).$$

This indicates that for a fixed  $j$  the expectation  $\mathbb{E}(D_j^n)$  grows as  $\sqrt{n}$ . Some other regimes may be obtained: for  $t \in (0, 1)$ ,  $\mathbb{E}(D_{nt}^n) \rightarrow 3(1 - t)^{-1}$  when  $n$  goes to  $+\infty$ . (We recall that any triangulation with  $2n$  faces has  $3n$  edges and  $n + 2$  nodes; hence the mean degree of a node in  $6n/(n + 2)$  in any triangulation).

## 8 Two families of increasing quadrangulations

We present here two families of quadrangulations. The first one, quite natural, resists to our investigations. The second one, that may appear to be quite unnatural, is in fact very analogous to stack-triangulations, and is studied with the same tools.

### 8.1 A first model of growing quadrangulations

This is the simplest model, and we present it rapidly: starting from a rooted square, choose a finite face  $f = (A, B, C, D)$  and a diagonal  $AC$  or  $BD$ . Then add inside  $f$ , a node  $x$  and the two edges  $Ax$  and  $xC$  or the two edges  $Bx$  and  $xD$ . Each finite face inherits a root from the construction in the following way : assume that  $f$  is rooted in  $(A, B)$ , if we add the edges  $Ax$  and  $xC$ , then the new faces  $(A, B, C, x)$  and  $(A, x, C, B)$

are rooted respectively in  $(B, C)$  and  $(x, C)$  otherwise the new faces  $(A, B, x, D)$  and  $(x, B, C, D)$  are rooted respectively in  $(A, B)$  and  $(x, B)$ . It is easy to check that the root of each face is well defined and does not depend of the order of insertions of the edges. The set  $\square'_k$  is then the set of quadrangulations with  $k$  bounded faces reached by this procedure starting with the rooted square (formally define a growing procedure  $\Phi_4$ , similar to  $\Phi$  of Section 2.2, using  $\square'_k \bullet = \{(m, f, \alpha) \mid m \in \square'_k, f \in F^\circ(m), \alpha \in \{0, 1\}\}$  the rooted quadrangulations from  $\square'_k$  with a distinguished finite face marked with 0 or 1, and add in  $f = (A, B, C, D)$  the pair of edges  $\{Ax, xC\}$  if  $\alpha = 0$  and  $\{Bx, xD\}$  otherwise).

There is again some bijections between  $\square'_k$  and some set of trees, but we were unable to define on the corresponding trees a device allowing to study the distance in the maps (under the uniform distribution, as well as under the distribution induced by the construction when both  $f$  and  $\alpha$  are iteratively uniformly chosen). We conjecture that they behave asymptotically in terms of metric spaces as triangulations under  $\mathbb{Q}_{2k}^\Delta$  and  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$  up to some normalizing constant.

We describe below a bijection between  $\square'_k$  and the set of trees having no nodes having only one child. There exists also a bijection with Schröder trees (trees where the nodes have 0,1 or 2 children) with  $k$  internal nodes.

**Proposition 4.36.** *For any  $k \geq 2$ , there exists a bijection  $\Psi_k$  between  $\square'_k$  and the set of trees having  $k$  leaves, no nodes of outdegree 1 and with a root marked 0 or 1.*

For  $k = 1$ ,  $\square'_k = \{s\}$  the rooted square and in this case we may set  $\Psi(s) = \{\emptyset\}$ , the tree reduced to a (non marked) leaf.

*Proof.* Assume that  $k \geq 2$ . Let  $(A, B, C, D)$  denotes the exterior face of every map  $m \in \square'_k$ . Split  $\square'_k$  into two subsets  $\square'_{k,0}$  and  $\square'_{k,1}$ , where  $\square'_{k,0}$  (resp.  $\square'_{k,1}$ ) is the set of maps  $m \in \square'_k$  which contains an internal node  $x$  and the two edges  $Ax$  and  $xC$  (resp.  $Bx$  and  $xD$ ). Notice that  $m$  cannot contain at the same time an internal node  $x$  and  $Ax$  and  $xB$ . It is easy to see that the rotation of  $\pi/2$  is a bijection between  $\square'_{k,0}$  and  $\square'_{k,1}$ . We then focus on  $\square'_{k,0}$  and explain the bijection between  $\square'_{k,0}$  and the set of trees having no nodes of outdegree 1 and  $k$  leaves. Let  $x_1, \dots, x_j$  be the  $j \geq 1$  internal points of  $m$ , adjacent to  $A$  and  $C$ . These points (if properly labeled) define  $j+1$  submaps  $m_1, \dots, m_{i+j}$  of  $m$  with border  $(A, x_i, C, x_{i+1})$  for  $i = 0$  to  $j$  where  $B = x_0$  and  $D = x_{j+1}$ . We then build  $t = \Psi_k(m)$  by sending  $m$  onto the root of  $t$ , and  $m_i$  to the  $i$ th child of the root of  $t$ . Each of the submaps  $m_i$  can also be decomposed in the same way (the root of  $m_i$  induces an ordering on its internal vertices which permits to repeat the construction) except that by maximality of the set  $\{x_1, \dots, x_j\}$ , the face  $(A, x_i, C, x_{i+1})$  is either empty or contains an internal node  $y$  adjacent to  $x_i$  and  $x_{i+1}$ . The coloring of the nodes (except the root) is then useless.  $\square$

## 8.2 A family of stack-quadrangulations

The construction presented here is very similar to that of stack-triangulations; some details will be skipped when the analogy will be clear enough. The difference with the model of quadrangulations of Section 8.1 is that given a face  $f = (A, B, C, D)$ , only a suitable choice of pair of edges (either  $\{Ax, xC\}$  or  $\{Bx, xD\}$ ) will be allowed. This choice amounts to forbidding “parallel” pair of edges of the type  $(Ax, xC)$  and  $(Ax', x'C)$ .

Formally, set first  $\square_1 = \{s\}$  where  $s$  is the unique rooted square. The unique element of  $\square_2$  (say  $s_2$ ) is obtained as follows. Label by  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  the vertices of  $s$ , such that  $(E_0, E_1)$  is the root of  $s$ . To get  $s_2$ , draw  $s$  in the plane, add in the bounded face of  $s$  a node  $x$  and the two edges  $E_0x$  and  $xE_2$  in this face. We define now  $\square_k$  recursively asking to the maps  $m$  with border  $(A, B, C, D)$  and rooted in  $(A, B)$  to have the following property of decomposability. If  $k \geq 2$  there exists a unique node  $x$  in the map  $m$ , such that  $Ax$  and  $xC$  are edges of  $m$ . Moreover the submaps  $m_1$  and  $m_2$  of  $m$  with respective borders  $(A, x, C, D)$  (rerooted in  $(x, C)$ ) and  $(A, B, C, x)$  (rerooted in  $(B, C)$ ) belong both to the sets  $\cup_{j < k} \square_j$ , more precisely  $(m_1, m_2) \in \cup_{j=1}^{k-1} \square_j \times \square_{k-j}$  (see an illustration on Figure 4.11).

This rerooting operation corresponds to distinguish a diagonal in each face (once for all) on which the following insertion inside this face, if any, will take place.

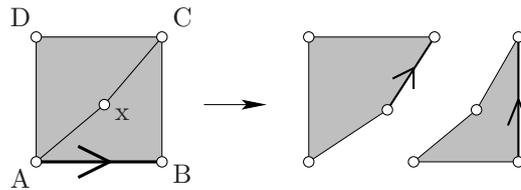


Figure 4.11: The decomposition is well defined thanks to the uniqueness of a node  $x$  adjacent to both  $A$  and  $C$ .

Any map belonging to  $\square_k$  is a rooted quadrangulation having  $k$  internal faces. There exists again a canonical drawing of these maps, where the border  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  (rooted in  $(E_0, E_1)$ ) of the quadrangulations is sent on a fixed square of the plane, and where, when it exists, the unique node  $x$  adjacent to both  $E_0$  and  $E_2$  is sent of the center of mass of  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$ , the construction being continued recursively in the submaps  $m_1$  and  $m_2$  (the edges are straight lines).

There exists also a sequential construction of this model, more suitable to define the distribution of interest.

### 8.2.1 Sequential construction of $\square_k$

We introduce a labeling of the nodes of  $\square_k$  by some integers. The idea here is double. This labeling will distinguish the right diagonal where the (only allowed) pair of edges will be inserted, and also will be used to count the number of histories leading to a given map. A labeled map may be viewed as a pair  $(m, l)$  where  $m$  is an unlabeled map and  $l$  an application from  $V(m)$  onto the set of integers.

We then consider  $\square_k^\ell$  the set of label quadrangulations having  $k$  internal faces, built as follows. First  $\square_1^\ell$  contains the unique labeled rooted map  $(s, l)$  with vertices  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  rooted in  $(E_0, E_1)$  and labeled by

$$l(E_0) = 4, l(E_1) = 3, l(E_2) = 2, l(E_3) = 1.$$

Assume now that  $\square_k^\ell$  has been defined for some  $k \geq 1$ , and is a set of quadrangulations with  $k$  internal faces (and thus  $k + 3$  vertices), where the vertices are labeled by different integers from  $\{1, \dots, k + 3\}$ . To construct  $\square_{k+1}^\ell$  from  $\square_k^\ell$  we consider an application  $\Phi_4^\ell$  from  $\square_k^{\ell, \bullet} = \{(m, l), f \mid m \in \square_k^\ell, f \in F^\circ(m)\}$  taking its values on the set of labeled quadrangulations with  $k + 1$  finite faces. The map  $\Phi_4^\ell((m, l), f)$  is the map obtained by the following procedure:

- draw  $m$  in the plane;

- denote by  $(A, B, C, D)$  the vertices of  $f$ , such that  $A$  has the largest label (and thus  $C$  is at the opposite diagonal of  $A$  in  $f$ ),
- add a point  $x$  labeled  $k + 4$  in  $f$  and the two edges  $Ax$  and  $xC$  in  $f$ . The obtained labeled map is  $\Phi_4^\ell((m, l), f)$ .

We denote by  $\square_{k+1}^\ell$  the set  $\Phi_4^\ell(\square_k^\ell, \bullet)$ .

For  $(m, l) \in \square_k^\ell$ , we call  $\pi_k$  (or more simply  $\pi$ ) the function defined by  $\pi_k((m, l)) = m$ ; this is simply the application that erases the labels of a labeled map. We now show that  $\pi(\square_k^\ell) \subset \square_k$ , in other words, taking into account that we have no doubt on the size of the maps, or on the fact that it is a quadrangulation, we just have to check that the no parallel pairs of edges have been constructed. Since the vertex of  $f$  whose label is the greatest (among the four vertices of  $f$ ) is the most recent vertex inserted in the map (among the four vertices of  $f$ ), it is clear that this cannot produce parallel pairs of edges.

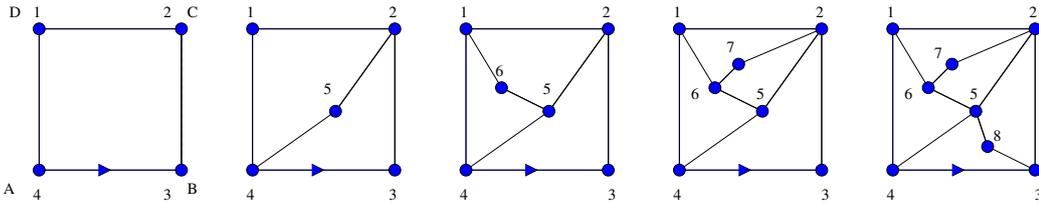


Figure 4.12: A sequence of quadrangulations obtained by successive insertions of pair of edges.

Consider a labeled map  $(m_k, l_k) \in \square_k^\ell$  for some  $k \geq 2$ . There exists a unique map  $(m_{k-1}, l_{k-1}) \in \square_{k-1}^\ell$  such that  $(m_k, l_k) = \Phi_4^\ell(m_{k-1}, l_{k-1})$ . It is obtained from  $(m_k, l_k)$  by the suppression of the node with largest label together with the two edges that are incident to this node. Hence, each map  $(m_k, l_k)$  characterizes uniquely a “legal” history of  $m_k = \pi(m_k, l_k)$ , meaning that for  $i$ ,  $m_{i+1}$  is obtained from  $m_i$  by the insertion of two edges, and for any  $i$ ,  $m_i$  is in  $\square_i$ . From now on, we will make a misuse of language and confound the histories of a stack-quadrangulation  $m_k \in \square_k$  and  $\pi^{-1}(m_k)$ .

We denote by  $\mathbb{U}_k^\square$  the uniform distribution on  $\square_k$  and as done for triangulations in Section 2.2.1,  $\mathbb{Q}_k^\square$  denotes the distribution of  $\pi(M_k, l_k)$  when  $M_{i+1} = \Phi_4^\ell((M_i, l_i), F_i)$ , where  $M_1$  is the unique element of  $\square_1$  and where  $F_i$  is chosen uniformly among the internal faces of  $M_i$  (all the  $F_i$  are independent). The support of  $\mathbb{Q}_k^\square$  is the set  $\square_k$ , and one may check that  $\mathbb{Q}_k^\square \neq \mathbb{U}_k^\square$  for  $k \geq 4$ .

### 8.3 The function $\Lambda'$

As in Section 2.3.2, we define a function  $\Lambda'$  to express the distance between any pair of nodes  $u$  and  $v$  in a stack-quadrangulation  $m$  in terms of a tree associated bijectively. Let

$$W_{1,2} = \{12, 21\}^* \cdot \{11, 22\} \cdot \{1, 2\},$$

be the set of words on  $\Sigma_2 = \{1, 2\}$ , beginning with any number of occurrences of 12 or 21, followed by 11 or 22, then by a 1 or a 2. Notice that all the words of  $W_{1,2}$  have an odd length. For example  $u = 122121112 \in W_{1,2}$ .

Let  $u = u_1 \dots u_k$  be a word on the alphabet  $\Sigma_2$ . Define  $\tau_1(u) := 0$  and for  $j \geq 2$ ,

$$\tau_j(u) := \inf\{i \mid i \geq \tau_{j-1}(u) \text{ such that } u_{1+\tau_{j-1}(u)} \dots u_i \in W_{1,2}\}. \tag{8.1}$$

This amounts to decomposing  $u$  into subwords belonging to  $W_{1,2}$ . We denote by  $\tilde{\Lambda}'(u) = \max\{i \mid \tau_i(u) \leq |u|\}$ , then  $u = u_1 \dots u_{\tilde{\Lambda}'(u)} \tilde{u}$ , where  $\tilde{u} \notin W_{1,2}$ . Lastly we define  $\Lambda'(u)$

as

$$\Lambda'(u) = \tilde{\Lambda}'(u) + \begin{cases} 0 & \text{if } |\tilde{u}| \text{ is even and } \tilde{u} \text{ does not end with } 11 \text{ or } 22 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Further, for two words  $u = wa_1 \dots a_k$  and  $v = wb_1 \dots b_l$  (with  $a_1 \neq b_1$ ), set as in the triangulation case  $\Lambda'(u, v) = \Lambda'(a_1 \dots a_k) + \Lambda'(b_1 \dots b_l)$ .

We now give a proposition for stack-quadrangulations similar to Proposition 4.5.

**Proposition 4.37.** *For any  $K \geq 1$ , there exists a bijection*

$$\begin{aligned} \Psi_K^\square : \square_K &\longrightarrow \mathcal{T}_{2K-1}^{\text{bin}} \\ m &\longmapsto t := \Psi_K^\square(m) \end{aligned}$$

such that :

- (a) each internal node  $u$  of  $m$  corresponds bijectively to an internal node  $u'$  of  $t$ .
- (b) Each leaf of  $t$  corresponds bijectively to a finite quadrangular face of  $m$ .
- (c) For any  $u$  internal node of  $m$ ,  $\Lambda'(u') = d_m(E_0, u)$ .
- (d) For any  $u$  and  $v$  internal nodes of  $m$

$$|d_m(u, v) - \Lambda'(u', v')| \leq 4. \quad (8.2)$$

- (e) Let  $u$  be an internal node of  $m$ . We have

$$\deg_m(u) = 2 + \#\{v' \in t^\circ \mid v' = u'w', |w'| \geq 2, w' \in \{12, 21\}^*\}.$$

The existence of a bijection between  $\square_K$  and  $\mathcal{T}_{2K-1}^{\text{bin}}$  comes from the recursive decomposition of a stack-quadrangulation along the first pair of edges inserted (which can be determined at any time since there is a unique node  $x$  adjacent to both  $A$  and  $C$  in any  $m \in \square_K$ , for  $K \geq 2$ ).

*Proof.* The proof of this Proposition is very similar to that of Proposition 4.6. We only sketch the main lines. We propose a bijection that does not follow the decomposition provided in Figure 4.11, but which is illustrated in Figure 4.13.

First, the maps in  $\square_K$  own also a canonical drawing as said above, hence we can consider the set  $\mathcal{F}_K^\square$  of canonical faces belonging to at least one of the canonical drawings of a map of  $\square_K$  (which is the analogue of the set  $\mathcal{F}_K$  introduced in Section 2.3.2). We keep the convention that  $f = (A, B, C, D)$  refers to the canonical face  $f$  admitting  $(A, B)$  as distinguished edge.

We construct a bijection  $\psi^\square$  which associates a word of  $\Sigma_2^*$  with each canonical face of a stack-quadrangulation. There is a unique canonical face  $(B, C, D, A)$  in  $\mathcal{F}_2^\square$ , its image by  $\psi^\square$  is set to be the empty word on  $\Sigma_2$ . We proceed then by induction: assume that  $\psi^\square$  is well defined on  $\mathcal{F}_j^\square$  for  $j \leq K$  and let  $f = (A, B, C, D)$  be a canonical face of  $\mathcal{F}_K^\square$ . The insertion of a node  $x$  and of the two corresponding edges in the face  $f$  (in a quadrangulation having  $f$  as a face) gives birth to two “new” canonical faces which are set to be  $(B, x, D, A)$  and  $(B, x, D, C)$ . If the image of  $f$  by  $\psi^\square$  is  $u$ , we associate respectively to these two new faces the nodes  $u1$  and  $u2$ . Notice that  $u1$  (resp.  $u2$ ) corresponds to the face situated on the left (resp. on the right) of the distinguished edge  $(B, x)$  (see Figure 4.13).

With slight modifications in the proof of Proposition 4.5, we see that the bijection  $\psi^\square$  induces a bijection  $\psi_K^\square$  between the set  $H_{\square}(K)$  of histories of maps of  $\square_K$  and  $H_{\mathcal{T}}(K)$  the set of histories of trees of  $\mathcal{T}_{2K-1}^{\text{bin}}$  (for any  $K \geq 1$ ).

We associate now with any stack-quadrangulation a binary tree as represented on Figure 4.13. Formally let  $m_K$  be a stack-quadrangulation and  $h_K$  be one of its history, we define  $t_K$  the tree of  $\mathcal{T}_{2K-1}^{\text{bin}}$  whose history is  $\psi_K^\square$ . The tree  $t_K$  is well defined thanks to the properties of consistence and robustness of  $\psi_K^\square$ , details are given for the case of stack-triangulations in Lemma 4.6. We finally set  $\Psi_K^\square(m_K) := t_K$ .

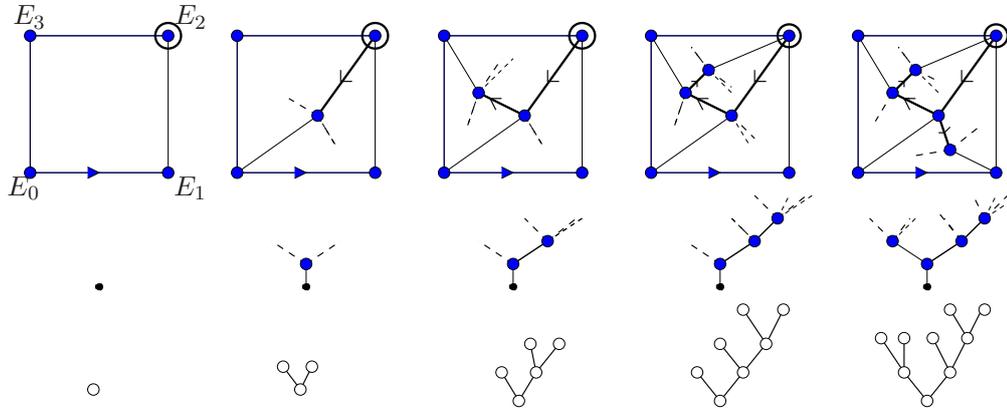


Figure 4.13: A sequence of quadrangulations obtained by successive insertions of pair of edges.

To prove properties (c), d and (e) we introduce a notion of type of faces in a stack-quadrangulation (or type of a node in the corresponding tree) as in the proof of Proposition 4.6. For any face  $f = (A, B, C, D)$  in  $m$  such that  $O(f) = (A, B)$ , we set:

$$\text{type}(A, B, C, D) := (d_m(E_0, A), d_m(E_0, B), d_m(E_0, C), d_m(E_0, D))$$

the 4-tuple of the distance of  $A, B, C$  and  $D$  to the root vertex of  $m$ . It is well known that in a quadrangulation, the type of any face is  $(i, i + 1, i, i + 1)$  or  $(i, i + 1, i + 2, i + 1)$ , for some  $i$ , or a circular permutation of this.

As the types of the faces arising in the construction are not modified by the insertions of new edges, we mark any node of  $t = \Psi^\square(m)$  with the type of the corresponding face. It is then easy to check that for  $u'$  an internal node of  $t$  with  $\text{type}(u') = (a, b, c, d)$ , we have  $d_m(u, E_0) = 1 + b \wedge d$  and

$$\begin{cases} \text{type}(u'1) = ( b, 1 + b \wedge d, d, a ), \\ \text{type}(u'2) = ( b, 1 + b \wedge d, d, c ), \end{cases} \tag{8.3}$$

Property (c) follows directly from (8.3) using the fact that  $\text{type}(\emptyset) = (1, 2, 1, 0)$ . Properties (d) and (e) are deduced directly by the same arguments as for triangulations.  $\square$

### 8.3.1 Asymptotic behavior of the quadrangulations

First, we state a Lemma analogous to Lemma 4.24:

**Lemma 4.38.** *Let  $(X_i)_{i \geq 1}$  be a sequence of i.i.d. random variables taking their values in  $\Sigma_2 = \{1, 2\}$  and let  $W_n$  be the word  $X_1 \dots X_n$ .*

(i)  $n^{-1} \Lambda'(W_n) \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Lambda'_\square$  where

$$\Lambda'_\square := 1/5 \tag{8.4}$$

(ii)  $\mathbb{P}(|\Lambda'(W_n) - n\Lambda'_\square| \geq n^{1/2+u}) \rightarrow 0$  for any  $u > 0$ .

*Proof.* It is proved similarly to Lemma 4.24 except that here if  $(X_i)_{i \geq 1}$  is a sequence of i.i.d. r.v. uniformly distributed in  $\{1, 2\}$  and if  $W = X_1 X_2 \dots$  then for  $N \geq 3$  and  $k \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}(\tau_2(W) = 2k + 1) = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2, \dots, X_{2k-3} \neq X_{2k-2}, X_{2k-1} = X_{2k}) = \frac{1}{2^k},$$

which means that  $\tau_2(W)$  (and  $\tau_i(W) - \tau_{i-1}(W)$  as well) has the same law as  $1 + 2\text{Geometric}(1/2)$  whose mean is 5.  $\square$

We are now in position to state the main theorem of this part. We need to examine first the weak limit of binary trees. Denote by  $P_{2n+1}^{\text{bin}}$  the uniform distribution on the set of binary trees with  $2n+1$  nodes. This time  $P_\infty^{\text{bin}}$  is the distribution of a random infinite tree, build around an infinite line of descent  $L_\infty^{\text{bin}} = (X(j), j \geq 0)$ , where  $X(j) = X_1 \dots X_j$  [and  $(X_i)$  is a sequence of i.i.d. r.v. uniformly distributed on  $\Sigma_2 = \{1, 2\}$ ] on the neighbors of which are grafted critical GW trees with offspring distribution  $\nu_{\text{bin}} = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2)$ . We sum up in the following Proposition the results concerning the convergence of trees under  $P_{2n+1}^{\text{bin}}$ .

**Proposition 4.39.** (i) When  $n \rightarrow +\infty$ ,  $P_{2n+1}^{\text{bin}}$  converges weakly to  $P_\infty^{\text{bin}}$  for the topology of local convergence.

(ii) The following convergence holds for the GH topology. Under  $P_{2n+1}^{\text{bin}}$ ,

$$\left( T, \frac{d_T}{\sqrt{2n}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (T_{2e}, d_{2e}).$$

The first point very similar to Proposition 4.13 is due to Gillet [Gil03], the second point to Aldous [Ald91].

The results concerning triangulations can be extended to the present model of quadrangulations. In particular, a construction of an infinite map  $m_\infty^\square$  similar to  $m_\infty$  can be done. Following the lines of the triangulation case, one may prove the following result:

**Theorem 4.40.** (i) Under  $\mathbb{U}_n^\square$ ,  $(m_n)$  converges in distribution to  $m_\infty^\square$  for the topology of local convergence.

(ii) Under  $\mathbb{U}_n^\square$ ,

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{\Lambda_\square \sqrt{2n}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (T_{2e}, d_{2e}),$$

for the Gromov-Hausdorff topology on compact metric spaces.

Now, the asymptotic behavior of maps under  $\mathbb{Q}_k^\square$  is studied again thanks to trees under  $\mathbb{Q}_{2K-1}^{\text{bin}} := \mathbb{Q}_K^\square \circ (\Psi_K^\square)^{-1}$  the corresponding distribution on trees. This distribution on  $\mathcal{T}_{2K-1}^{\text{bin}}$  is famous in the literature since it corresponds to the distribution of binary search trees. Indeed the insertion in the map  $m$  corresponds to an uniform choice of a leaf in the tree  $\Psi^\square(m)$  and its transformation into an internal node having two children. Again, using the same tools as those used to treat the asymptotic behavior of trees under  $\mathbb{Q}^{\text{ter}}$  (in particular, here the fragmentation is binary, and  $Y^u \stackrel{d}{=} (U, 1 - U)$  where  $U$  is uniform in  $[0, 1]$ ), we get the following proposition.

We keep in the following Proposition the notation of Proposition 4.31 when possible.

**Proposition 4.41.** Let  $\mathbf{t}$  be a random tree under the distribution  $\mathbb{Q}_{2K+1}^{\text{bin}}$ .

1) We have

$$(4 \log n)^{-1/2} (|\mathbf{u}| - 4 \log n, |\mathbf{v}| - 4 \log n) \xrightarrow[n]{(d)} (N_1, N_2).$$

2) Conditionally to  $(|\mathbf{u}^*|, |\mathbf{v}^*|)$  (their lengths)  $\mathbf{u}^*$  and  $\mathbf{v}^*$  are independent random words composed with  $|\mathbf{u}^*|$  and  $|\mathbf{v}^*|$  independent letters uniformly distributed in  $\Sigma_2 = \{1, 2\}$ .

3) For any  $a_n \rightarrow +\infty$ , we have  $|\mathbf{w}|/a_n \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 0$ .

The interested reader may find in Mahmoud & Neininger [MN03, Theorem 2] a different proof of the first assertion, the second one, once again being a consequence of the symmetries of this class of random trees.

Similarly to Theorem 4.32, we obtain the following theorem.

**Theorem 4.42.** Let  $M_n$  be a stack-quadrangulation under  $\mathbb{Q}_{2n}^{\square}$ . Let  $k \in \mathbb{N}$  and  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  be  $k$  nodes of  $M_n$  chosen independently and uniformly among the internal nodes of  $M_n$ . We have

$$\left( \frac{D_{M_n}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{4\Lambda_{\square}' \log n} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2} \xrightarrow[n]{\text{proba.}} (\mathbf{1}_{i \neq j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}^2}.$$

## 9 Appendix

### 9.1 Proof of the Theorems of Section 5

The aim of this section is to prove Theorem 4.26. Our study of the distance in a stack-triangulation  $m_n$  passes via the study of the function  $\Lambda$  on the tree  $T = \Psi_n^{\Delta}(m_n)$ . Let  $w(r)$  be the  $r$ th internal node of  $T$  according to the LO ( $w(0)$  is the root), and  $u(r)$  be the  $r$ th internal node of  $m$  (the image of  $w(r)$  as explained in Proposition 4.5). For any  $r$  and  $s$ ,

$$|d_m(u(r), u(s)) - \Lambda(w(r), w(s))| \leq 4. \tag{9.1}$$

**Lemme 4.43.** Under  $\mathbb{U}_{2n}^{\Delta}$ , the family  $\left( \left( \frac{d_{m_n}(ns, nt)}{\Lambda_{\Delta} \sqrt{3n/2}} \right)_{(s,t) \in [0,1]^2} \right)_n$  is tight on  $C[0, 1]^2$ .

*Proof.* We claim first that under  $\mathbb{U}_{3n+1}^{\text{ter}}$ , the family  $\left( n^{-1/2} d_{T^{\circ}}(ns, nt) \right)_n$  is tight in  $C[0, 1]^2$ , where  $d_{T^{\circ}}(k, j) = d_{T^{\circ}}(w(k), w(j))$  is the (re-parametrization of the) restriction of the distance in  $T$  on its set of internal nodes, and where  $d_{T^{\circ}}$  is smoothly interpolated as explained below Theorem 4.25. Indeed, let  $(H^{\circ}(k))_{k=0, \dots, n-1}$  where  $H^{\circ}(k) = |w(k)|$  be the height process of the internal nodes of  $T$  (interpolated between integer points). In Marckert & Mokkadem [MM03, Corollary 5], the process given the successive height of the nodes of a fixed degree  $d$  (according to the LO) in a Galton-Watson tree conditioned by the size is studied, and is shown to converge to the Brownian excursion, under a

suitable rescaling. In a ternary tree, the process giving the successive height of the nodes of degree 3 coincides with  $H^\circ$ . Using [MM03], one check easily that

$$\left(\frac{H^\circ(nt)}{\sqrt{3n/2}}\right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n]{(d)} (2e_t)_{t \in [0,1]}. \tag{9.2}$$

An alternative proof pointed out by a referee raises on the following claim: if  $T$  is a GW tree under  $P^{\text{ter}}$  (resp.  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$ ), then  $T^\circ$  is also a Galton-Watson tree with offspring distribution  $\mu(0) = 8/27, \mu(1) = 12/27, \mu(2) = 6/27, \mu(3) = 1/27$  (resp. conditioned to have  $n$  nodes); the mean of the offspring distribution is 1, and its variance  $2/3$  leading to (9.2) readily. A formal proof of this claim is a bit long, but the idea is simple: a node in  $T^\circ$  has degree  $a$  if the corresponding node in  $T$  has  $a$  children having some children, and  $3 - a$  children who have no child.

Using that for  $i \leq j$ ,

$$\left|d_{T^\circ}(w(i), w(j)) - (H^\circ(i) + H^\circ(j) - 2 \min_{k \in \{i, i+1, \dots, j\}} H^\circ(k))\right| \leq 2$$

we get that

$$\left(\frac{d_{T^\circ}(ns, nt)}{\sqrt{3n/2}}\right)_{s, t \in [0,1]} \xrightarrow[n]{(d)} (d_{2e}(s, t))_{s, t \in [0,1]}$$

where the convergence holds in  $C[0, 1]^2$ . This is just a consequence of the continuity of the application  $f \mapsto [(s, t) \rightarrow f(s) + f(t) - 2 \min_{u \in [s, t]} f(u)]$  from  $C[0, 1]$  onto  $C[0, 1]^2$ .

We deduce from this that the sequence  $\left(\left(\frac{d_{T^\circ}(ns, nt)}{\sqrt{3n/2}}\right)_{s, t \in [0,1]}\right)_n$  is tight and by (9.1) and the trivial bound  $\Lambda(u, v) \leq d_{T^\circ}(u, v)$  for any  $u$  and  $v \in T^\circ$ ,

$$\frac{d_{m_n}(ns, nt)}{\sqrt{3n/2}} \leq \frac{d_{T^\circ}(ns, nt)}{\sqrt{3n/2}} + 4n^{-1/2}$$

and thus the Lemma holds true.  $\square$ .

The convergence of the finite dimensional distributions in Theorem 4.26 is a consequence of the following stronger result.

**Proposition 4.44.** *Let  $0 \leq s < t \leq 1$ . When  $n$  goes to  $+\infty$ , under  $\mathbb{U}_{3n+1}^\Delta$*

$$\left| \frac{d_{m_n}(\lfloor ns \rfloor, \lfloor nt \rfloor)}{\Lambda_\Delta \sqrt{3n/2}} - \frac{d_{T^\circ}(\lfloor ns \rfloor, \lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{3n/2}} \right| \xrightarrow[n]{\text{proba.}} 0.$$

To prove this Proposition we need to control precisely  $\Lambda(w(\lfloor ns \rfloor), w(\lfloor nt \rfloor))$ ; we will show that this quantity is at the first order, and with a probability close to 1, equal to  $\Lambda_\Delta d_{T^\circ}(ns, nt)$ . This part is largely inspired by the methods developed in a work of the second author [Mar08].

We focus only on the case  $s, t$  fixed in  $(0, 1)$  and  $s < t$  (which is the most difficult case). In the following we write  $ns$  and  $nt$  instead of  $\lfloor ns \rfloor$  and  $\lfloor nt \rfloor$ . Consider  $\check{w}_{ns, nt} = w(ns) \wedge w(nt)$ , and write

$$w(ns) = \check{w}_{ns, nt} l_{ns, nt} \quad \text{and} \quad w(nt) = \check{w}_{ns, nt} r_{ns, nt}, \tag{9.3}$$

where  $l_0 \neq r_0$  (the letters  $l$  and  $r$  refer to “left” and “right”).

For compactness of notation, set

$$\begin{aligned} \text{Dec}(n) &:= (W_1, W_2, W_3, H_1, H_2, H_3, L, R) \\ &:= (\check{w}_{ns,nt}, l_{ns,nt}, r_{ns,nt}, |\check{w}_{ns,nt}|, |l_{ns,nt}|, |r_{ns,nt}|, l_0, r_0), \end{aligned}$$

Dec standing for “decomposition”. Even if not recalled in the statements, these variables are considered as random variables under  $P_{3n+1}^{\text{ter}}$ . Let now  $\widetilde{\text{Dec}}$  be the random variable defined by

$$\widetilde{\text{Dec}}(n) := (\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3, H_1, H_2, H_3, \tilde{L}, \tilde{R})$$

such that, conditionally on  $(H_1, H_2, H_3) = (h_1, h_2, h_3)$ , the random variables  $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3, \tilde{L}, \tilde{R}$  are independent and defined by:

- for each  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\tilde{W}_i$  is a word with  $h_i$  i.i.d. letters, uniformly chosen in  $\{1, 2, 3\}$ ,
- the variable  $(\tilde{L}, \tilde{R})$  is a random variable uniform in  $I_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ .

**Definition 4.45.** Let  $(Y_1, Y_2, \dots)$  and  $(X_1, X_2, \dots)$  be two sequences of r.v. taking their values in a Polish space  $S$ . We say that  $\mathbb{P}_{X_n}/\mathbb{P}_{Y_n} \xrightarrow{\star} 1$  or  $X_n \parallel_{\star} Y_n \rightarrow 1$  if for any  $\varepsilon > 0$  there exists a measurable set  $A_n^\varepsilon$  and a measurable function  $f_n^\varepsilon : A_n^\varepsilon \mapsto \mathbb{R}$  satisfying  $\mathbb{P}_{X_n} = f_n^\varepsilon \mathbb{P}_{Y_n}$  on  $A_n^\varepsilon$ , such that  $\sup_{x \in A_n^\varepsilon} |f_n^\varepsilon(x) - 1| \xrightarrow[n]{} 0$  and such that  $\mathbb{P}_{Y_n}(A_n^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  for  $n$  large enough.

The following lemma is proved in [Mar08, Lemma 16]<sup>1</sup>.

**Lemma 4.46.** Assume that  $X_n \parallel_{\star} Y_n \rightarrow 1$  then:

- If  $Y_n \xrightarrow[n]{(d)} Y$  then  $X_n \xrightarrow[n]{(d)} Y$ .
- Let  $(g_n)$  be a sequence of measurable functions from  $S$  into a Polish space  $S'$ . If  $X_n \parallel_{\star} Y_n \rightarrow 1$  then  $g_n(X_n) \parallel_{\star} g_n(Y_n) \rightarrow 1$

The main step in the proof of Proposition 4.44 is the following Proposition.

**Proposition 4.47.** When  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\text{Dec}(n) \parallel_{\star} \widetilde{\text{Dec}}(n) \rightarrow 1$ .

Assume that this proposition holds true and let us end the proof of Proposition 4.44.

**Proof of Proposition 4.44.** From Proposition 4.47 and Lemma 4.46, we deduce

$$(H_2, H_3, W_2, W_3) \parallel_{\star} (H_2, H_3, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3) \rightarrow 1.$$

Since  $(3n/2)^{-1/2} (H_2, H_3, \Lambda(\tilde{W}_2), \Lambda(\tilde{W}_3))$  converges in distribution to

$$(2\mathbf{e}_s - m_{2\mathbf{e}}(s, t), 2\mathbf{e}_t - m_{2\mathbf{e}}(s, t), \Lambda_\Delta(2\mathbf{e}_s - m_{2\mathbf{e}}(s, t)), \Lambda_\Delta(2\mathbf{e}_t - m_{2\mathbf{e}}(s, t))) \quad (9.4)$$

thanks to (9.2) and Lemma 4.24 (and also Lemma 4.48 below which ensures that  $H_i \in [M^{-1}, M]\sqrt{n}$  with probability arbitrary close to 1, if  $M$  is chosen large enough, leading

<sup>1</sup>In [Mar08, Lemma 16] the function  $g_n$  is assumed to be continuous, but only the measurability is needed

to a legal using of Lemma 4.24). We then deduce by the first assertion of Lemma 4.46 that

$$(3n/2)^{-1/2} (H_2, H_3, \Lambda(W_2), \Lambda(W_3))$$

converges also in distribution to the random variable described in (9.4).

Since  $|d_T((w(ns), w(nt)) - (H_2 + H_3))| \leq 2$  and  $|\Lambda(w(ns), w(ns)) - (\Lambda(\tilde{W}_2) + \Lambda(\tilde{W}_3))| \leq 1$ , we have

$$|\Lambda_\Delta d_T((w(ns), w(nt)) - \Lambda(w(ns), w(ns)))| \leq |\Lambda_\Delta(H_2 + H_3) - (\Lambda(\tilde{W}_2) + \Lambda(\tilde{W}_3))| + cte$$

which implies together with what precedes

$$n^{-1/2} |\Lambda_\Delta d_T(w(ns), w(nt)) - \Lambda(w(ns), w(ns))| \xrightarrow[n]{proba.} 0. \quad \square$$

It only remains to show Proposition 4.47. The absolute continuity  $\mathbb{P}_{Dec(n)} \prec \mathbb{P}_{\widetilde{Dec}(n)}$  comes from the inclusion of the (discrete) support of  $Dec(n)$  in that of  $\widetilde{Dec}(n)$ .

For any word  $w = w_1 \dots w_k$  with letters in  $\{1, 2, 3\}$  define

$$N_1(w) = \sum_{j=1}^k (w_j - 1) \text{ and } N_2(w) = \sum_{j=1}^k (3 - w_j).$$

Seeing  $w$  as a node in a tree,  $N_1(w)$  and  $N_2(w)$  give the number of nodes at distance 1 on the left (resp. on the right) of the branch  $\llbracket \emptyset, w \rrbracket$ . Set

$$A_{n,M} = \{(w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r) \mid h_1, h_2, h_3 \in \sqrt{n}[M^{-1}, M], \\ (w_1, w_2, w_3) \in J_{h_1} \times J_{h_2} \times J_{h_3}, (l, r) \in I_3\},$$

where for any  $h > 0$ ,  $J_h = \left\{ \mathbf{a} \in \Sigma_3^h \mid (N_1(\mathbf{a}), N_2(\mathbf{a})) \in [h - h^{2/3}, h + h^{2/3}]^2 \right\}$ .

**Lemma 4.48.** *For any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $M > 0$  such that for  $n$  large enough*

$$\mathbb{P}_n(\widetilde{Dec}(n) \in A_{n,M}) \geq 1 - \varepsilon.$$

*Proof.* The convergence of the rescaled height process to  $2\mathbf{e}$  (as stated in (9.2)) implies that the vector  $(3n/2)^{-1/2}(H_1, H_2, H_3)$  converges in distribution to  $(m_{2\mathbf{e}}(s, t), 2\mathbf{e}_s - m_{2\mathbf{e}}(s, t), 2\mathbf{e}_t - m_{2\mathbf{e}}(s, t))$ . Since a.s.  $m_{2\mathbf{e}}(s, t) < 2 \min(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)$ , and a.s.  $m_{2\mathbf{e}}(s, t) > 0$  (if  $s, t \notin \{0, 1\}$ ), for any  $\varepsilon > 0$  there exists  $M > 0$  such that

$$\mathbb{P}(\{m_{2\mathbf{e}}(s, t), 2\mathbf{e}_s - m_{2\mathbf{e}}(s, t), 2\mathbf{e}_t - m_{2\mathbf{e}}(s, t)\} \subset (M^{-1}, M)) \geq 1 - \varepsilon.$$

By the Portmanteau theorem, and taking into account the normalisation, for any  $\varepsilon > 0$ ,

$$\liminf P_{3n+1}^{\text{ter}}(H_i \in [M^{-1}, M]\sqrt{n}, i \in \{1, 2, 3\}) \geq 1 - \varepsilon \text{ for } M \text{ large enough.} \quad (9.5)$$

Let  $W[h]$  be a random word with  $h$  i.i.d. letters uniform in  $\Sigma_3$ . For  $h \in \mathbb{N}$ , by symmetry  $N_1(W[h])$  and  $N_2(W[h])$  have the same law, and there exists  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , s.t

$$\mathbb{P}(W[h] \notin J_h) \leq c_1 \exp(-c_2 h^{1/3}).$$

Indeed the number  $x_i$  of letters  $i$  in  $W[h]$  is binomial  $B(h, 1/3)$  distributed, and the Hoeffding inequality leads easily to this result ( $N_1(h) = x_2 + 2x_3$  which is in mean  $h/3 + 2h/3 = h$ ).  $\square$

To prove Proposition 4.47, we now evaluate  $\mathbb{P}(\text{Dec}(n) = x)/\mathbb{P}(\widetilde{\text{Dec}}(n) = x)$  for any  $x \in A_{n,M}$ . The number of ternary trees from  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  satisfying

$$\text{Dec}(n) = (w_1, w_2, w_3, |w_1|, |w_2|, |w_3|, l, r)$$

for some prescribed words  $w_1, w_2, w_3$  and  $(l, r) \in I_3$  is equal to the number of 3-tuples of forests as drawn on Figure 4.14. The first forest  $F_1$  has  $S_1(w_1, w_2, w_3, l, r) = N_1(w_1) + N_1(w_2) + l - 1$  roots and since  $w(ns)$  is the  $ns + 1$ th internal nodes (not counted in  $F_1$ ) and since the branch  $[[\emptyset, w(ns)]]$  contains  $|w_1| + |w_2| + 2$  internal nodes,  $F_1$  has  $n_1(w_1, w_2, w_3, l, r) = ns - |w_1| - |w_2| - 1$  internal nodes (and then  $3n_1 + S_1$  nodes). The second forest  $F_2$  has  $S_2(w_1, w_2, w_3, l, r) = 3 + N_2(w_2) + N_1(w_3) + (r - l - 1)$  roots (the 3 comes from the fact that  $w(ns)$  is an internal node), and  $n_2(w_1, w_2, w_3, l, r) = nt - ns - |w_3| - 1$  internal nodes. Finally the third forest  $F_3$  has  $S_3(w_1, w_2, w_3, l, r) = 3 + N_2(w_3) + N_2(w_1) + 3 - r$  roots and  $n_3(w_1, w_2, w_3, l, r) = n - nt - 1$  internal nodes.

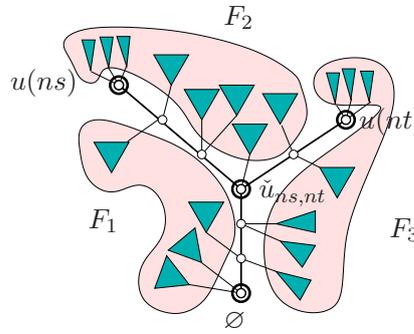


Figure 4.14: On this example  $w_1 = 321, w_2 = 12, w_3 = 2, l = 1, r = 3, S_1 = 4, S_2 = 8, S_3 = 7$ .

Before going further, we recall that under  $P^{\text{ter}}$  all trees in  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  have the same weight  $3^{-n}(2/3)^{2n+1}$  since they have  $n$  internal nodes and  $2n+1$  leaves. Let  $F_k = (T(1), \dots, T(k))$  be a forest composed with  $k$  independent GW trees with distribution  $P^{\text{ter}}$ , and let  $|F_k| = \sum_{i=1}^k |T(i)|$  be the total number of nodes in  $F_k$ . By the rotation/conjugation principle,

$$P^{\text{ter}}(|F_k| = m) = \frac{k}{m} q(m, k)$$

where  $q(m, k) = \mathbb{P}(Z_m = -k)$  where  $Z := (Z_i)_{i \geq 0}$  is a random walk starting from 0, whose increment value are  $-1$  or  $2$  with respective probability  $2/3$  and  $1/3$ .

**Lemme 4.49.** For any words  $w_1, w_2, w_3$  on the alphabet  $\Sigma_3$  and  $(l, r) \in I_3$ , we have

$$\begin{aligned} P_{3n+1}^{\text{ter}}((W_1, W_2, W_3, L, R) = (w_1, w_2, w_3, l, r)) &= \frac{P^{\text{ter}}(|F_{S_i}^i| = 3n_i + S_i, i \in \{1, 2, 3\})}{3^{|w_1|+|w_2|+|w_3|+3} P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^3 \frac{S_i}{3n_i+1} q_{3n_i+S_i, S_i}}{3^{|w_1|+|w_2|+|w_3|+3} P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})} \end{aligned}$$

where the  $F^i$  are independent GW forests with respective number of roots the  $S_i := S_i(w_1, w_2, w_3, l, r)$ 's, and  $n_i = n_i(w_1, w_2, w_3, l, r)$  for any  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Note 4.50.* Notice that if  $|w_i| = h_i$  for every  $i$ , for any  $l, r \in \{1, 2, 3\}$ , then

$$P_{3n+1}^{\text{ter}}(\text{Dec}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r)) = P_{3n+1}^{\text{ter}}((W_1, W_2, W_3, L, R) = (w_1, w_2, w_3, l, r)).$$

*Proof.* Notice that there is a hidden condition here since  $(L, R)$  are well defined only when  $u(ns)$  is not an ancestor of  $u(nt)$  (which happens with probability going to 0). The proof follows a counting argument, together with the remark that all the trees in  $\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}}$  have the same weight. The term  $(1/3)^{|w_1|+|w_2|+|w_3|+3}$  comes from the  $|w_1| + |w_2| + |w_3| + 3$  internal nodes on the branches  $[\emptyset, w(ns)] \cup [\emptyset, w(nt)]$ .  $\square$

We now evaluate  $P_{3n+1}^{\text{ter}}(\widetilde{\text{Dec}}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r))$  for  $(w_1, w_2, w_3) \in \Sigma_3^{h_1} \times \Sigma_3^{h_2} \times \Sigma_3^{h_3}$  and  $(l, r) \in I_3$ . The variable  $\widetilde{\text{Dec}}(n)$  is defined conditionally on  $(H_1, H_2, H_3)$ . We have

$$\begin{aligned} P_{3n+1}^{\text{ter}}((H_1, H_2, H_3) = (h_1, h_2, h_3)) &= \sum \frac{P^{\text{ter}}(|F_{S'_i}^i| = 3n'_i + S'_i, i \in \{1, 2, 3\})}{3^{|w'_1|+|w'_2|+|w'_3|+3} P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})} \\ &= \sum \frac{\prod_{i=1}^3 \frac{S'_i}{3n'_i + S'_i} q(3n'_i + S'_i, S'_i)}{3^{|w'_1|+|w'_2|+|w'_3|+3} P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})} \end{aligned}$$

where  $S'_i := S_i(w'_1, w'_2, w'_3, l', r')$ 's,  $n'_i = n_i(w'_1, w'_2, w'_3, l', r')$  and where the sum is taken on  $(w'_1, w'_2, w'_3) \in \Sigma_3^{h_1} \times \Sigma_3^{h_2} \times \Sigma_3^{h_3}$  and  $(l', r') \in I_3$ . The term  $3^{-|w'_1|-|w'_2|-|w'_3|-3}$  comes from the internal nodes of the branch  $[\emptyset, w(ns)] \cup [\emptyset, w(nt)]$ . In other words

$$P_{3n+1}^{\text{ter}}((H_1, H_2, H_3) = (h_1, h_2, h_3)) = \frac{\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^3 \frac{S_i}{3n_i + S_i} q(3n_i + S_i, S_i)\right)}{3^2 P^{\text{ter}}(\mathcal{T}_{3n+1}^{\text{ter}})} \quad (9.6)$$

where  $S_i$  and  $n_i$  are the r.v.  $S_i$  and  $n_i$  when the  $w_i$  are words with  $h_i$  i.i.d. letters, uniform in  $\Sigma_3$  and  $(\mathbf{l}, \mathbf{r})$  is uniform in  $I_3$ . Finally, by conditioning on the  $H_i$ 's, we get

$$P_{3n+1}^{\text{ter}}(\widetilde{\text{Dec}}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r)) = \frac{P_{3n+1}^{\text{ter}}((H_1, H_2, H_3) = (h_1, h_2, h_3))}{3^{|w_1|+|w_2|+|w_3|+1}}$$

and

$$\frac{P_{3n+1}^{\text{ter}}(\text{Dec}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r))}{P_{3n+1}^{\text{ter}}(\widetilde{\text{Dec}}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r))} = \frac{\prod_{i=1}^3 \frac{S_i}{3n_i + S_i} q(3n_i + S_i, S_i)}{\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^3 \frac{S_i}{3n_i + S_i} q(3n_i + S_i, S_i)\right)}. \quad (9.7)$$

This quotient may be uniformly approached for  $(w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r) \in A_{n,M}$  thanks to a central local limit theorem applied to the random walk  $Z$ :

$$\sup_{l \in -n+3\mathbb{N}} \left| \frac{\sqrt{n}}{3} \mathbb{P}(Z_n = l) - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{l^2}{4n}\right) \right| \xrightarrow[n]{} 0,$$

since the increment of  $Z$  are centered and have variance 2. This gives easily an equivalent for the numerator of (9.7) (since  $q(m, k) = \mathbb{P}(Z_m = -k)$ ). For the denominator, split the expectation with respect to  $(w'_1, w'_2, w'_3)$  belonging to  $J_{h_1} \times J_{h_2} \times J_{h_3}$  or not. The first case occurs with probability close to 1, and the local central limit theorem provides the same asymptotic that the numerator. The second case provides an asymptotic with a

smaller order (notice that the fact that  $0 \leq N_1(w) \leq 2|w|$  simplifies the use of the central local limit theorem) and we get for any  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{P_{3n+1}^{\text{ter}}(\text{Dec}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r))}{P_{3n+1}^{\text{ter}}(\widetilde{\text{Dec}}(n) = (w_1, w_2, w_3, h_1, h_2, h_3, l, r))} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

on  $A_{n,M}$  for  $n$  large enough. □

# Bibliographie

- [ADJ97] J. AMBJØRN, B. DURHUUS et T. JONSSON : *Quantum geometry*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. A statistical field theory approach.
- [AHAdS05] J.S ANDRADE, Jr, H.J. HERRMANN, R.F.S. ANDRADE et L.R. da SILVA : Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, eucliden, space filling, and with matching graphsp. *Phys. Rev. Lett.*, 94:018702, 2005.
- [Alb07] M. ALBENQUE : Bijective combinatorics of positive braids. *Electron. Notes Discrete Math.*, 29:225–229, 2007.
- [Alb08] M. ALBENQUE : A note on the enumeration of directed animals via gas considerations. *A paraître dans Ann. Appl. Probab.*, 2008.
- [Ald91] D. ALDOUS : The continuum random tree. II. An overview. *In Stochastic analysis (Durham, 1990)*, volume 167 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 23–70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [Ald93] D. ALDOUS : The continuum random tree. III. *Ann. Probab.*, 21(1):248–289, 1993.
- [AM08] M. ALBENQUE et J-F. MARCKERT : Some families of increasing planar maps. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 56, 1624–1671, 2008.
- [AN72] K. B. ATHREYA et P. E. NEY : *Branching processes*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.
- [AS00] N. ALON et J. H. SPENCER : *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, second édition, 2000. With an appendix on the life and work of Paul Erdős.
- [AS03] O. ANGEL et O. SCHRAMM : Uniform infinite planar triangulations. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):191–213, 2003.
- [Bac08] A. BACHER : Average site perimeter of directed animals on the square lattice. Submitted, 2008.
- [Bax80] R. J. BAXTER : Hard hexagons: exact solution. *J. Phys. A*, 13(3):L61–L70, 1980.
- [Bax82] R.J. BAXTER : *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press Inc., 1982.
- [BB07] O. BERNARDI et N. BONICHON : Catalan intervals and realizers of triangulations. *Journal version submitted. ArXiv: math.CO/0704.3731. Extended abstract FPSAC*, 2007.

- [BDFG04] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO et E. GUITTER : Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.*, 11(1):Research Paper 69, 27 pp. (electronic), 2004.
- [BDMdlS08] N. BROUTIN, L. DEVROYE, E. MCLEISH et M. de la SALLE : The height of increasing trees. *Random Structures Algorithms*, 32(4):494–518, 2008.
- [BDS08] O. BODINI, A. DARRASSE et M. SORIA : Distances in random apollonian network structures. *20th Annual international Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, FPSAC 2008, DMTCS Proceedings, to appear*, 2008.
- [BFS92] P. BERGERON, Ph. FLAJOLET et B. SALVY : Varieties of increasing trees. *research report INRIA 1583, available at ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-ps-gz/RR/RR-1583.ps.gz*, 1992.
- [BH57] S. R. BROADBENT et J. M. HAMMERSLEY : Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [BKL98] J. BIRMAN, K. H. KO et S. J. LEE : A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups. *Adv. Math.*, 139(2):322–353, 1998.
- [BM98] M. BOUSQUET-MÉLOU : New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.*, 180:73–106, 1998.
- [BM04] A. BOUILLARD et J. MAIRESSE : Möbius inversion formula for the trace group. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(12):899–904, 2004.
- [BMC96] M. BOUSQUET-MÉLOU et A. R. CONWAY : Enumeration of directed animals on an infinite family of lattices. *J. Phys. A*, 29(13):3357–3365, 1996.
- [Bol98] B. BOLLOBÁS : *Modern graph theory*, volume 184 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Bou02] A. BOUILLARD : Les groupes de traces. Mémoire de D.E.A., Université Denis Diderot – Paris VII, 2002.
- [BP93] J. BÉTRÉMA et J. G. PENAUD : Modèles avec particules dures, animaux dirigés, et séries en variables partiellement commutatives. [arXiv:math.CO/0106210](https://arxiv.org/abs/math/9306010), 1993.
- [Bra91] M. BRAZIL : Monoid growth functions for braid groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 1(2):201–205, 1991.
- [Bro01] A. BRONFMAN : Growth functions of a class of monoids. *Preprint*, 2001.
- [BS72] E. BRIESKORN et K. SAITO : Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. *Invent. Math.*, 17:245–271, 1972.
- [BS97] A. BLASS et B. E. SAGAN : Möbius functions of lattices. *Adv. Math.*, 127(1):94–123, 1997.
- [BSV98] BÖHME, M. STIEBITZ et M. VOIGT : On uniquely 4-colorable planar graphs. 1998.
- [BV97] M. BRILMAN et J-M. VINCENT : Dynamics of synchronized parallel systems. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 13(3):605–617, 1997.
- [CD06] Ph CHASSAING et B. DURHUUS : Local limit of labeled trees and expected volume growth in a random quadrangulation. *Ann. Probab.*, 34(3):879–917, 2006.

- [CDGB00] S. CORTEEL, A. DENISE et D. GOUYOU-BEAUCHAMPS : Bijections for directed animals on infinite families of lattices. *Ann. Comb.*, 4(3-4):269–284, 2000. Conference on Combinatorics and Physics (Los Alamos, NM, 1998).
- [CF69] P. CARTIER et D. FOATA : *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*. Lecture Notes in Mathematics, No. 85. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [Cha95] R. CHARNEY : Geodesic automation and growth functions for Artin groups of finite type. *Math. Ann.*, 301(2):307–324, 1995.
- [CM04] R. CHARNEY et J. MEIER : The language of geodesics for Garside groups. *Math. Z.*, 248(3):495–509, 2004.
- [Col94] D. J. COLLINS : Relations among the squares of the generators of the braid group. *Invent. Math.*, 117(3):525–529, 1994.
- [CS04] Ph. CHASSAING et G. SCHAEFFER : Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2):161–212, 2004.
- [CV81] R. CORI et B. VAUQUELIN : Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5):1023–1042, 1981.
- [DDRW02] P. DEHORNOY, I. DYNNIKOV, D. ROLFSEN et B. WIEST : *Why are braids orderable?*, volume 14 de *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [Deh97] P. DEHORNOY : A fast method for comparing braids. *Adv. Math.*, 125(2):200–235, 1997.
- [Deh07] P. DEHORNOY : Combinatorics of normal sequences of braids. *J. Combinat. Th. Series A*, 114:389–409, 2007.
- [Deh08] P. DEHORNOY : *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, volume 4, chapitre Le problème d'isotopie des tresses. Cassini, à paraître, 2008. Rédigée par M. Albenque.
- [DGM06] R. DONG, C. GOLDSCHMIDT et J. B. MARTIN : Coagulation-fragmentation duality, Poisson-Dirichlet distributions and random recursive trees. *Ann. Appl. Probab.*, 16(4):1733–1750, 2006.
- [Dha82] D. DHAR : Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard-square lattice-gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49(14):959–962, 1982.
- [Dha83] D. DHAR : Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51(10):853–856, 1983.
- [Die95] V. DIEKERT : *The Book of Traces*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 1995.
- [DK99] M. DROSTE et D. KUSKE : On recognizable languages in divisibility monoids. In *Fundamentals of computation theory (Iasi, 1999)*, volume 1684 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 246–257. Springer, Berlin, 1999.
- [DM61] E. B. DYNKIN et M. B. MALJUTOV : Random walk on groups with a finite number of generators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 137:1042–1045, 1961.
- [DP99] P. DEHORNOY et L. PARIS : Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 79(3):569–604, 1999.

- [DPB82] D. DHAR, M. K. PHANI et M. BARMA : Enumeration of directed site animals on two-dimensional lattices. *J. Phys. A*, 15(6):L279–L284, 1982.
- [DS07] A. DARASSE et M. SORIA : Degree distribution of ran structures and boltzmann generation for trees. In *International Conference on Analysis of Algorithms*, Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Antibes, June 2007.
- [Duq05] J-F. DUQUESNE, T. and Le Gall : Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees. *Probab. Theory Related Fields*, 131(4):553–603, 2005.
- [ECH<sup>+</sup>92] D. B. A. EPSTEIN, J. W. CANNON, D. F. HOLT, S. V. F. LEVY, M. S. PATERSON et W. P. THURSTON : *Word processing in groups*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [EPW06] S. N. EVANS, J. PITMAN et A. WINTER : Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting. *Probab. Theory Related Fields*, 134(1):81–126, 2006.
- [Erd47] P. ERDÖS : Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:292–294, 1947.
- [FDP06] Ph. FLAJOLET, Ph. DUMAS et V. PUYHAUBERT : Some exactly solvable models of urn process theory. In *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, volume AG de *Discrete Mathematics and Computer Science*, pages 59–118, Nancy, France, 2006.
- [FO82] Ph. FLAJOLET et A. ODLYZKO : The average height of binary trees and other simple trees. *J. Comput. System Sci.*, 25(2):171–213, 1982.
- [FS95] Ph. FLAJOLET et R. SEDGEWICK : *An introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [FS08] Ph. FLAJOLET et R. SEDGEWICK : *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2008.
- [FZ08] S. FELSNER et F. ZICKFELD : On the number of planar orientations with prescribed degrees. *Electron. J. Combin.*, 15(1):Research Paper 77, 41, 2008.
- [Gar69] F. A. GARSIDE : The braid group and other groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 20:235–254, 1969.
- [GBV88] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS et G. VIENNOT : Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Adv. in Appl. Math.*, 9(3):334–357, 1988.
- [GGP97] I. M. GELFAND, M.I. GRAEV et A. POSTNIKOV : Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots. In *The Arnold-Gelfand mathematical seminars*, pages 205–221. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [Gil03] F. GILLET : *Étude d’algorithmes stochastiques et arbres*. Thèse de doctorat, Université Nancy I, 2003.
- [GLM<sup>+</sup>05] R. L. GRAHAM, J. C. LAGARIAS, C. L. MALLOWS, A. R. WILKS et C. H. YAN : Apollonian circle packings: geometry and group theory. I. The Apollonian group. *Discrete Comput. Geom.*, 34(4):547–585, 2005.
- [Gri89] G. GRIMMETT : *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Gui80] Y. GUIVARC’H : Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d’une marche aléatoire. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979)*

- (*French*), volume 74 de *Astérisque*, pages 47–98, 3. Soc. Math. France, Paris, 1980.
- [Har63] T. E. HARRIS : *The theory of branching processes*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 119. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [HN83] V. HAKIM et J. P. NADAL : Exact results for 2D directed animals on a strip of finite width. *J. Phys. A*, 16(7):L213–L218, 1983.
- [Jan06] S. JANSON : Limit theorems for triangular urn schemes. *Probab. Theory Related Fields*, 134(3):417–452, 2006.
- [JS98] Ph. JACQUET et W. SZPANKOWSKI : Analytical de-Poissonization and its applications. *Theoret. Comput. Sci.*, 201(1-2):1–62, 1998.
- [Kai76] W. D. KAIGH : An invariance principle for random walk conditioned by a late return to zero. *Ann. Probability*, 4(1):115–121, 1976.
- [Kal02] O. KALLENBERG : *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second édition, 2002.
- [Kem79] R. KEMP : The average stack size of a derivation tree generated by a linear context-free grammar. *Inform. and Control*, 42(3):354–365, 1979.
- [Kni81] F. B. KNIGHT : *Essentials of Brownian Motion and Diffusion*, volume 18 de *Math. Surveys*. American Math. Soc., 1981.
- [Knu00] D. E. KNUTH : *Selected papers on analysis of algorithms*, volume 102 de *CSLI Lecture Notes*. CSLI Publications, Stanford, CA, 2000.
- [KR73] D. A. KLARNER et R. L. RIVEST : A procedure for improving the upper bound for the number of  $n$ -ominoes. *Canad. J. Math.*, 25:585–602, 1973.
- [Kra00] C. KRATTHENTHALER : The theory of heaps and the cartier-foata monoid. *Appendix of the electronic reedition of “Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, 2000.
- [Kra05] D KRAMMER : Braid groups. Available at <http://www.warwick.ac.uk/~masbal/MA4F2Braids/braids.pdf>, 2005.
- [Kre72] G. KREWERAS : Sur les partitions non croisées d’un cycle. *Discrete Math.*, 1(4):333–350, 1972.
- [Kri04] M. A. KRIKUN : A uniformly distributed infinite planar triangulation and a related branching process. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 307(Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10):141–174, 282–283, 2004.
- [Kus01] D. KUSKE : Divisibility monoids: presentation, word problem, and rational languages. In *Fundamentals of computation theory (Riga, 2001)*, volume 2138 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 227–239. Springer, Berlin, 2001.
- [LBM07] Y. LE BORGNE et J-F. MARCKERT : Directed animals and gas models revisited. *Electronic journal of Combinatorics*, 14, 2007.
- [Led01] F. LEDRAPPIER : Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, volume 28 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [LG05] J-F. LE GALL : Random trees and applications. *Probab. Surv.*, 2:245–311 (electronic), 2005.

- [LG07] J-F. LE GALL : The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.*, 169(3):621–670, 2007.
- [LG08] J-F. LE GALL : Geodesics in large planar maps and in the brownian map. Submitted, April 2008.
- [LGP08] J-F. LE GALL et F. PAULIN : Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal*, 2008. To be published.
- [LGW06] J-F. LE GALL et M. WEILL : Conditioned Brownian trees. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 42(4):455–489, 2006.
- [LPP95] R. LYONS, R. PEMANTLE et Y. PERES : Conceptual proofs of  $L \log L$  criteria for mean behavior of branching processes. *Ann. Probab.*, 23(3):1125–1138, 1995.
- [LSW01a] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER : Values of Brownian intersection exponents. I. Half-plane exponents. *Acta Math.*, 187(2):237–273, 2001.
- [LSW01b] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER : Values of Brownian intersection exponents. II. Plane exponents. *Acta Math.*, 187(2):275–308, 2001.
- [LSW02] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER : Values of Brownian intersection exponents. III. Two-sided exponents. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(1):109–123, 2002.
- [LSW04] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER : Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Ann. Probab.*, 32(1B):939–995, 2004.
- [Mal03] A. V. MALYUTIN : The Poisson-Furstenberg boundary of a locally free group. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 301(Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 9):195–211, 245, 2003.
- [Mar08] J-F. MARCKERT : The lineage process in Galton-Watson trees and globally centered discrete snakes. *Ann. Appl. Probab.*, 18(1):209–244, 2008.
- [Mic99] J. MICHEL : A note on words in braid monoids. *J. Algebra*, 215(1):366–377, 1999.
- [Mie06] G. MIERMONT : An invariance principle for random planar maps. In *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, volume AG de *Discrete Mathematics and Computer Science*, pages 39–59, Nancy, France, 2006.
- [Mie08] G. MIERMONT : Cartes aléatoires. disponible à <http://www.math.u-psud.fr/~miermont/courscartes.pdf>, 2008.
- [MM03] J-F. MARCKERT et A. MOKKADEM : The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion. *Ann. Probab.*, 31(3):1655–1678, 2003.
- [MM06a] J. MAIRESSE et F. MATHÉUS : Growth series for Artin groups of dihedral type. *Internat. J. Algebra Comput.*, 16(6):1087–1107, 2006.
- [MM06b] J-F. MARCKERT et Abdelkader MOKKADEM : Limit of normalized quadrangulations: the Brownian map. *Ann. Probab.*, 34(6):2144–2202, 2006.
- [MM07a] J. MAIRESSE et F. MATHÉUS : Random walks on free products of cyclic groups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(1):47–66, 2007.
- [MM07b] J. MAIRESSE et F. MATHÉUS : Randomly growing braid on three strands and the manta ray. *Ann. Appl. Probab.*, 17(2):502–536, 2007.

- [MM07c] J-F. MARCKERT et G. MIERMONT : Invariance principles for random bipartite planar maps. *Ann. Probab.*, 35(5):1642–1705, 2007.
- [MN03] H. M. MAHMOUD et R. NEININGER : Distribution of distances in random binary search trees. *Ann. Appl. Probab.*, 13(1):253–276, 2003.
- [Mot48] T. MOTZKIN : Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:352–360, 1948.
- [MW08] G. MIERMONT et M. WEILL : Radius and profile of random planar maps with faces of arbitrary degrees. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 4, 79–106, 2008.
- [NDV82] J. P. NADAL, B. DERRIDA et J. VANNIMENUS : Directed lattice animals in 2 dimensions: numerical and exact results. *J. Physique*, 43(11):1561–1574, 1982.
- [Pit06] J. PITMAN : *Combinatorial stochastic processes*, volume 1875 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard.
- [RM83] S. REDNER et I. MAJID : Critical properties of directed self-avoiding walks. *J. Phys. A*, 16:307–310, 1983.
- [Rot64] G.-C. ROTA : On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2:340–368 (1964), 1964.
- [SA92] D. STAUFFER et A. AHARONY : *Introduction to percolation theory*. Taylor and Francis, London, second édition, 1992.
- [Sah89] N. SAHEB : Concurrency measure in commutation monoids. *Discrete Appl. Math.*, 24(1-3):223–236, 1989. First Montreal Conference on Combinatorics and Computer Science, 1987.
- [Sch98a] G. SCHAEFFER : *Coujugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1998.
- [Sch98b] G. SCHAEFFER : *Coujugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1998.
- [Sch00] O. SCHRAMM : Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel J. Math.*, 118:221–288, 2000.
- [Sta97] R. P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.
- [Sta99] R. P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.
- [Tem56] H. N. V. TEMPERLEY : Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules. *Phys. Rev. (2)*, 103:1–16, 1956.
- [Tut62] W. T. TUTTE : A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14:21–38, 1962.

- [Vie86] G. VIENNOT : Heaps of pieces. I: Basic definitions and combinatorial lemmas. *Lecture Notes in Math.*, 1234:321–350, 1986.
- [VNB00] A. M. VERSHIK, S. NECHAEV et R. BIKBOV : Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps. *Comm. Math. Phys.*, 212(2):469–501, 2000.
- [VSCC92] N. Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE et T. COULHON : *Analysis and geometry on groups*, volume 100 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Wei07] M. WEILL : Asymptotics for rooted bipartite planar maps and scaling limits of two-type spatial trees. *Electron. J. Probab.*, 12:no. 31, 887–925 (electronic), 2007.
- [ZCFR06] Z. ZHANG, F. COMELLAS, G. FERTIN et L. RONG : High-dimensional Apollonian networks. *J. Phys. A*, 39(8):1811–1818, 2006.
- [ZCZ<sup>+</sup>08] Z. ZHANG, L. CHEN, S. ZHOU, L. FANG, J. GUAN et T. ZOU : Analytical solution of average path length for apollonian networks. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 77(1):017102, 2008.
- [ZYW05] T. ZHOU, G. YAN et B-H. WANG : Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 71(4):046141, 2005.

# Index

- adjacent, 18
- aire (animal), 63
- amas, 65
- animal
  - dirigé, 67
- arbre
  - alternant non-croisé, 44
  - continu d'Aldous, 112
  - de Galton-Watson, 108
  - planaire, 108
  - unaire-binaire, 44
- arc, 63
- Artin (générateurs d'), 31
- atome
  - d'un POSET, 23
  - d'un monoïde, 20
- carte planaire, 99
- Cartier-Foata (monoïde de), 27
- chaîne de Markov
  - cyclique, 82
- chemin de Dyck, 110
- configuration (de gaz), 69
- connectivité (constante de ), 64
- connexe, 62
- contour (d'un arbre), 110
- degré
  - entrant, 63
  - sortant, 63
- densité, 69
- distance
  - de Gromov-Hausdorff, 103
  - de Hausdorff, 103
  - locale, 102
- domino, 26
- empilement, 25, 26
  - coloré, 52
  - produit, 27
  - strict, 71
- trivial, 28
- Euler (relation de), 101
- excursion brownienne, 111
- face, 100
- forêt alternante non-croisée, 42
- Galton-Watson
  - processus de , 108
- Garside
  - forme normale, 55
  - monoïde de, 39
  - élément de, 39
- gaz
  - modèle de, 69
- graphe, 62, 98
  - adjacent, 63
  - agréable, 76
  - connexe, 99
  - dirigé, 63
  - localement fini, 62, 99
  - marqué, 80
  - orienté, 63
  - planaire, 99
- groupe
  - de Coxeter, 38
- Hasse
  - diagramme de, 22
- incidente, 62, 99
- indépendant (ensemble), 63
- isomorphe, 80
- longueur
  - d'un mot, 18
  - dans un monoïde, 19
- monoïde, 18
  - atomique, 20
  - conique, 21

- d'Artin-Tits, 38
  - sphérique, 39
- de divisibilité, 38
- de traces, 27
- homogène, 19
- libre, 18
- simplifiable, 21
- Motzkin
  - chemins de, 46
- occupation (de gaz), 69
- partition
  - non-croisée, 41
- percolation, **64–66**
  - critique, 65
  - seuil de, 65
- périmètre, 63
- plongement, 99
- POSET, 22
  - localement fini, 22
- préfixe, 18
- pyramide, 26, 71
- quadrangulation, 100
- racine (d'une carte), 100
- recouvre, 22
- réseau, 63
- site, 63
- source (d'un AD), 67
- suffixe, 18
- treillis, 23
  - atomique, 23
  - distributif, 23
- triangulation, 100
  - en pile, 105
- universalité
  - classe d', 68
  - hypothèse d', 64

# Index des notations

- $\prec$ , 21  
 $\succ$ , 21  
CRT, 112
- $|A|$  (aire d'un animal), 63  
AANC, 44  
 $\mathcal{A}_S^G$ , 67
- BB, 48  
 $B_n^{+*}$ , 39  
 $B_m(r)$ , 102
- $\square_k$ , 121  
 $\square'_k$ , 120  
 $(\nu, \mathbf{M})$ -CM, 83  
 $(\nu, \mathbf{M}, N)$ -CMC, 83
- $E(m)$ , 100  
 $\equiv_J$ , 41
- FANC, 42  
 $F_M$ , 19  
 $F(m)$ , 100  
FNG, 55
- $\mathcal{F}_S^G$ , 67
- $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ , 27
- $\mathcal{J}$ , 34
- $\Lambda(u)$ , 114  
 $\Lambda(u, v)$ , 114
- $\mathcal{M}$ , 101  
 $M_J$ , 35  
 $m_J$ , 35  
 $\mu$ , 23
- $[N]$ , 73  
NBB, 48  
 $NC(n)$ , 41
- $p_c$ , 65  
pgcd, 21  
ppcm, 21  
 $P_\infty^{\text{ter}}$ , 109  
 $P_n^{\text{ter}}$ , 109  
 $P_\infty^\Delta$ , 117
- $\mathbb{Q}^\Delta$ , 106  
 $\mathbb{Q}^{\text{ter}}$ , 114
- $R_S^G$ , 78
- $t^\circ$ , 108  
 $\mathbf{t}_\infty^{\text{ter}}$ , 109  
 $\mathcal{T}_n$ , 31  
 $\Delta_{2k}$ , 105
- $\mathbb{U}^{\text{ter}}$ , 114
- $V(m)$ , 100
- $\mathbb{Z} \langle\langle M \rangle\rangle$ , 20





TRESSSES, ANIMAUX, CARTES : À L'INTERACTION ENTRE COMBINATOIRE ET  
PROBABILITÉ

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'étude de certains objets situés à l'interface entre combinatoire et probabilités.

Le premier thème abordé est l'énumération des tresses. Notre contribution principale consiste en une extension de la théorie des empilements de Viennot pour les monoïdes de traces à un cadre plus général incluant notamment les monoïdes de Garside, ce qui conduit entre autres à des résultats d'énumération nouveaux pour les monoïdes de tresses.

Le second volet de cette thèse est consacré au lien entre l'énumération d'animaux dirigés et les modèles de gaz à particules dures. La définition de chaînes de Markov cycliques et l'établissement de leur convergence vers les chaînes de Markov ordinaires nous permet de donner une présentation unifiée des résultats d'énumération d'animaux sur de nombreux réseaux et d'accéder ainsi à une meilleure compréhension de la dépendance des résultats d'énumération en la forme de la source.

La troisième et dernière partie traite des triangulations et quadrangulations en pile, et plus précisément de leurs comportements limites lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini. Les contributions principales sont les convergences locales et de Gromov-Hausdorff ainsi que l'asymptotique de la loi des degrés pour les cartes sous la loi uniforme et la convergence comme espace métrique sous la loi historique. Ces résultats reposent sur des outils combinatoires et probabilistes variés : bijection entre arbres et cartes, convergence vers l'arbre continu d'Aldous, étude probabiliste fine du comportement asymptotique de certaines fonctionnelles d'arbres, processus de fragmentation, modèle d'urnes aléatoires, ...

---

ENGLISH

We study in this work some objects lying on the boundary between combinatorics and probability.

The first part deals with the enumeration of positive braids. Our most significant contribution here is an extension of Viennot's heaps of pieces theory to a wider frame which includes in particular Garside monoids, this leads to some new enumeration results for braid monoids.

The second section is devoted to the link between enumeration of directed animals and hard particle gas models. The definition of cyclic Markov chains as well as some results about their convergence towards ordinary Markov chains enable us to give a unified presentation of enumeration of animals on various lattices and hence to provide a better understanding about the reliance between enumeration results and the form of the source.

The third and last part deals with the stack triangulations and quadrangulations, and more precisely with their limiting behaviors when the number of vertices grows to infinity. The main contributions here are the local and Gromov-Hausdorff convergences and the asymptotic of the degree distribution for the maps under the uniform law and the convergence as metric space under the historical distribution. These results rely on numerous combinatorial and probabilistic tools: bijection between trees and maps, convergence towards Aldous' continuum random tree, subtle probabilistic study of some trees properties, fragmentation process, random urns model, ...