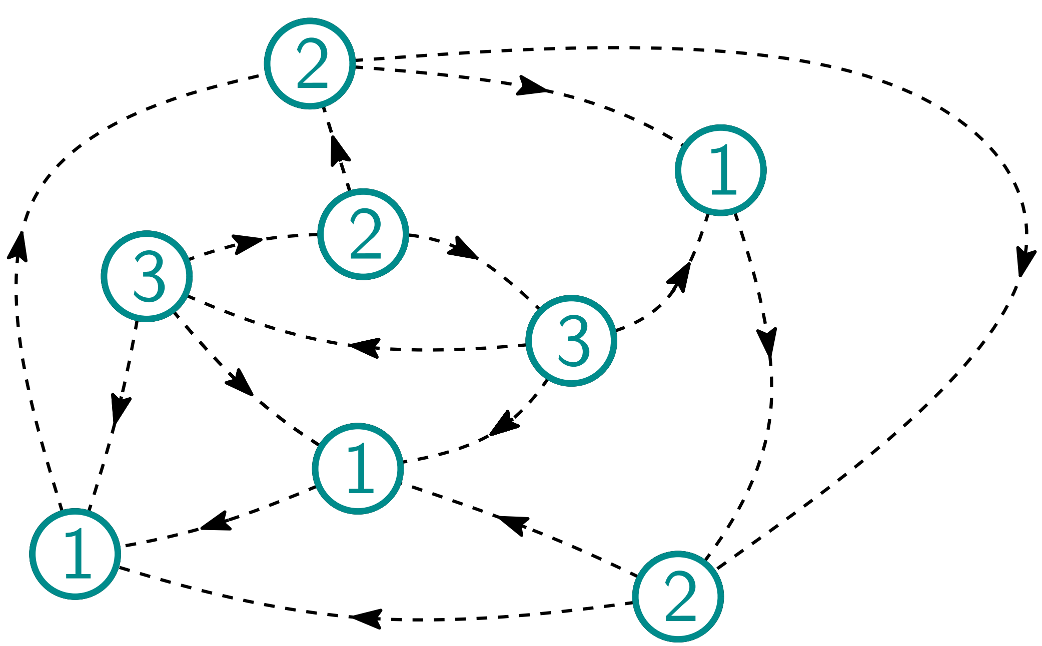
INTRODUCTION AUX ORIENTATIONS DE CARTES ET QUELQUES APPLICATIONS BIJECTIVES

Journées ALEA 2014
Mini-cours – Première séance



Marie Albenque (CNRS, LIX, École Polytechnique)

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
2 - Existence d'orientations
3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
2 - Existence d'orientations
3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Ce soir : séances d'exercices

Autour des triangulations simples.

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
2 - Existence d'orientations
3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Ce soir : séances d'exercices

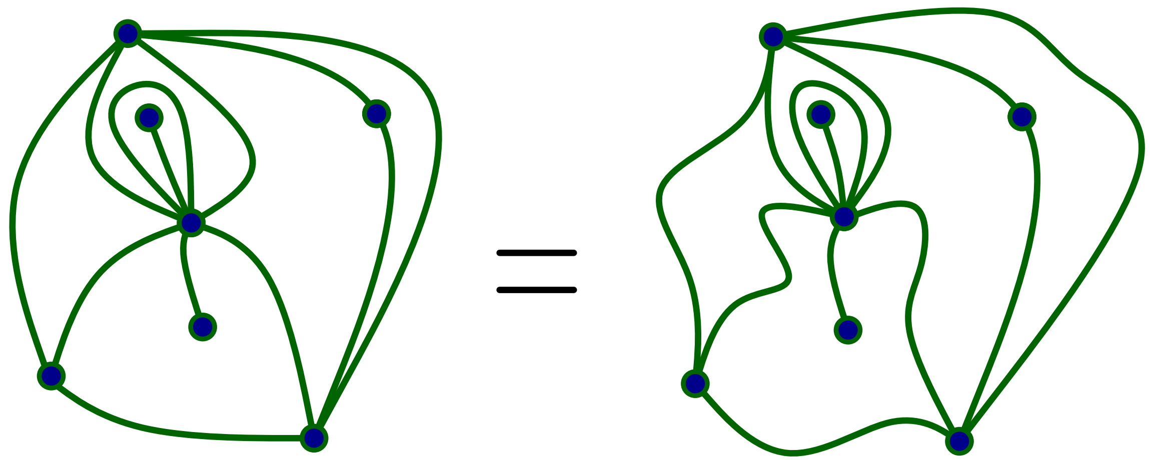
Autour des triangulations simples.

Demain : Application des orientations, dessins, couplages, bijections

1 - Schnyder woods et dessins.
2 - Génération d'arbres couvrants.
3 - Bijection avec arbres bourgeonnants

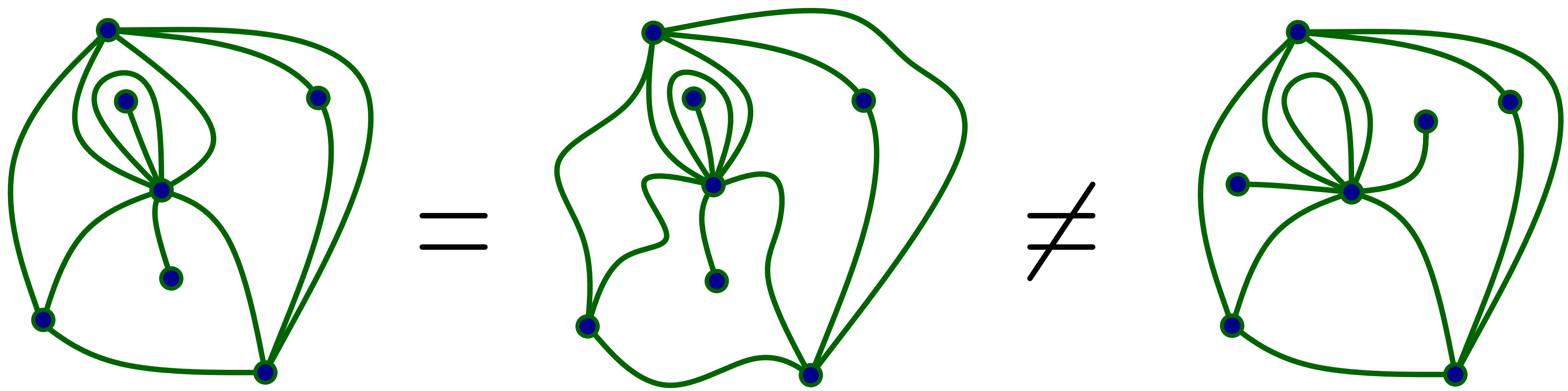
Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



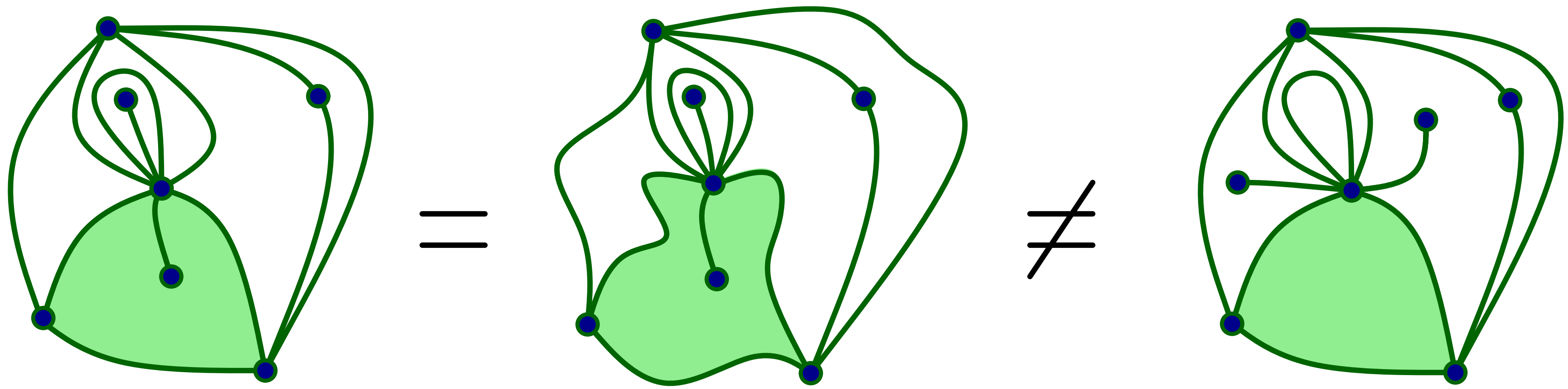
Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



Cartes planes - Définition

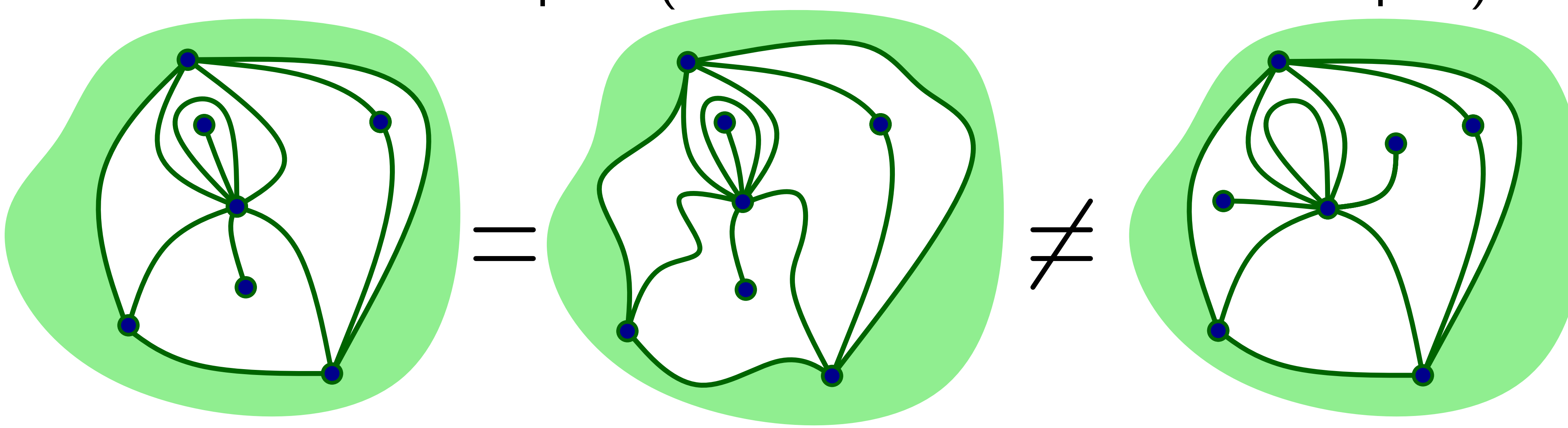
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

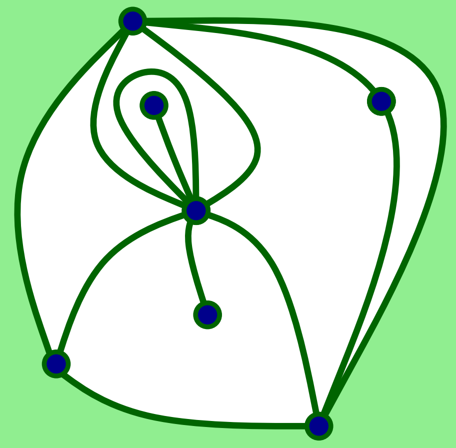
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

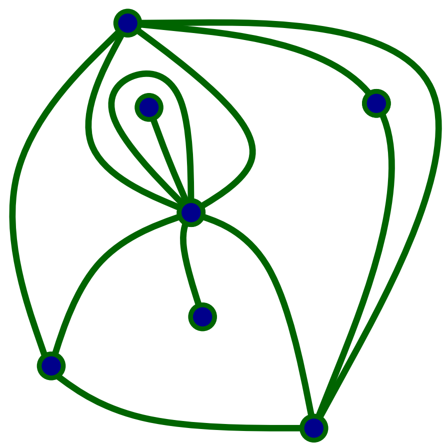
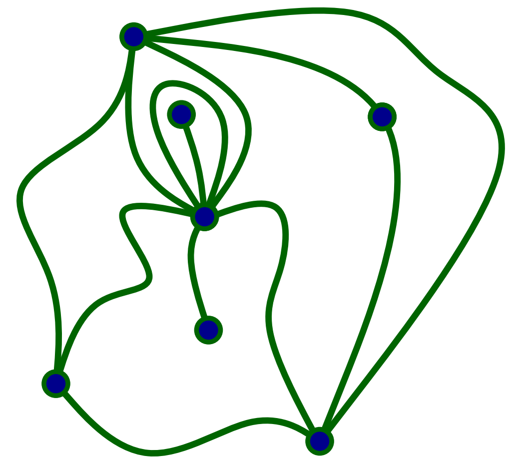
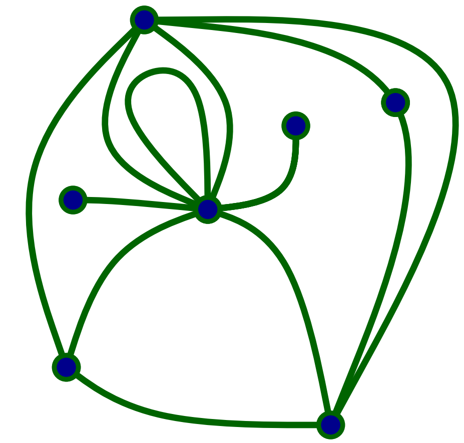
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

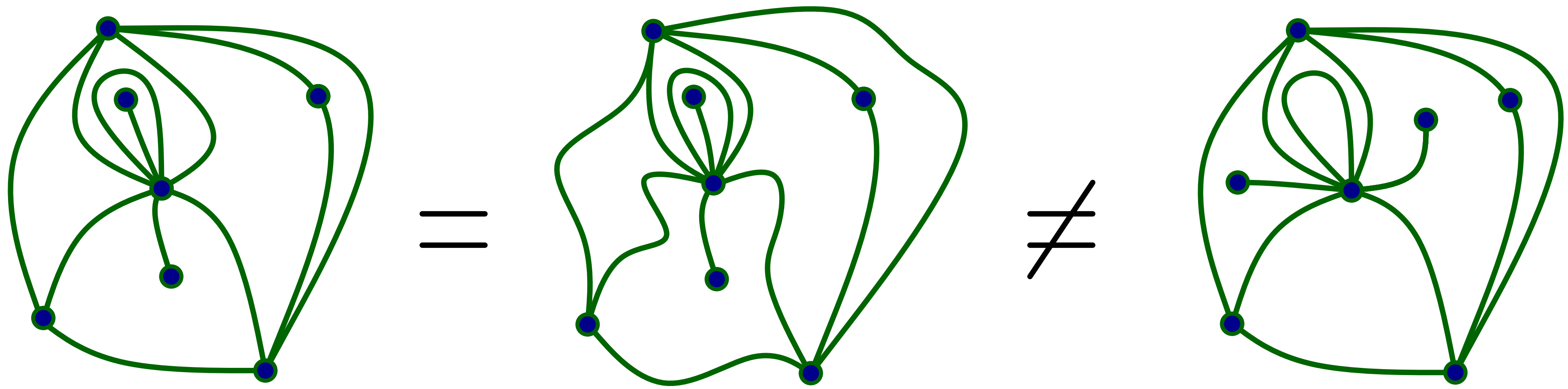
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).

 $=$  $\neq$ 

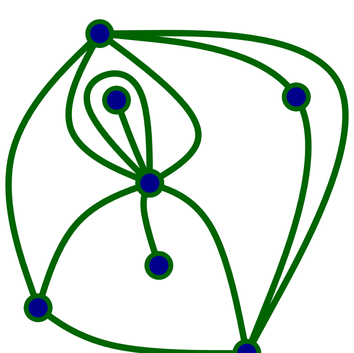
carte plane $=$ graphe planaire $+$ ordre cyclique autour des sommets

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).

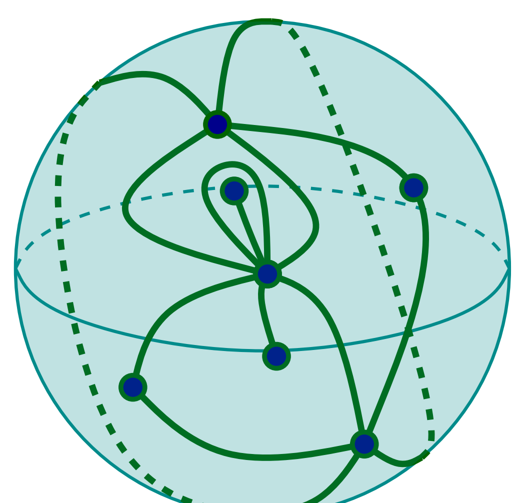


carte plane $\approx$ graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets



carte plane

$=$

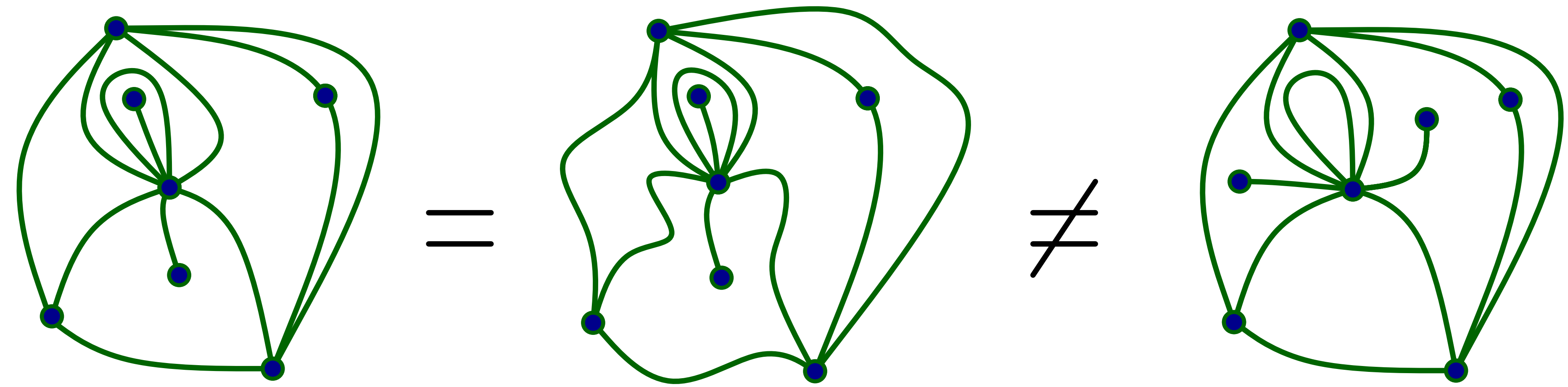


carte planaire

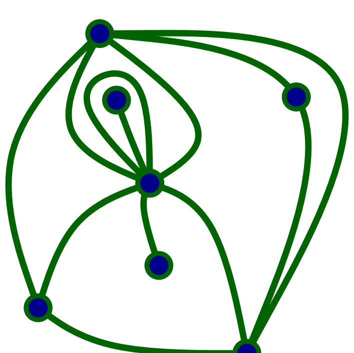
+ choix d'une face extérieure

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).

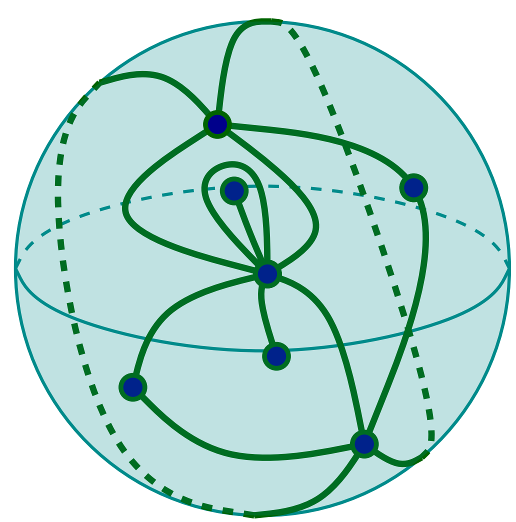


carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets
+ choix d'une face extérieure



carte plane

=

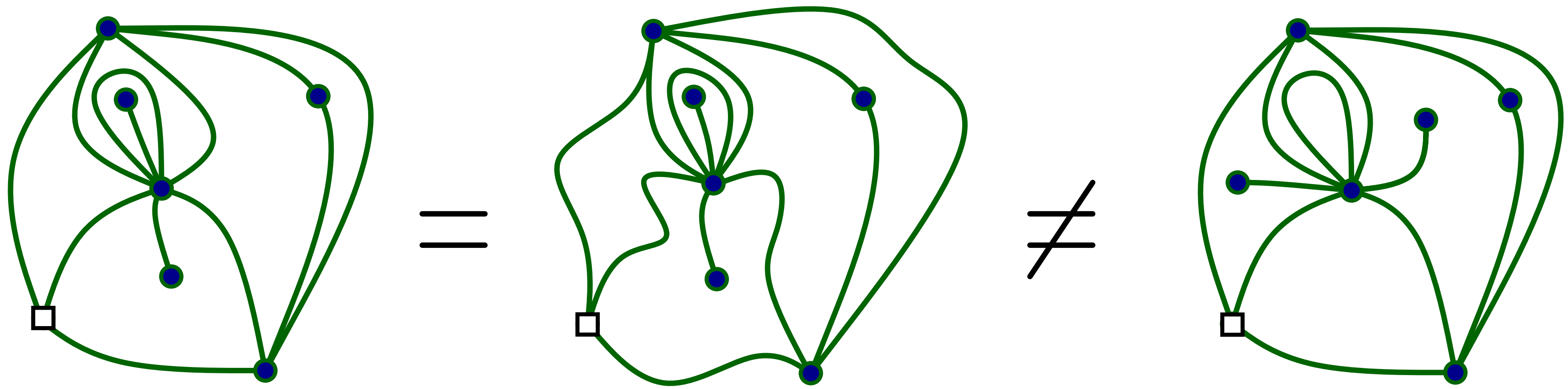


carte planaire

+ choix d'une face extérieure

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



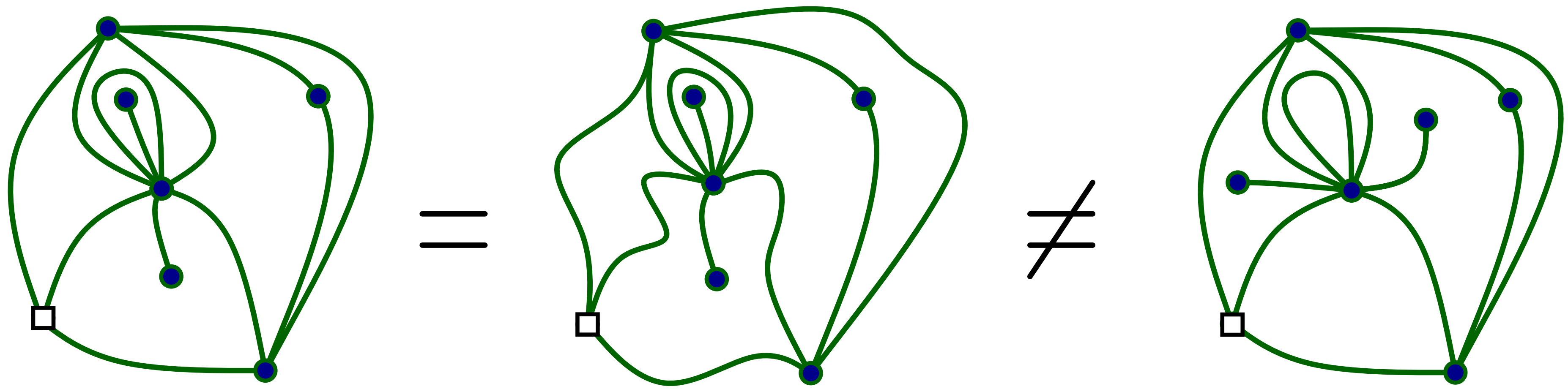
carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets

+ choix d'une face extérieure

carte plane **enracinée** = sommet marqué $\square$ (incident à la face extérieure)

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets + choix d'une face extérieure

carte plane **enracinée** $=$ sommet marqué □ (incident à la face extérieure)

Notation : $V(M) = \{$sommets de $M\}$
$E(M) = \{$arêtes de $M\}$
$F(M) = \{$faces de $M\}$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

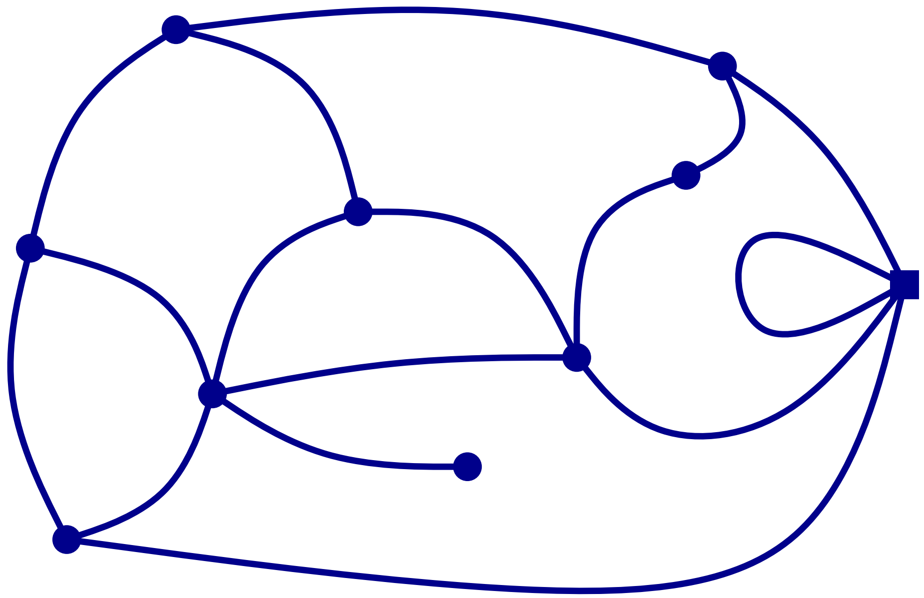
Preuve :

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



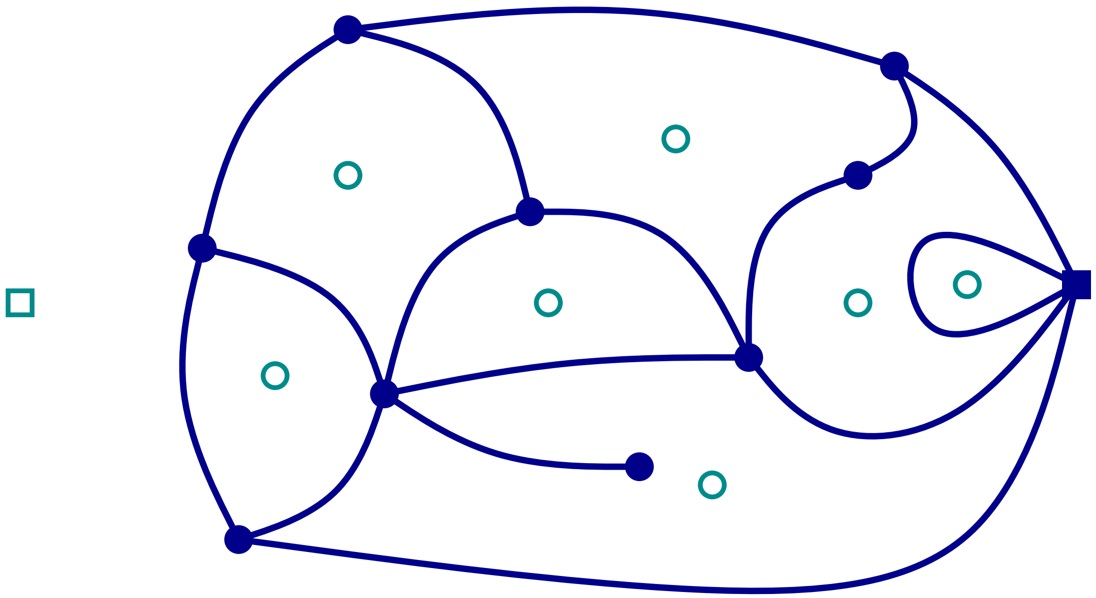
M carte plane enracinée

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

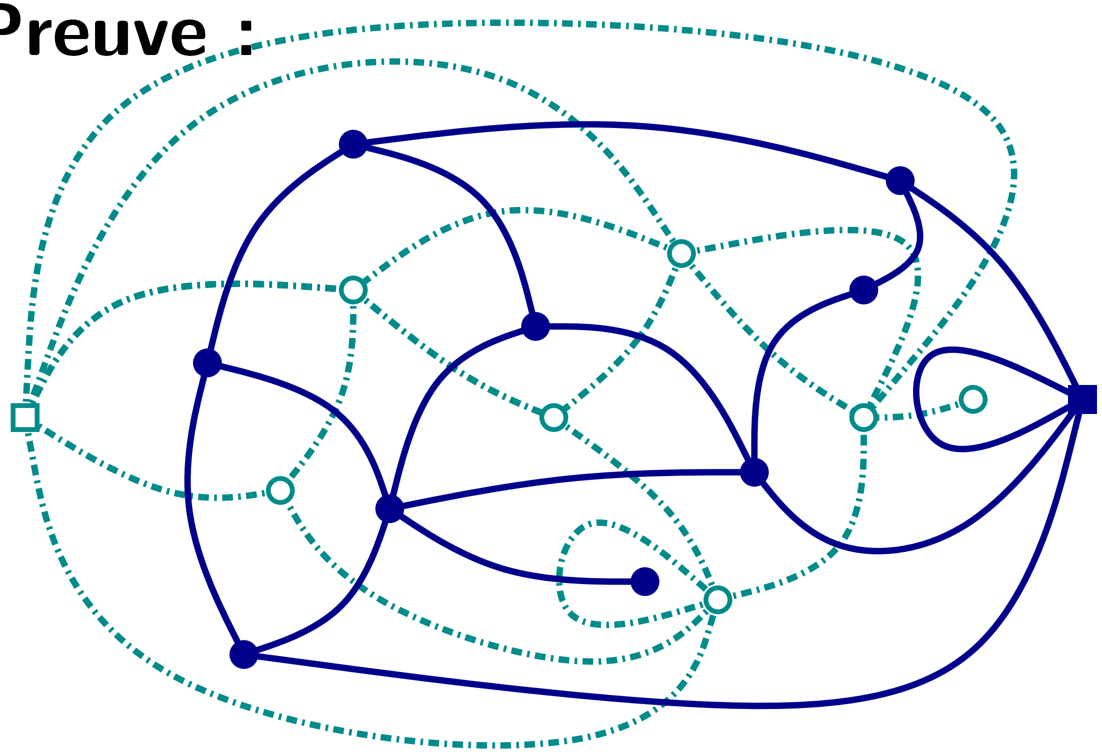
$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

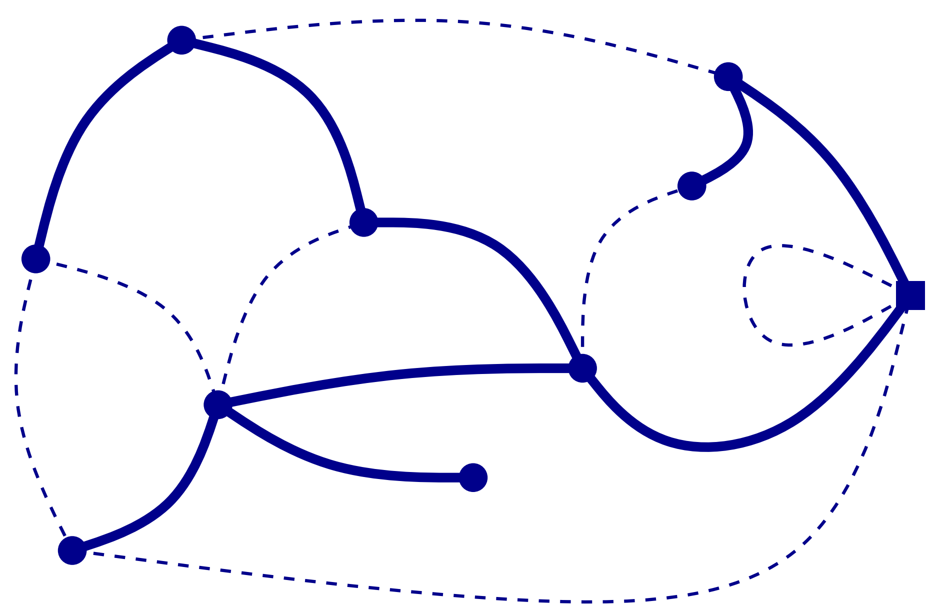
$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

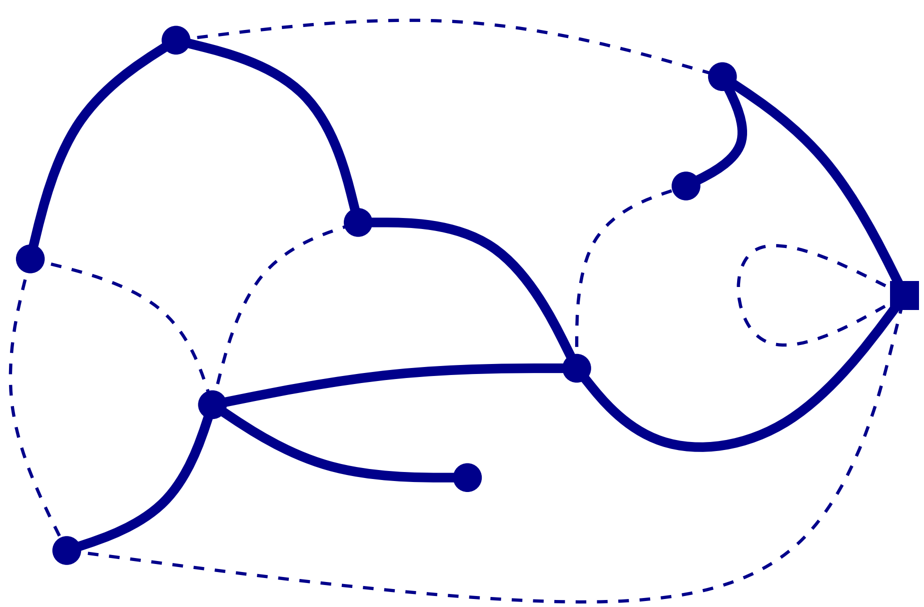
$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

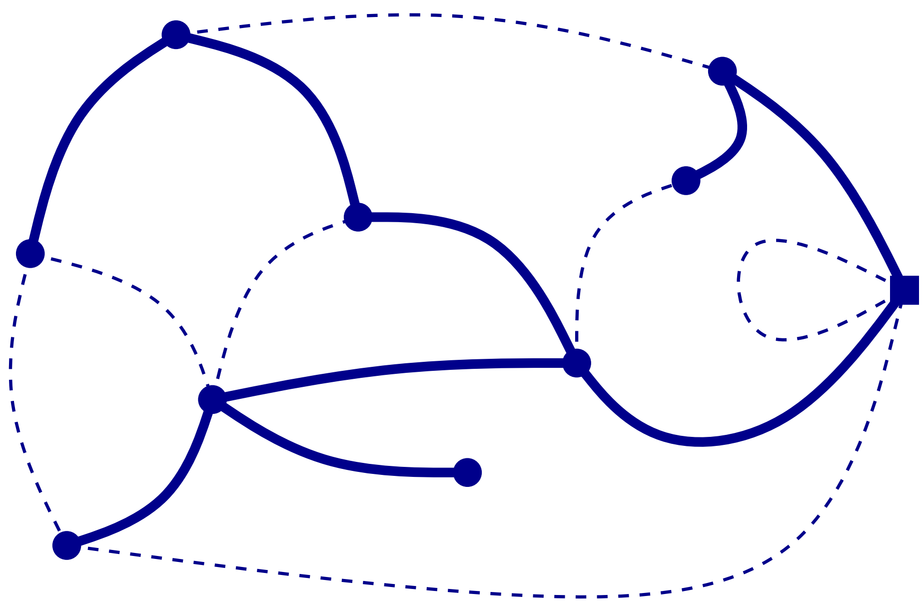
Convention :

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

$M^\star$ carte duale $\quad |V(M^\star)| = |F(M)|$

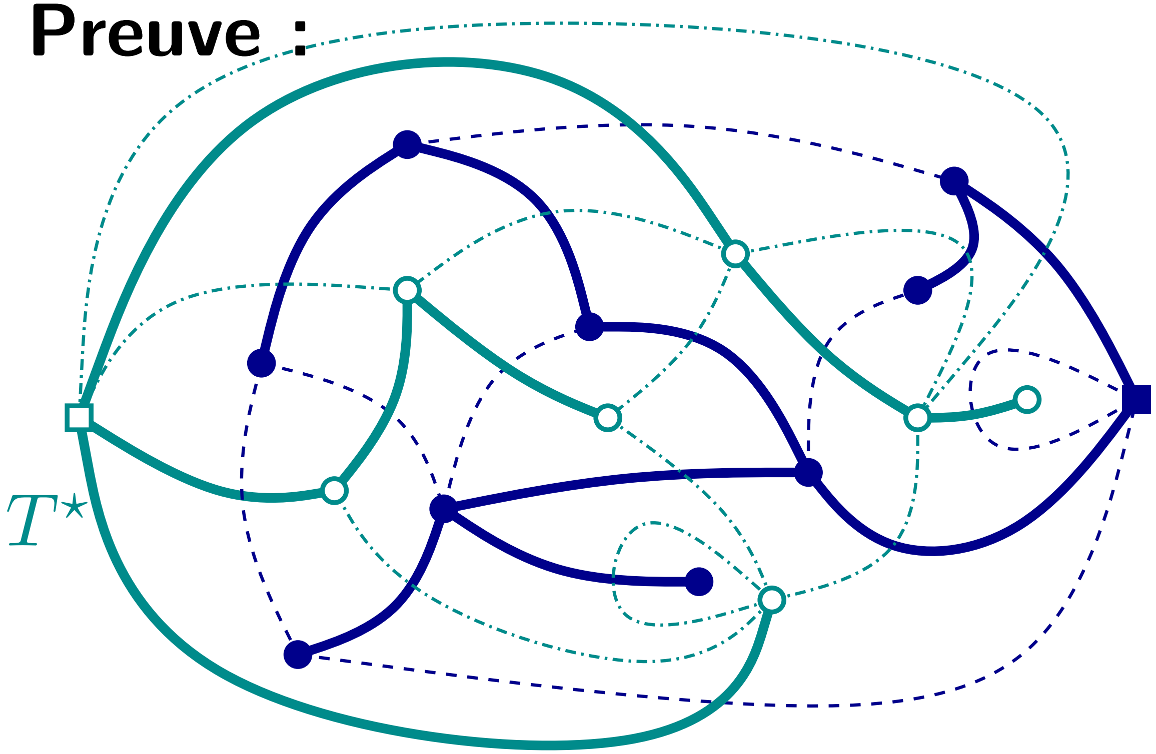
Convention :

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

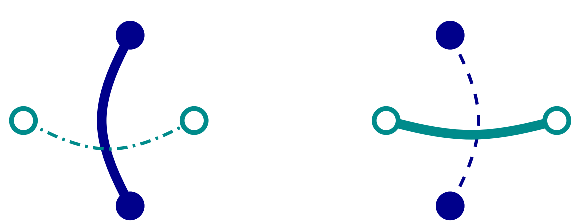
T arbre couvrant de M

$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

Convention :



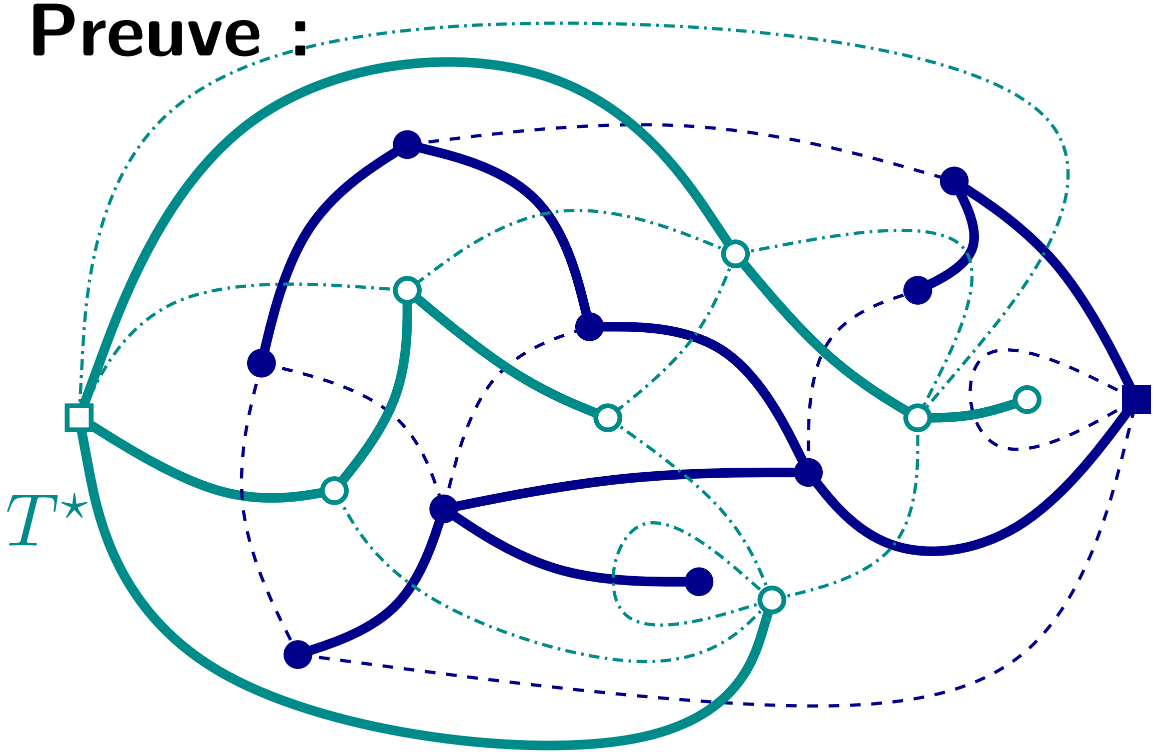
$\Longrightarrow$ $T^\star =$ arbre couvrant de $M^\star$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

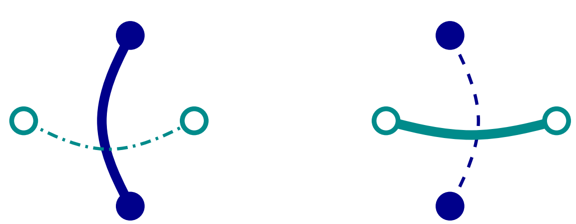
$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

$|V(T^\star)| = |F(M)|$,

$|E(T^\star)| = |F(M)| - 1$

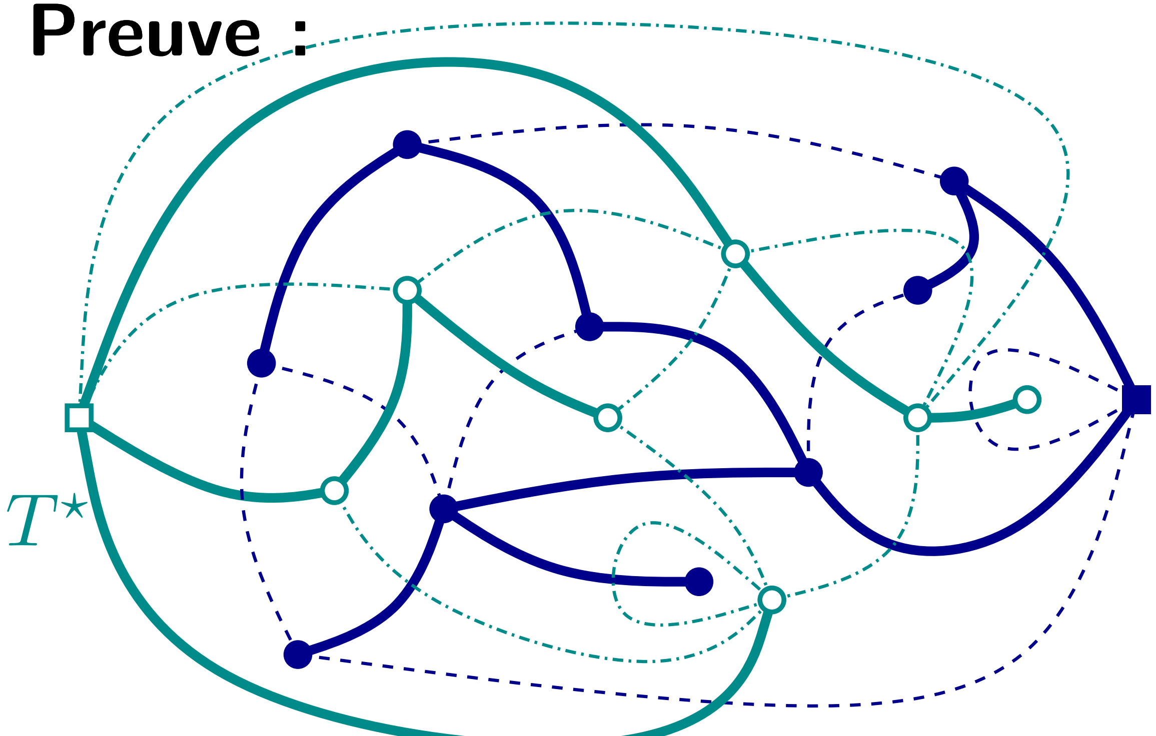
Convention :  $\Longrightarrow$ $T^\star =$ arbre couvrant de $M^\star$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$|V(T)| = |V(M)|$,

$|E(T)| = |V(M)| - 1$

$M^\star$ carte duale $|V(M^\star)| = |F(M)|$

$|V(T^\star)| = |F(M)|$,

$|E(T^\star)| = |F(M)| - 1$

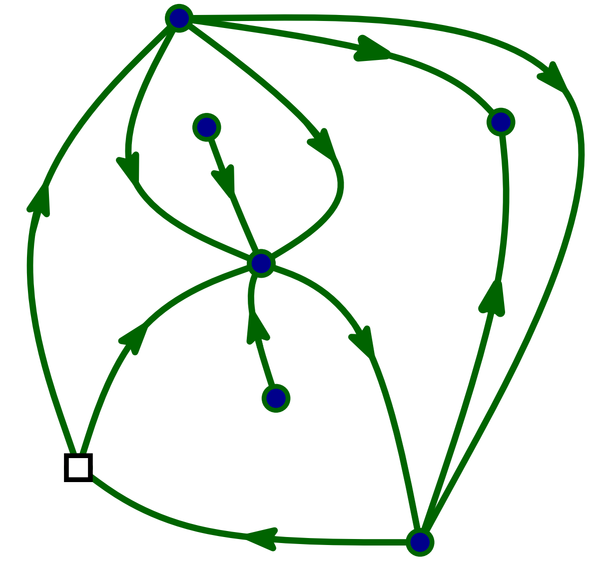
Convention : 

$$\Longrightarrow \quad |E(M)| = |E(T)| + |E(T^\star)|$$

□

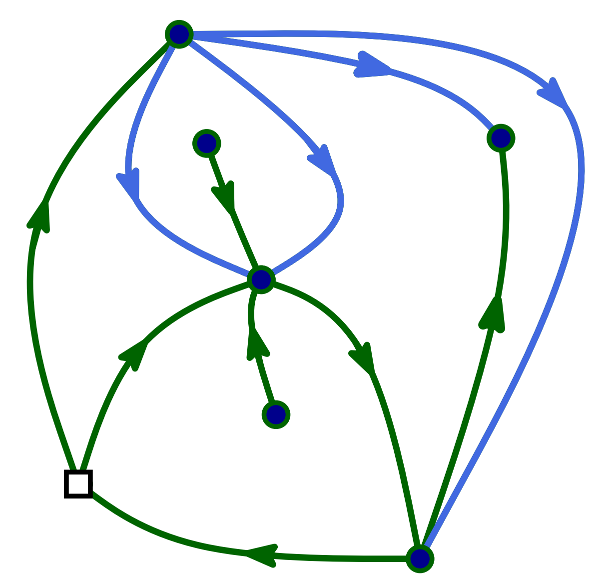
α-Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.



α-Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.

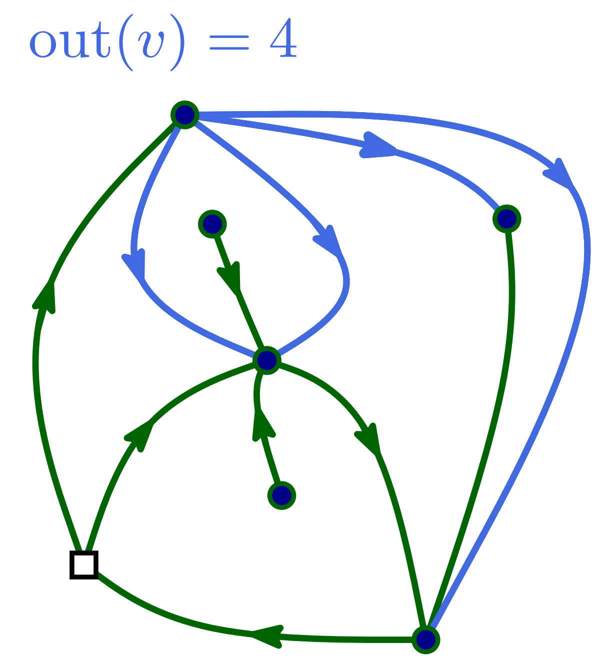


On caractérise une orientation par le degré sortant de ses sommets.

$\mathrm{out}(v)$ = degré sortant de v

α-Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.



On caractérise une orientation par le degré sortant de ses sommets.

$\mathrm{out}(v)$ = degré sortant de v

Soit $\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$, une **$\alpha$-orientation** est une orientation telle que :

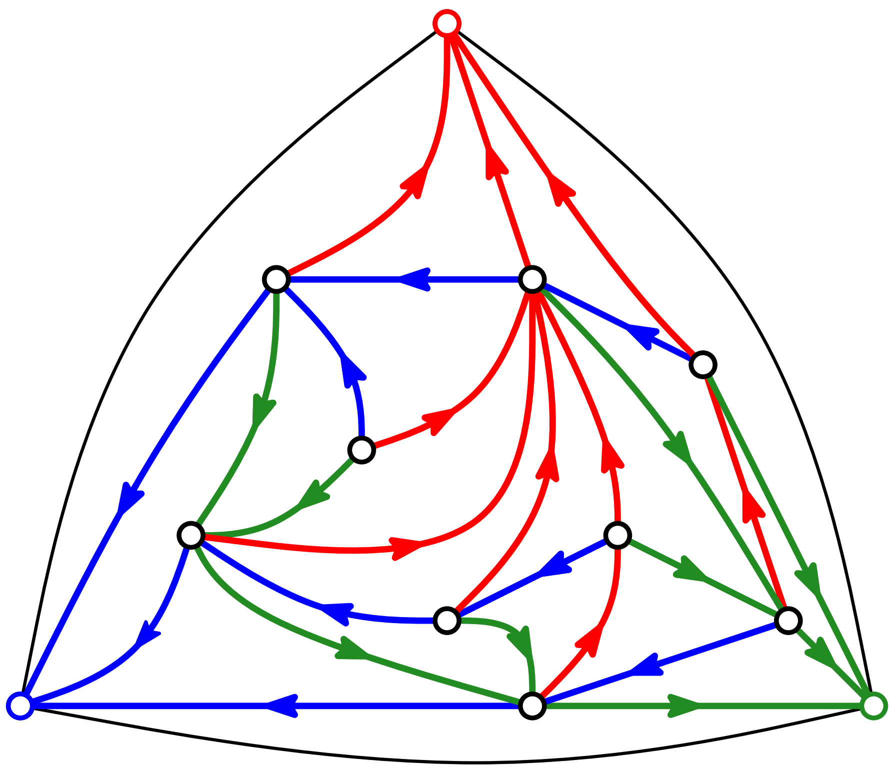
$$\mathrm{out}(v) = \alpha(v), \text{ pour tout } v$$

[Propp '93], [Ossona de Mendez '94], [Felsner '04]

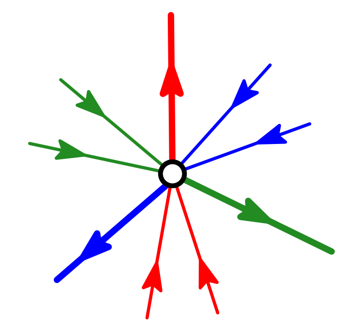
Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Schnyder woods [Schnyder '89] : motivation initiale.

Plus de détails : ce soir et demain.



Orientation et coloriage des arêtes d'une triangulation simple tels qu'autour de chaque sommet interne :

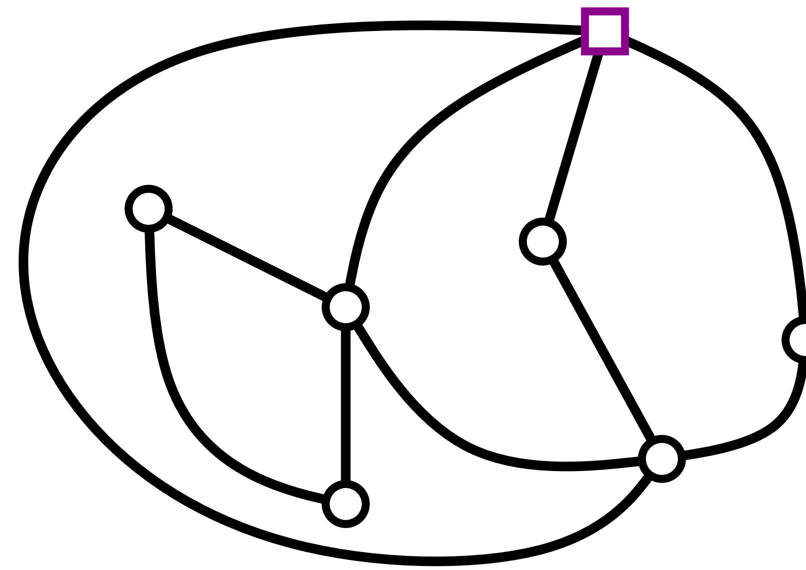


En particulier $\mathrm{out}(v) = 3$ pour tout sommet interne v.

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

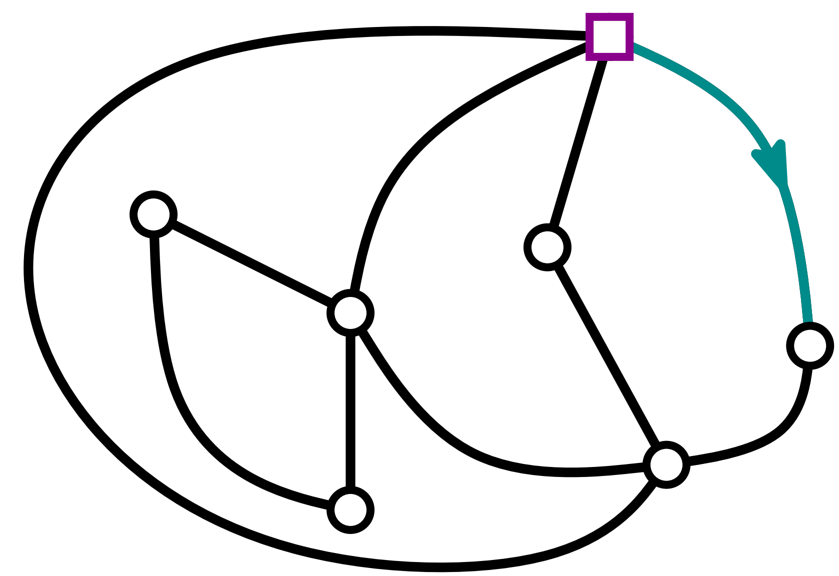
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

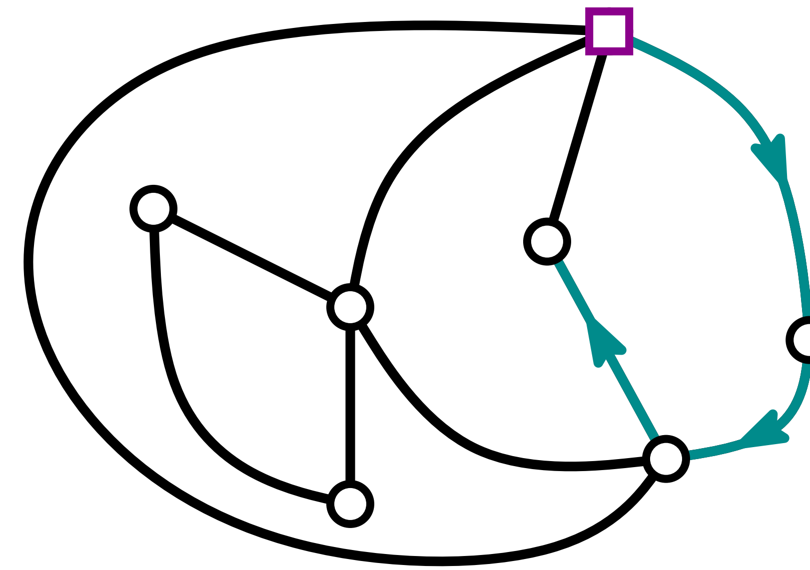
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

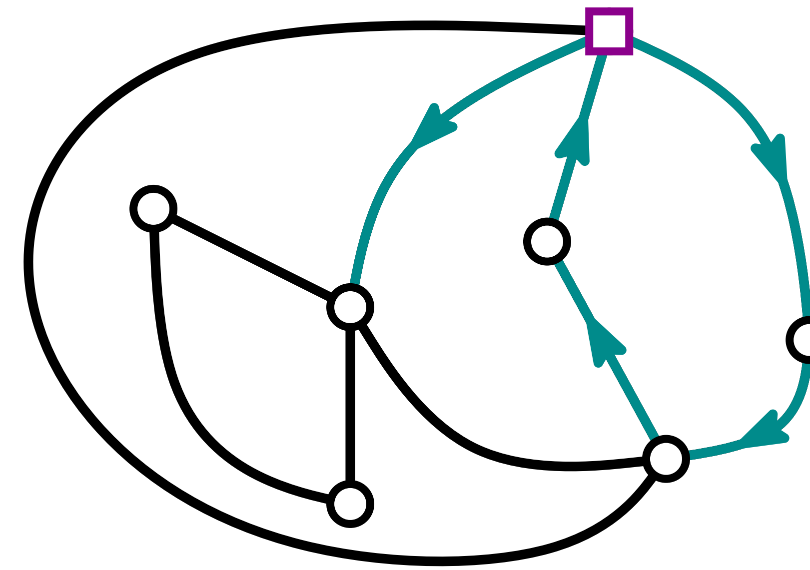
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

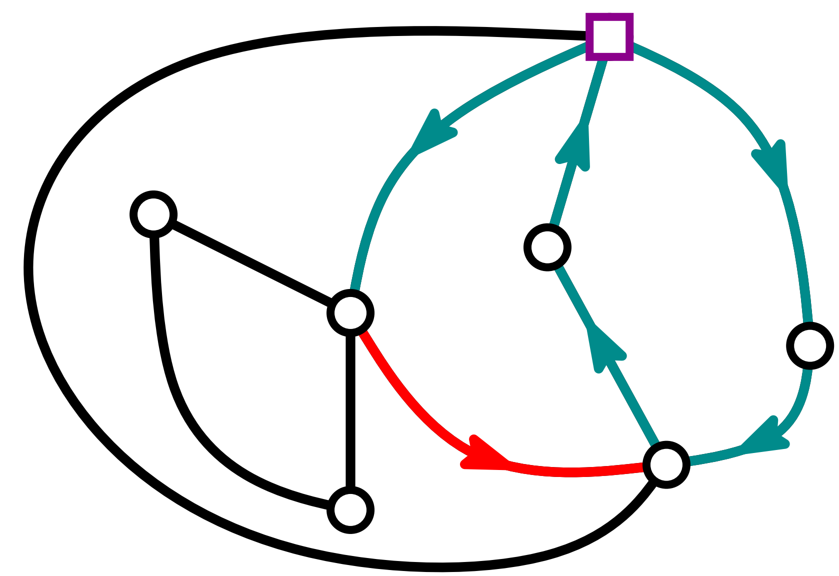
Orientations eulériennes :

Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

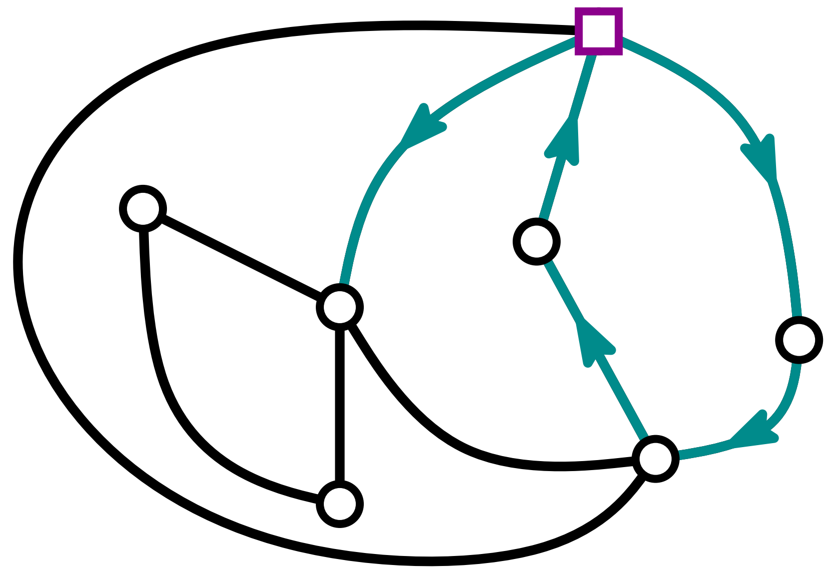


Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

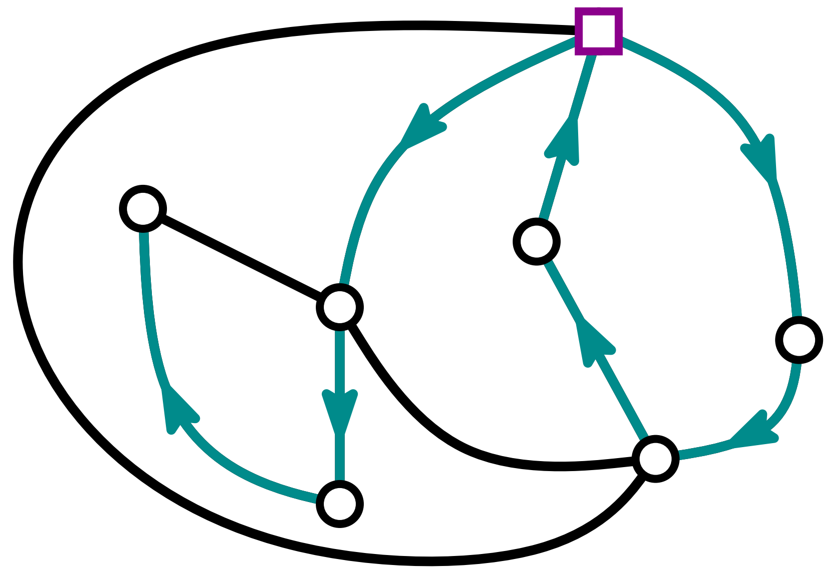
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

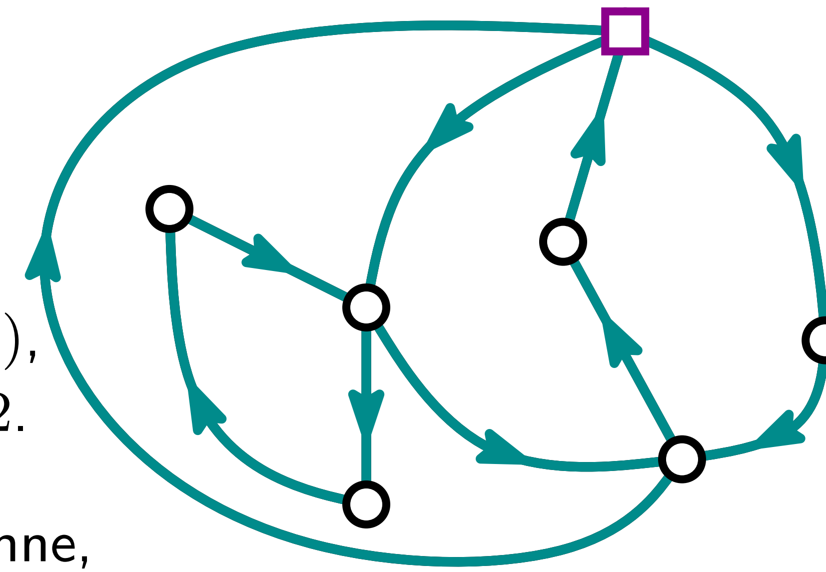
Orientations eulériennes :

Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :



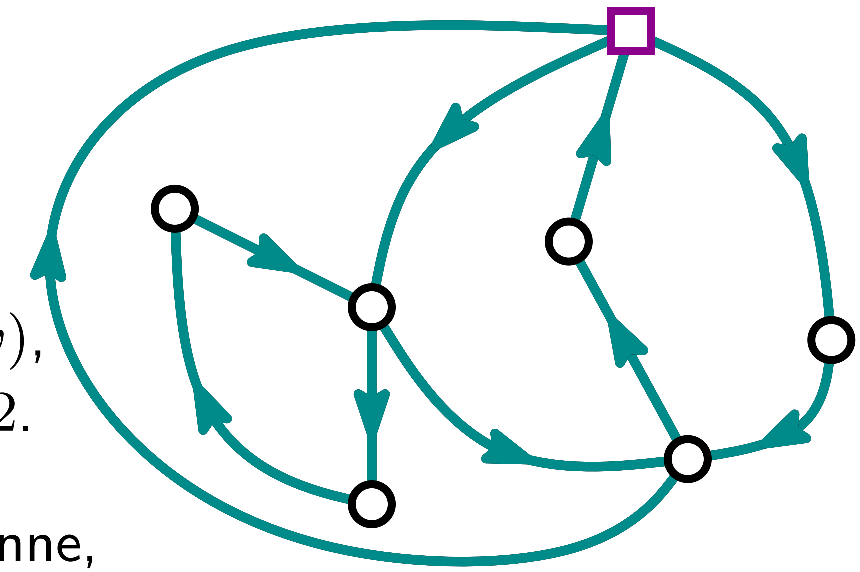
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.

Orientation eulérienne : pour tout sommet v, $\mathrm{in}(v) = \mathrm{out}(v)$,
i.e. $\mathrm{out}(v) = \deg(v)/2$.

Chaque parcours définit naturellement une orientation eulérienne, obtenue en orientant les arêtes dans leur sens de parcours.

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :



Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.

Orientation eulérienne : pour tout sommet v, $\mathrm{in}(v) = \mathrm{out}(v)$,
i.e. $\mathrm{out}(v) = \deg(v)/2$.

Chaque parcours définit naturellement une orientation eulérienne, obtenue en orientant les arêtes dans leur sens de parcours.

Théorème : Euler (1759), Hierholzer (1873)

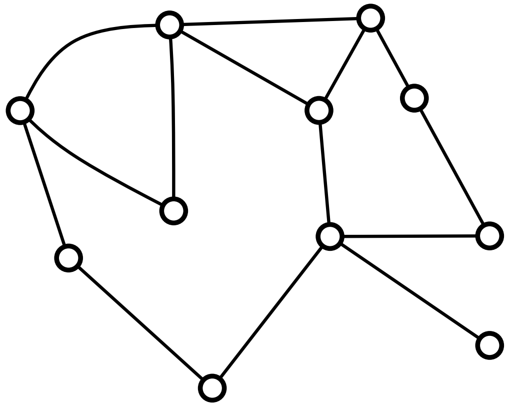
Un graphe connexe admet un parcours ssi il est eulérien (= degré pair $\forall v$).

$\Rightarrow$ Un graphe admet une orientation eulérienne ssi il est eulérien.

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

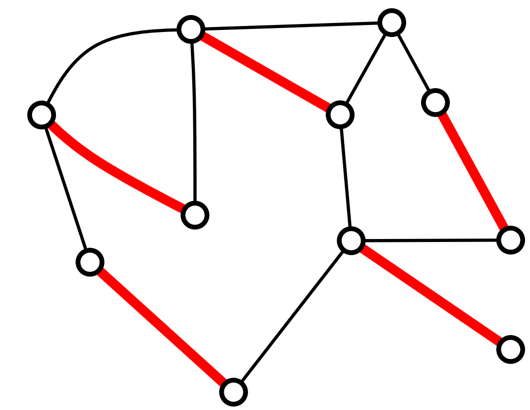
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

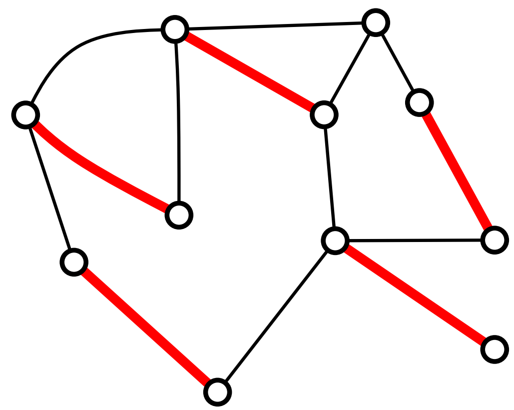


Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

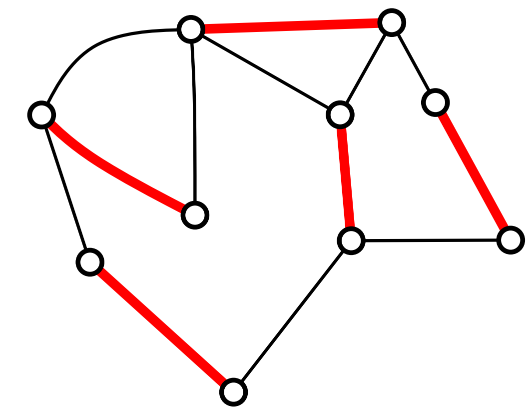


Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.



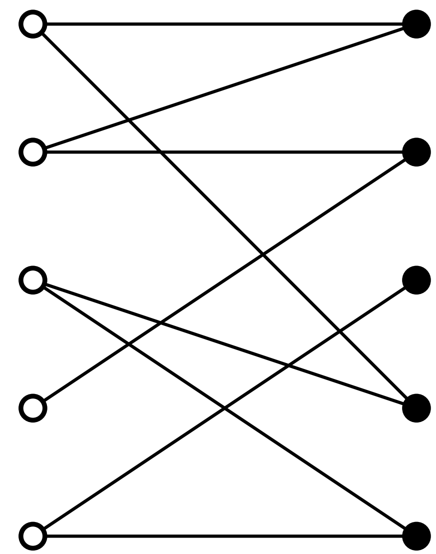
Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 



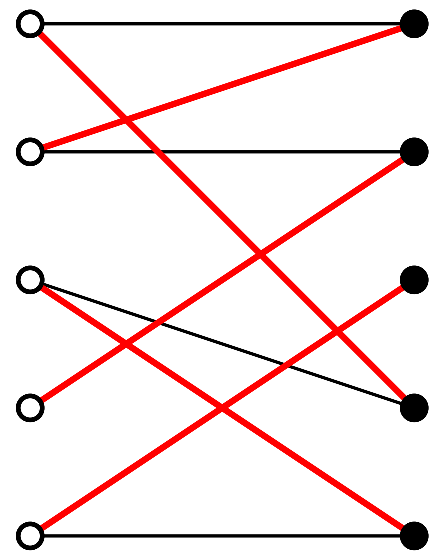
Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

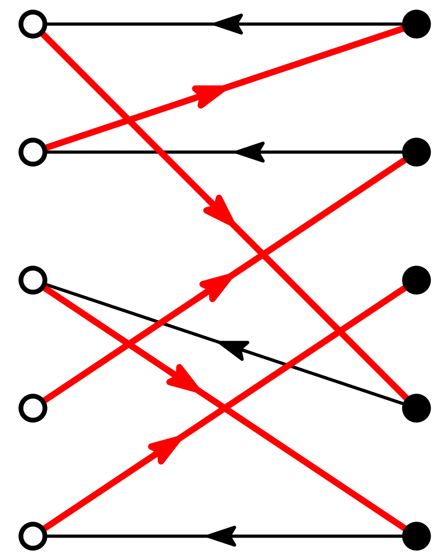
Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 



Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :



Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\bullet) = \deg - 1 \\ \alpha(\circ) = 1\end{array}\right\}$$ Les couplages parfaits d'un graphe biparti et ses α-orientations sont en bijection.

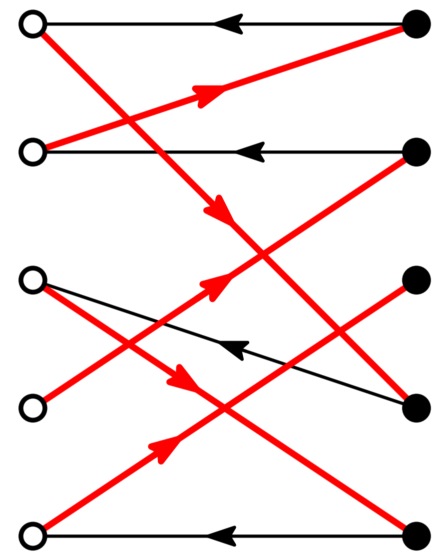
Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

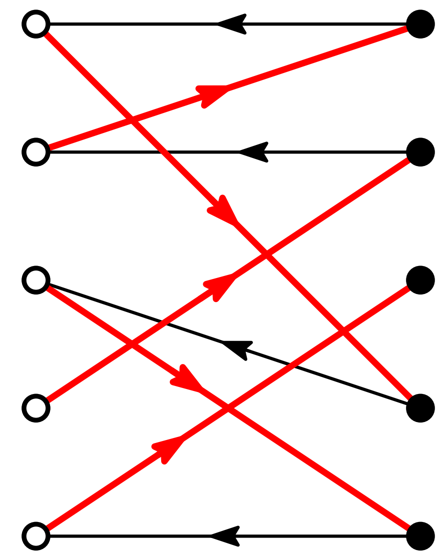


$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\bullet) = \deg - 1\\ \alpha(\circ) = 1\end{array}\right\}$$ Les couplages parfaits d'un graphe biparti et ses α-orientations sont en bijection.

Peut-on garantir l'existence d'un couplage parfait ?

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :



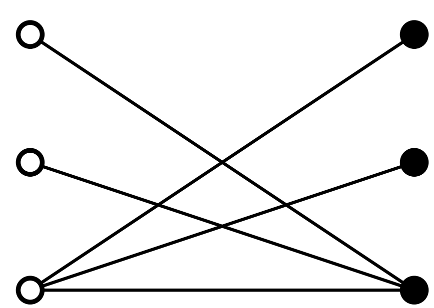
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\bullet) = \deg - 1\\ \alpha(\circ) = 1\end{array}\right\}$$ Les couplages parfaits d'un graphe biparti et ses α-orientations sont en bijection.

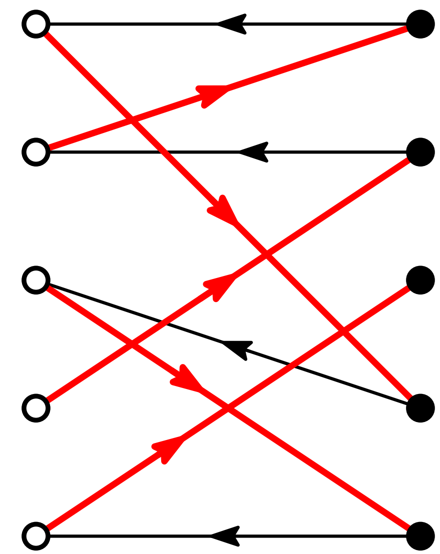
Peut-on garantir l'existence d'un couplage parfait ?



Couplage parfait ?

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :



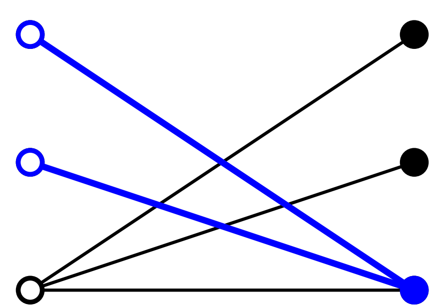
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\bullet) = \deg - 1 \\ \alpha(\circ) = 1\end{array}\right\}$$ Les couplages parfaits d'un graphe biparti et ses α-orientations sont en bijection.

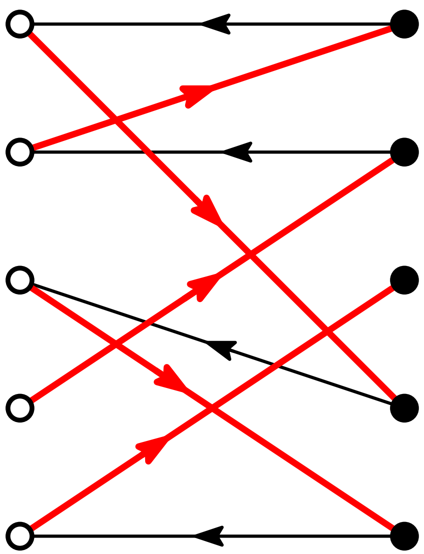
Peut-on garantir l'existence d'un couplage parfait ?



Couplage parfait ?
NON

Pourquoi les α-orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :



Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus a une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(\bullet) = \deg - 1\\ \alpha(\circ) = 1\end{array}\right\}$$ Les couplages parfaits d'un graphe biparti et ses α-orientations sont en bijection.

Théorème : Hall (1935)

Un graphe biparti admet un couplage parfait ssi $\forall\ W =$ sous-ensemble de sommets blancs, $|W| \leq \left| \cup_{w \in W} \{ \text{ voisins de } w \} \right|$

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** $(=$ "feasible"$)$ ssi il existe une α-orientation de M

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** $(=$ "feasible"$)$ ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

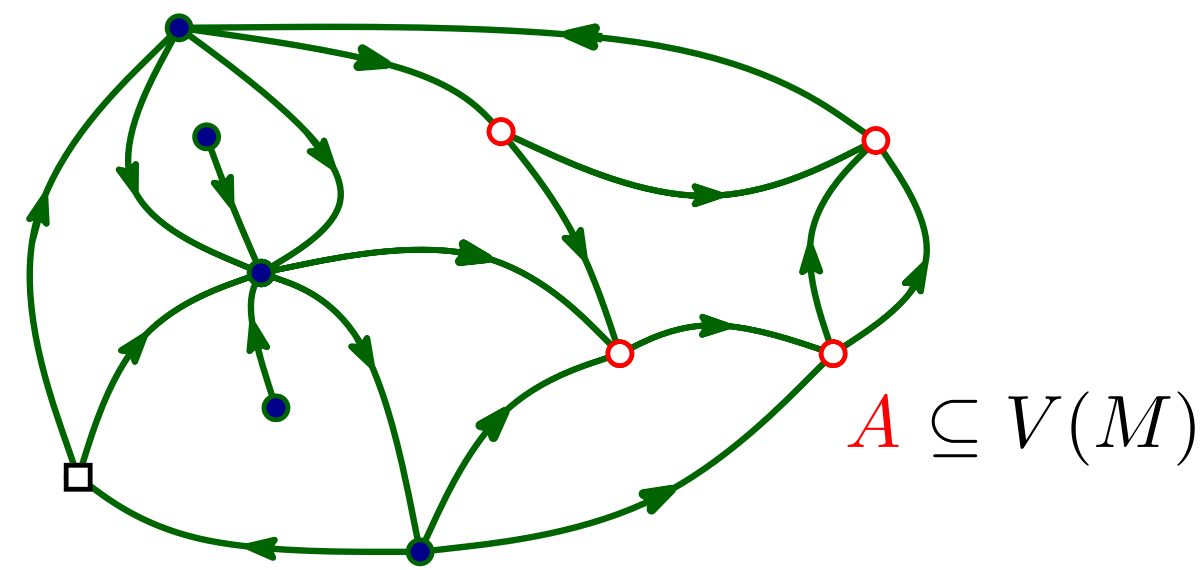
II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$



II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

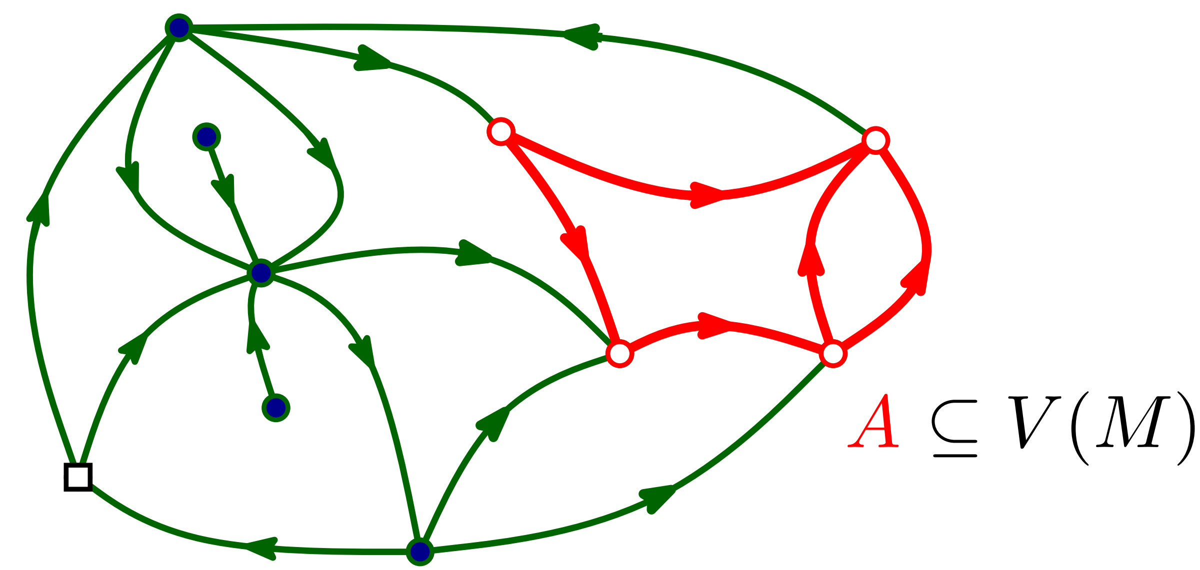
M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

Existence d'orientations : conditions nécessaires

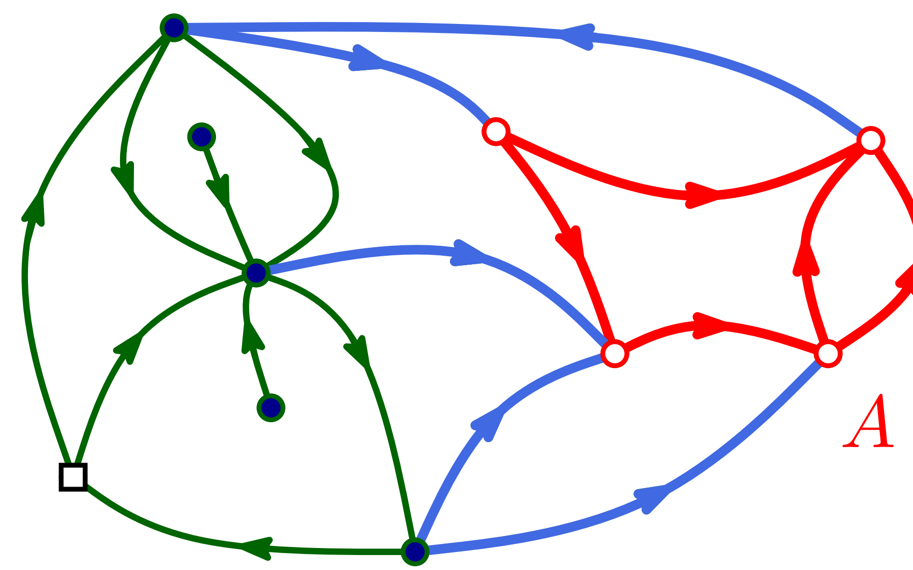
M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

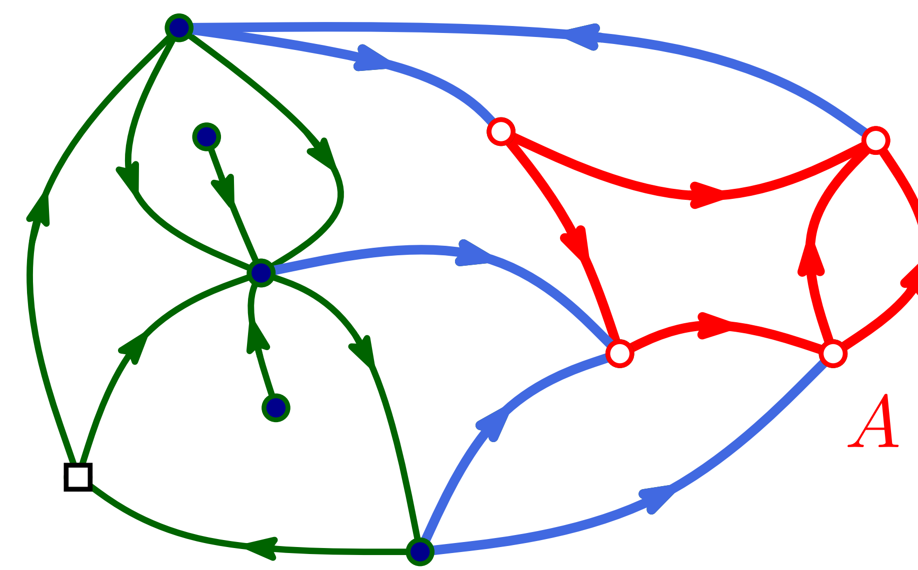
1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$



$A \subseteq V(M)$

$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

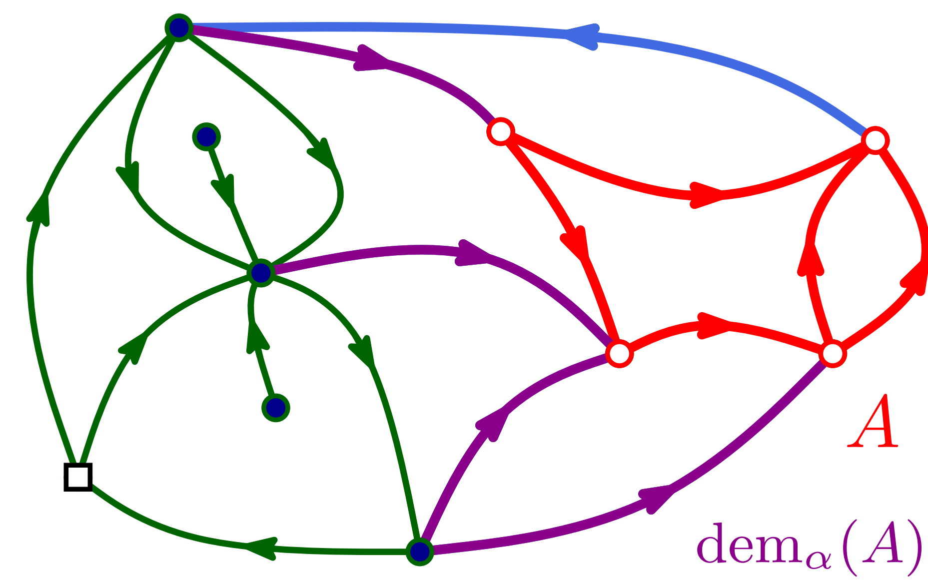
1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

$$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

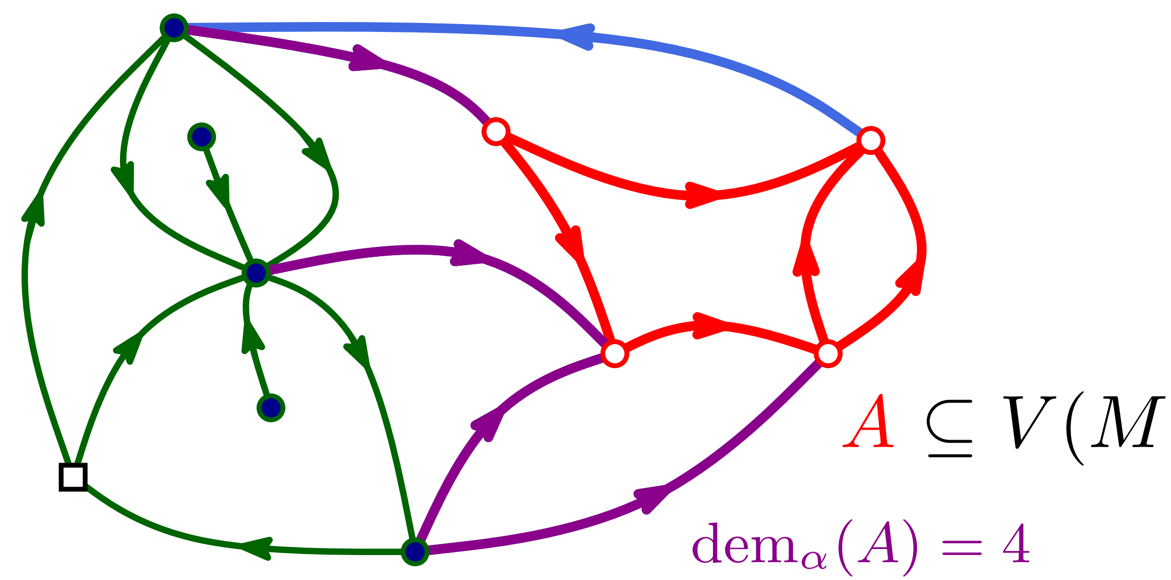
$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

$$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de A ≈ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

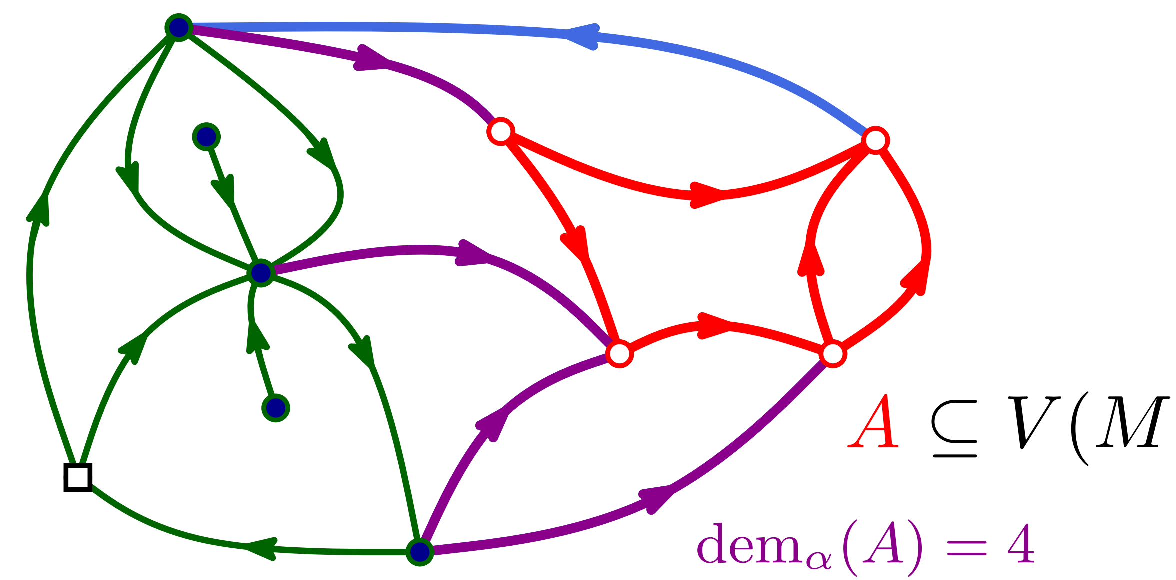
M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\mathrm{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

$$\mathrm{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\mathrm{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$ pointant vers A

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
$\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ α est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α-orientation de M

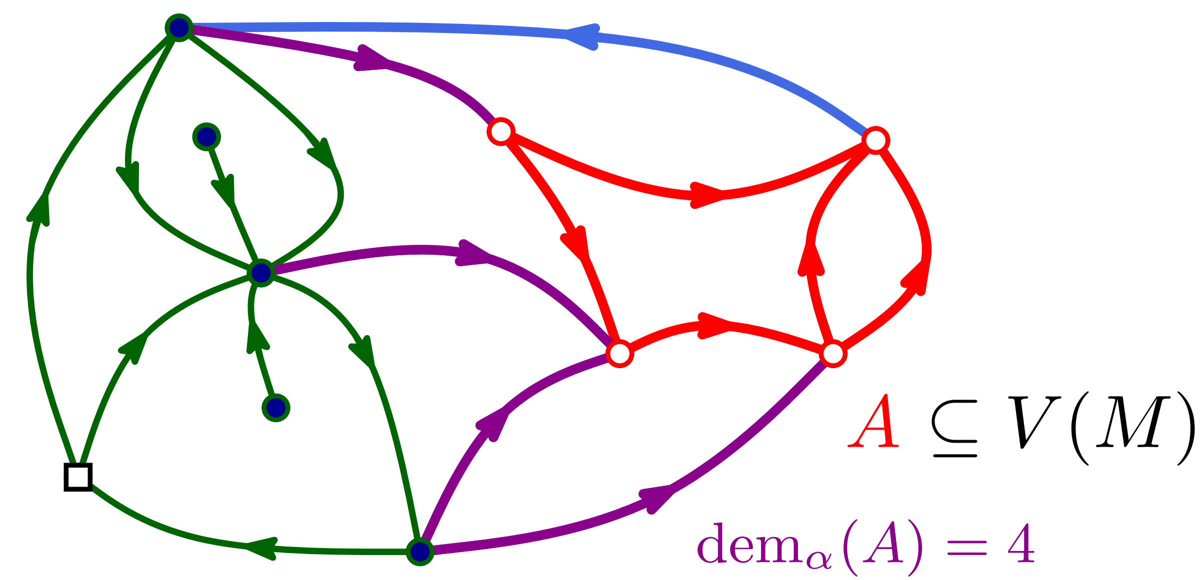
Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,
$$0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$$

Théorème :

Ces conditions sont suffisantes.



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\mathrm{cut}}[A]$ = arêtes avec une seule extrémité dans A

$$\mathrm{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\mathrm{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$ pointant vers A

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

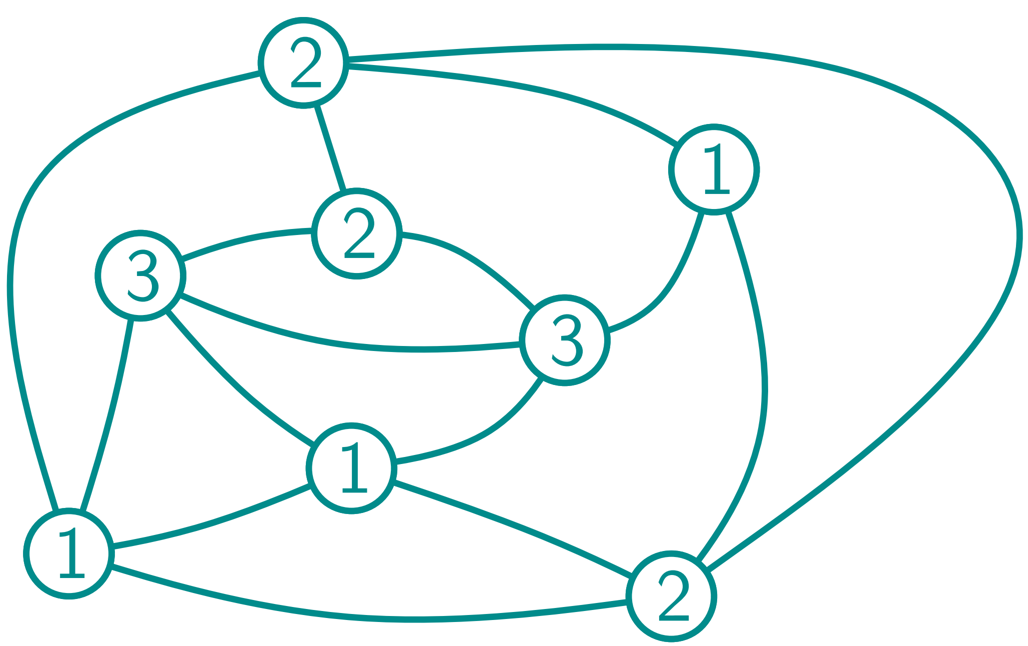
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

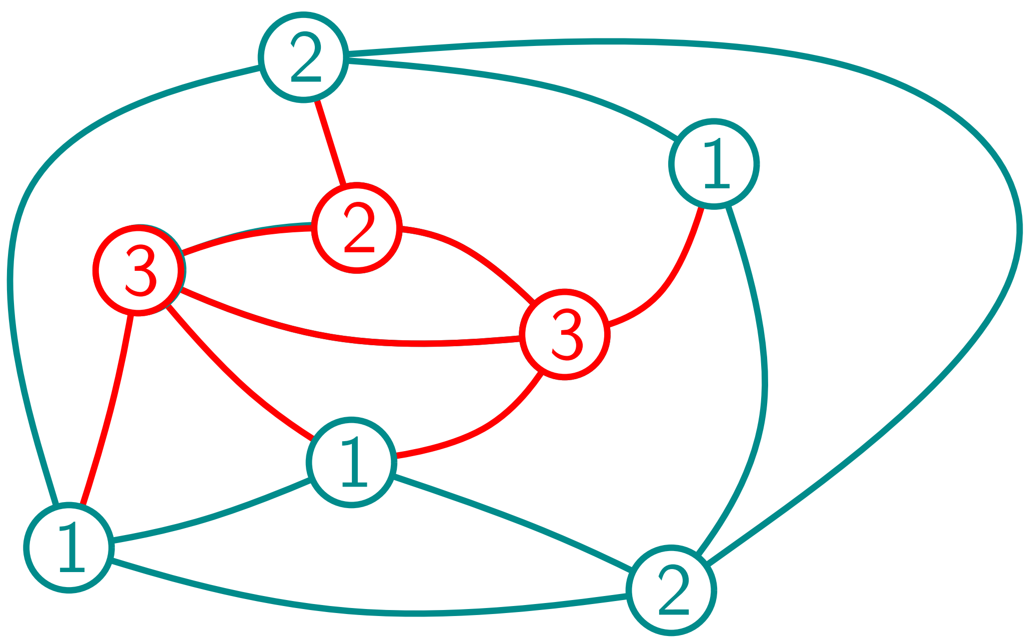
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

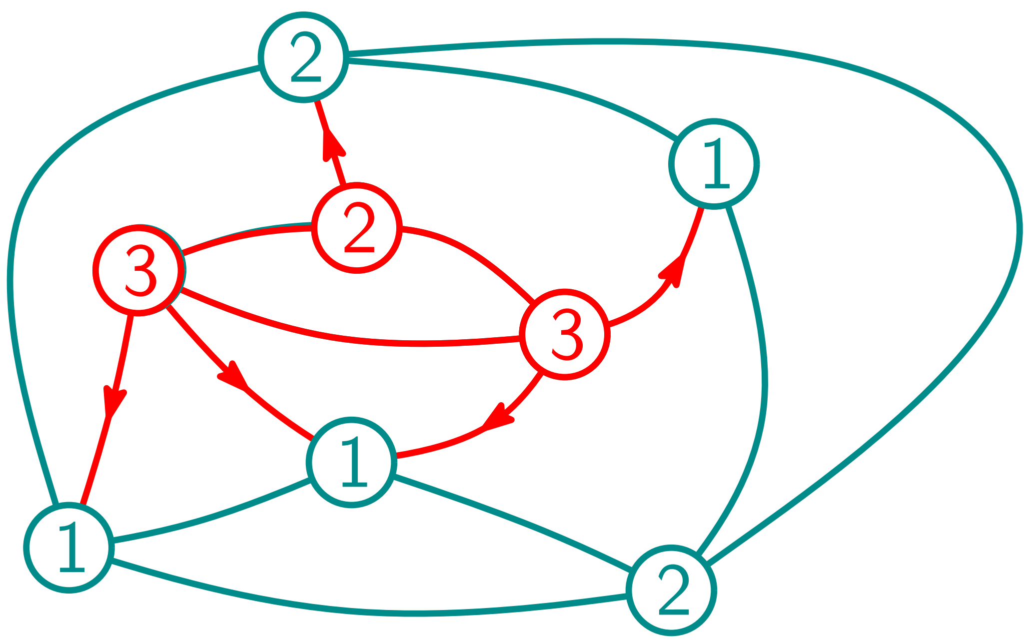
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

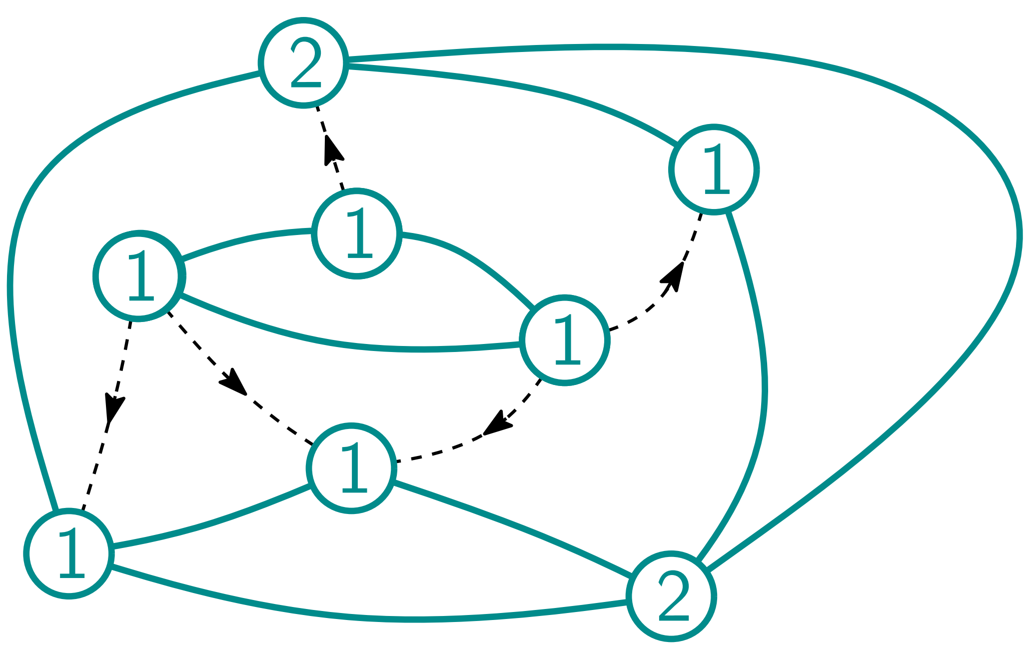
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists\ A$ tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  - a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  - b) actualiser α.

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

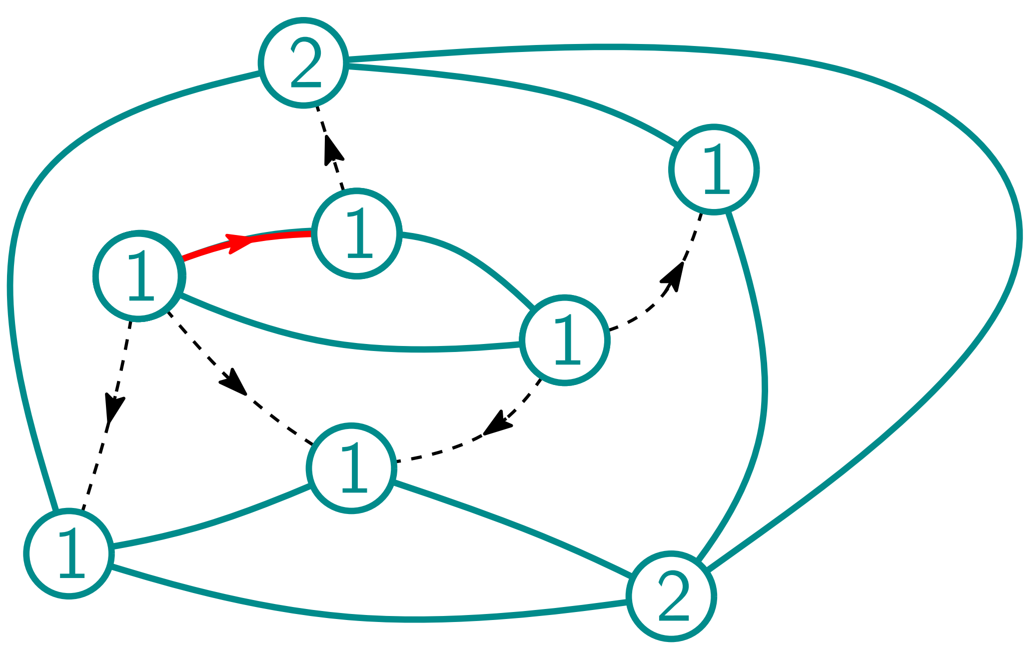
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  - a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  - b) actualiser α.
- Orienter une arête arbitrairement

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

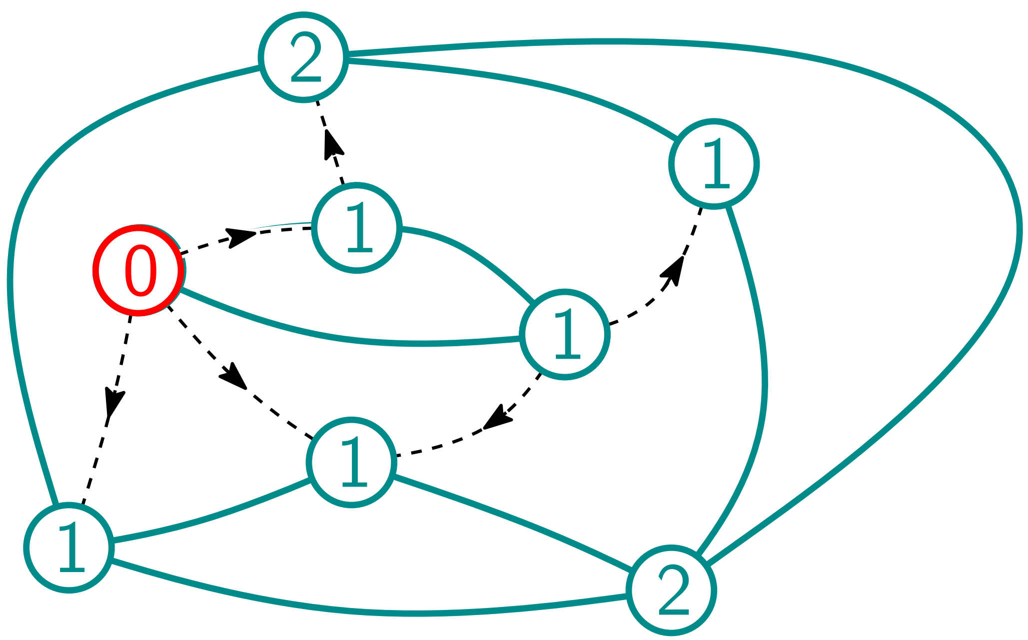
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  b) actualiser α.

- Orienter une arête arbitrairement
  + actualiser α.

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

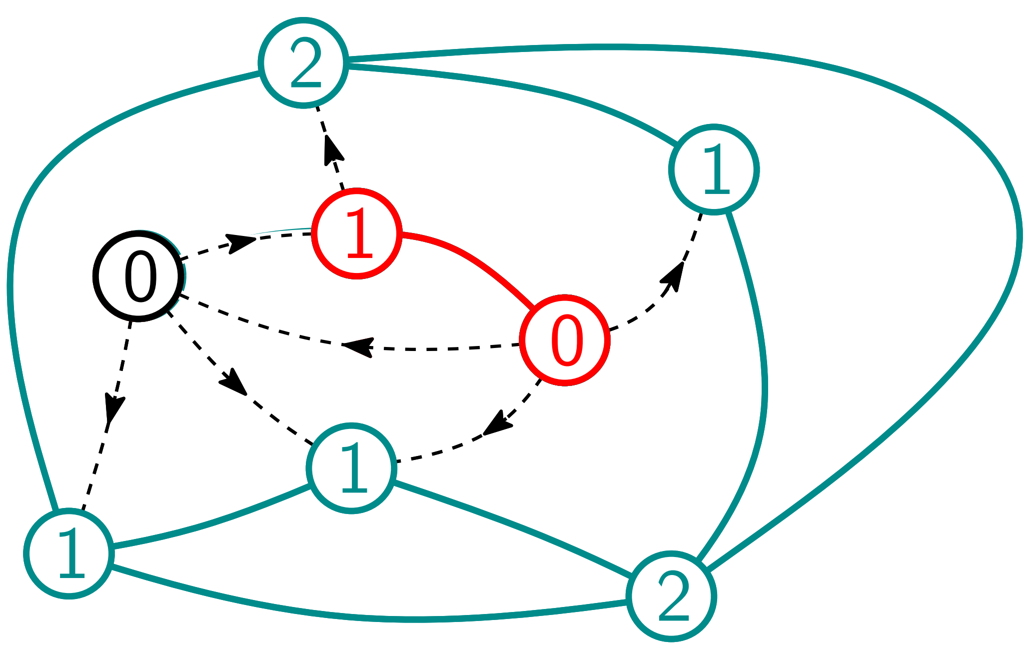
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  b) actualiser α.
- Orienter une arête arbitrairement
  $+$ actualiser α.

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

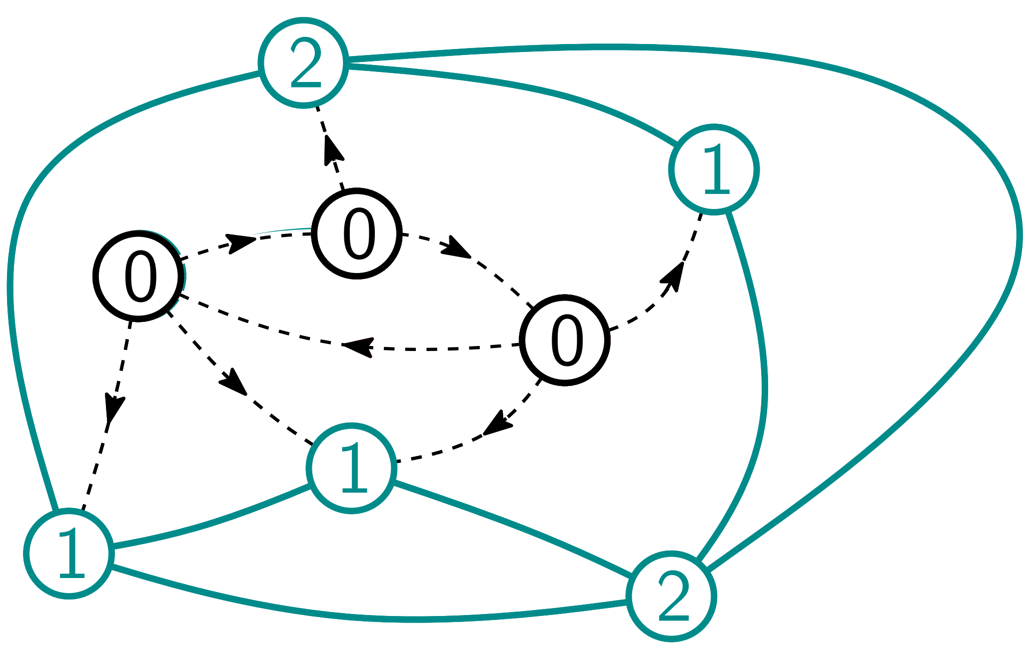
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  - a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  - b) actualiser α.
- Orienter une arête arbitrairement + actualiser α.

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

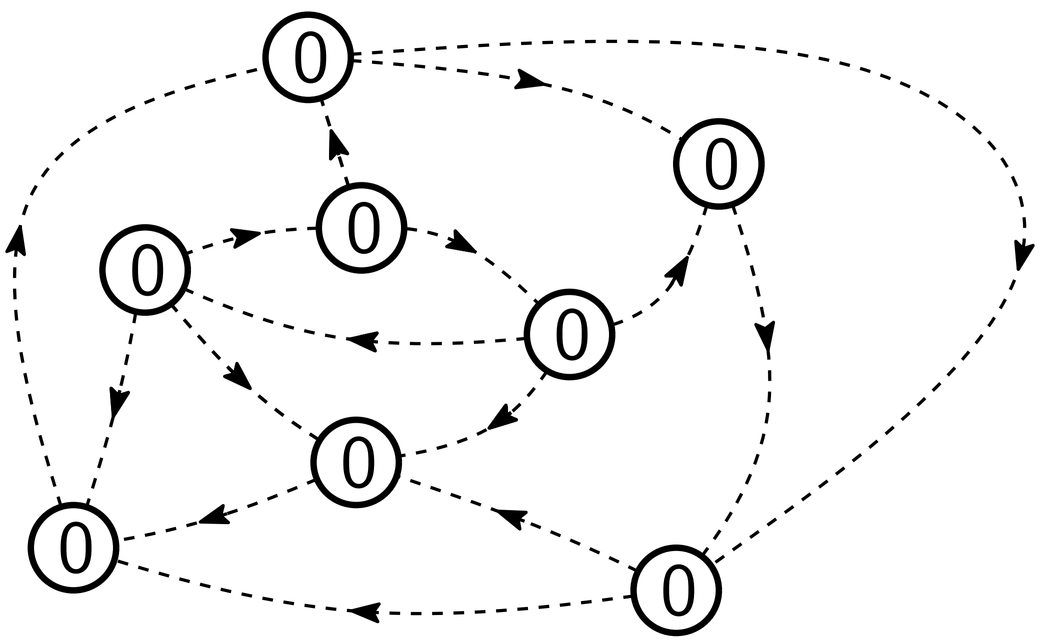
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  b) actualiser α.

- Orienter une arête arbitrairement
  $+$ actualiser α.

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

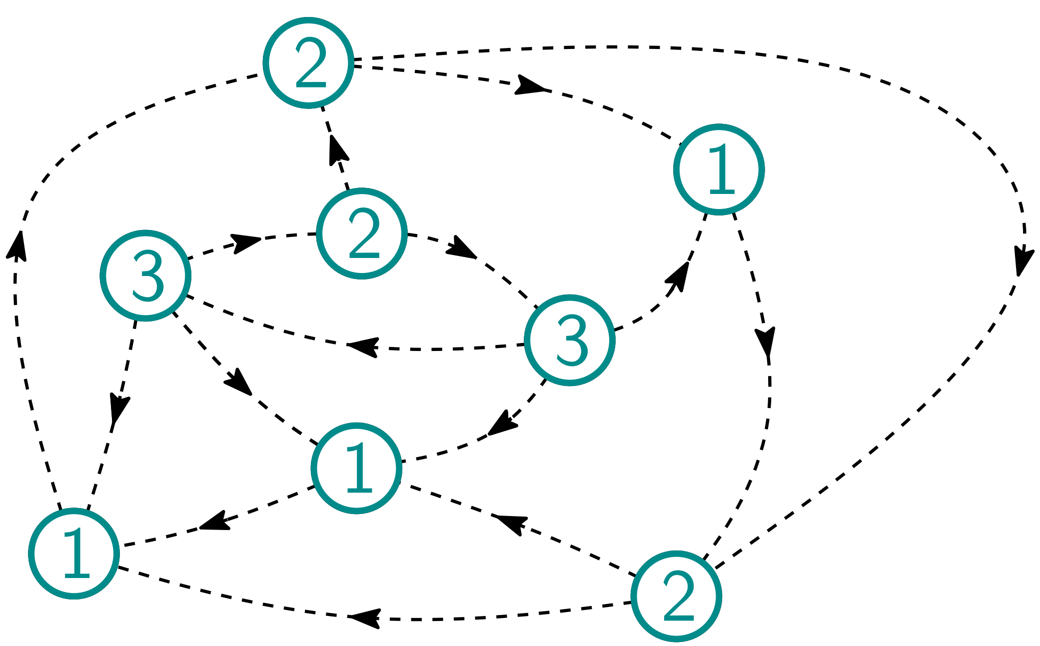
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\mathrm{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \mathrm{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\mathrm{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists$ A tel que $\mathrm{dem}_\alpha(A) = 0$,
  a) orienter les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}[A]$,
  b) actualiser α.
- Orienter une arête arbitrairement
  $+$ actualiser α.

Ensemble des α-orientations

$$\left.\begin{array}{l}M \text{ carte plane}\\ \alpha \text{ faisable}\end{array}\right\} \text{Que peut-on dire des } \alpha\text{-orientations ?}$$

Ensemble des α-orientations

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ carte plane} \\ \alpha \text{ faisable} \end{array}\right\} \text{Que peut-on dire des } \alpha\text{-orientations ?}$$

1 - Arêtes rigides

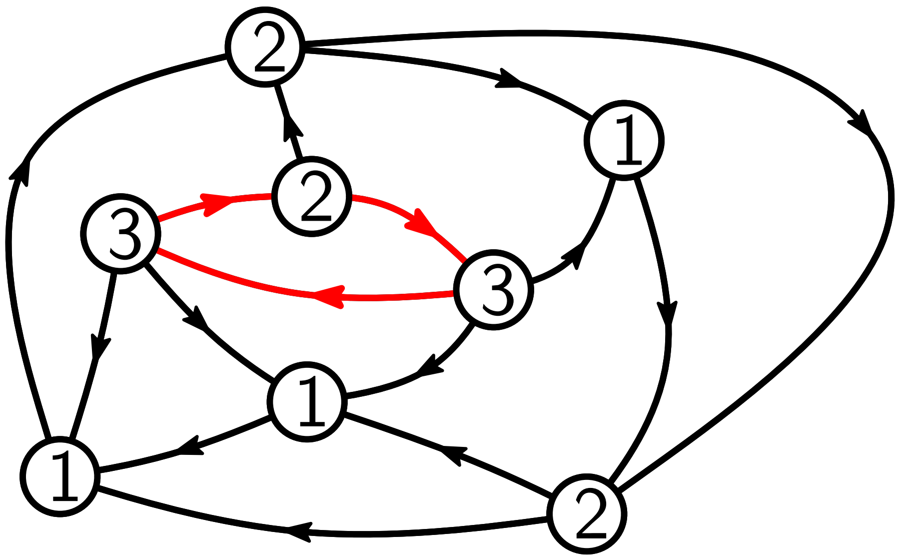
s'il existe A tel que ou $\begin{cases} \mathrm{dem}_\alpha(A) = 0 \\ \mathrm{dem}_\alpha(A) = |E_{\mathrm{cut}}(A)| \end{cases}$

les arêtes de $E_{\mathrm{cut}}(A)$ sont **rigides** ($=$ pas de choix pour leur orientation)

Ensemble des α-orientations

$\left.\begin{array}{l} M \text{ carte plane} \\ \alpha \text{ faisable} \end{array}\right\}$ Que peut-on dire des α-orientations ?

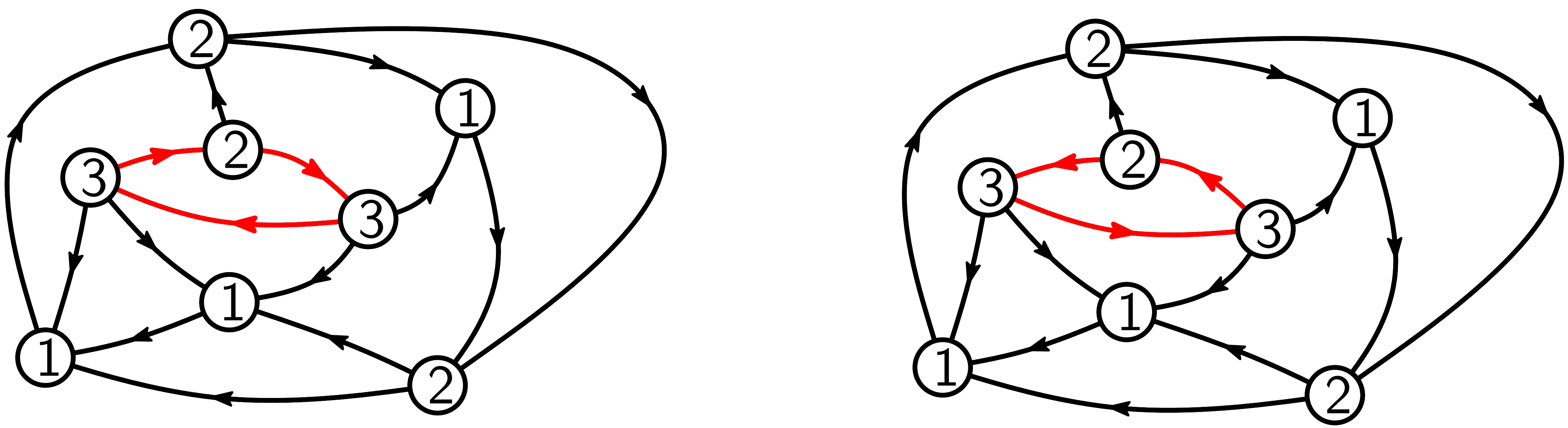
2 - Cycles



Ensemble des α-orientations

$\left.\begin{array}{l} M \text{ carte plane} \\ \alpha \text{ faisable} \end{array}\right\}$ Que peut-on dire des α-orientations ?

2 - Cycles

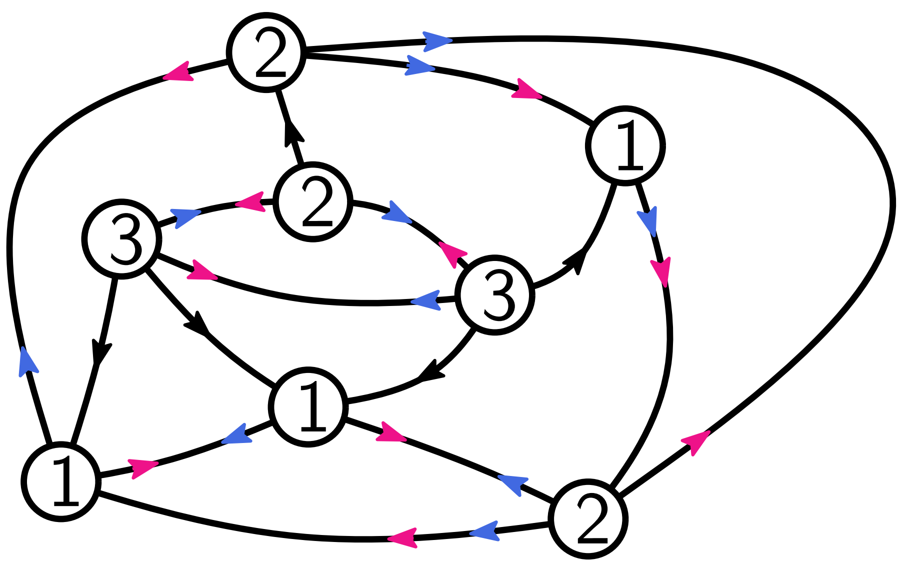


Le retournement d'un cycle produit une nouvelle α-orientation.

Ensemble des α-orientations

$\left.\begin{array}{l} M \text{ carte plane} \\ \alpha \text{ faisable} \end{array}\right\}$ Que peut-on dire des α-orientations ?

2 - Cycles



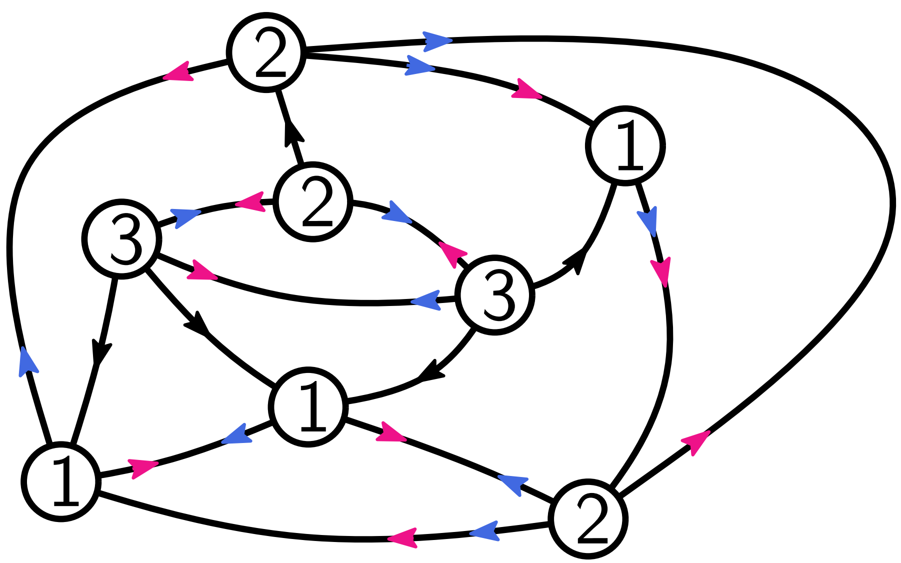
arêtes rigides

α-orientations : O_1 et O_2

Ensemble des α-orientations

$\left.\begin{array}{l} M \text{ carte plane} \\ \alpha \text{ faisable} \end{array}\right\}$ Que peut-on dire des α-orientations ?

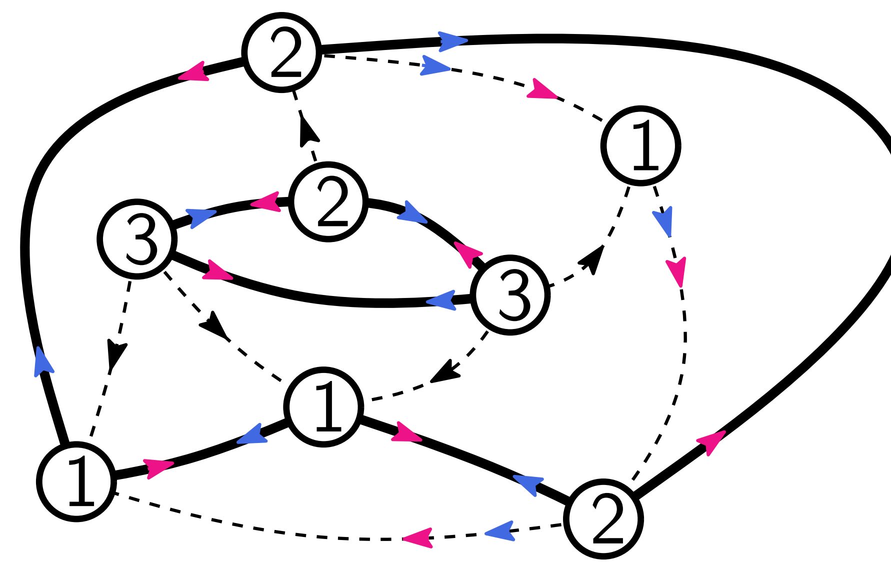
2 - Cycles



arêtes rigides

α-orientations : O_1 et O_2

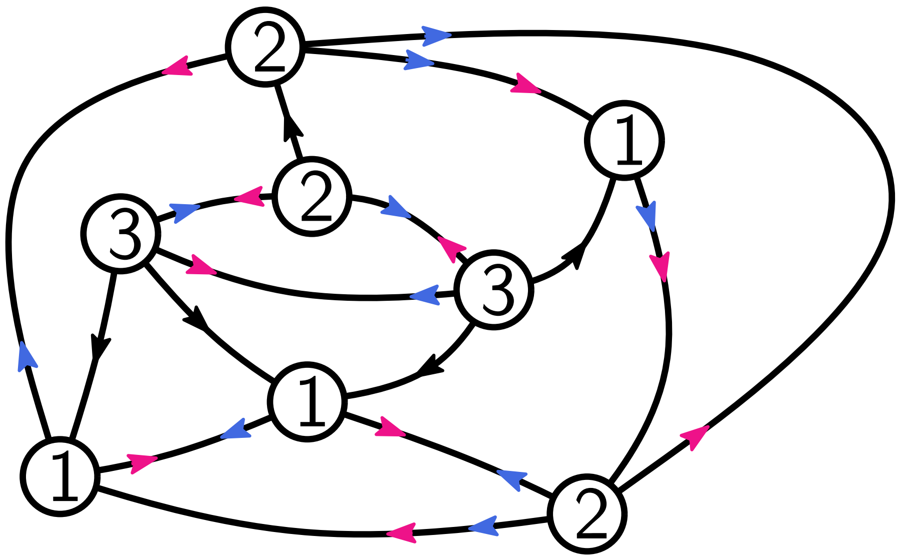
arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



Ensemble des α-orientations

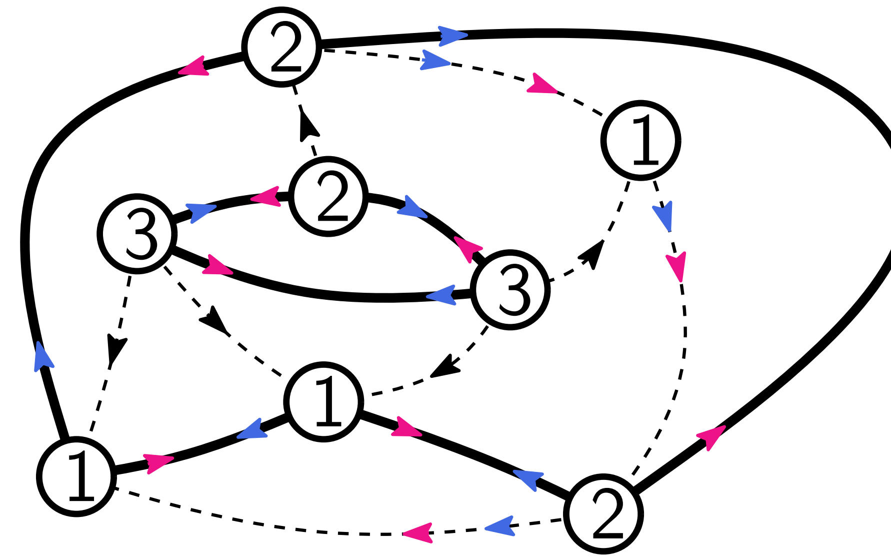
M carte plane
α faisable
} Que peut-on dire des α-orientations ?

2 - Cycles



arêtes rigides
α-orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



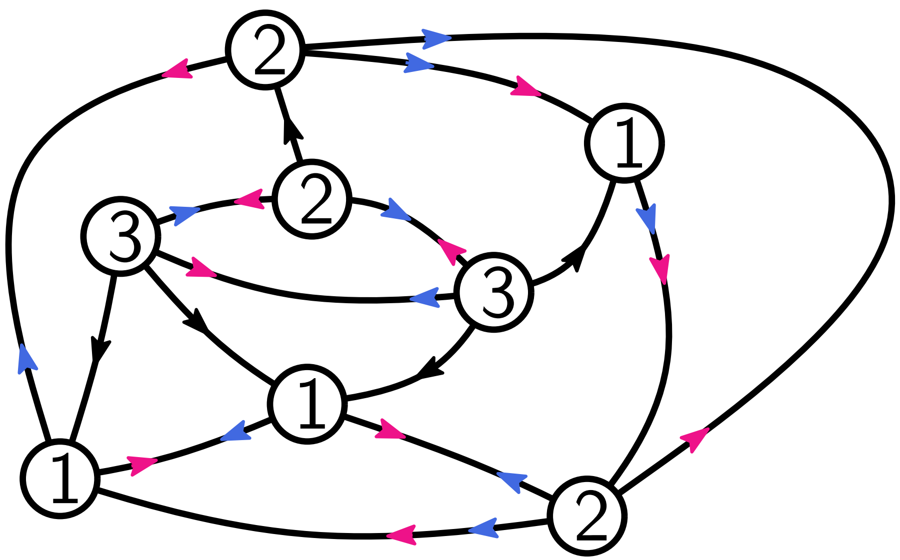
Propriété :

Tous les sommets ont degré pair.
(i.e. c'est une union de cycles)

Ensemble des α-orientations

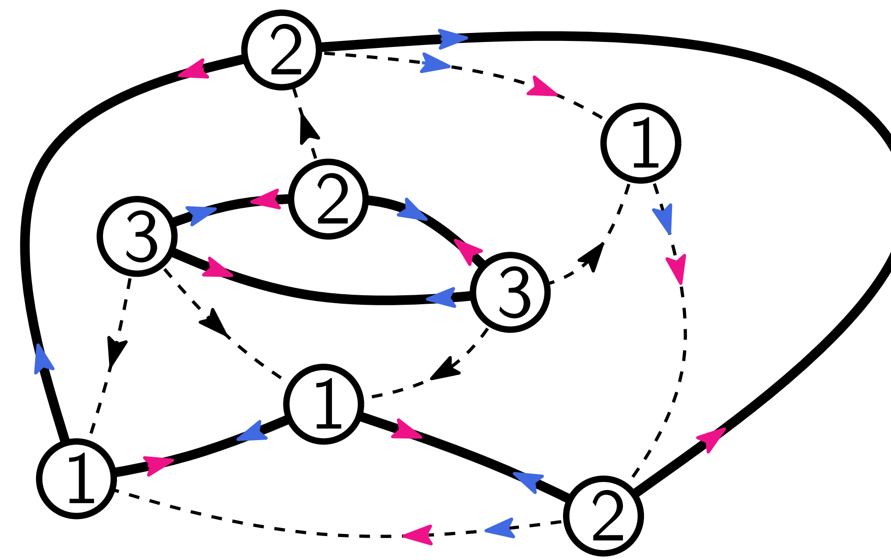
M carte plane
α faisable } Que peut-on dire des α-orientations ?

2 - Cycles



arêtes rigides
α-orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



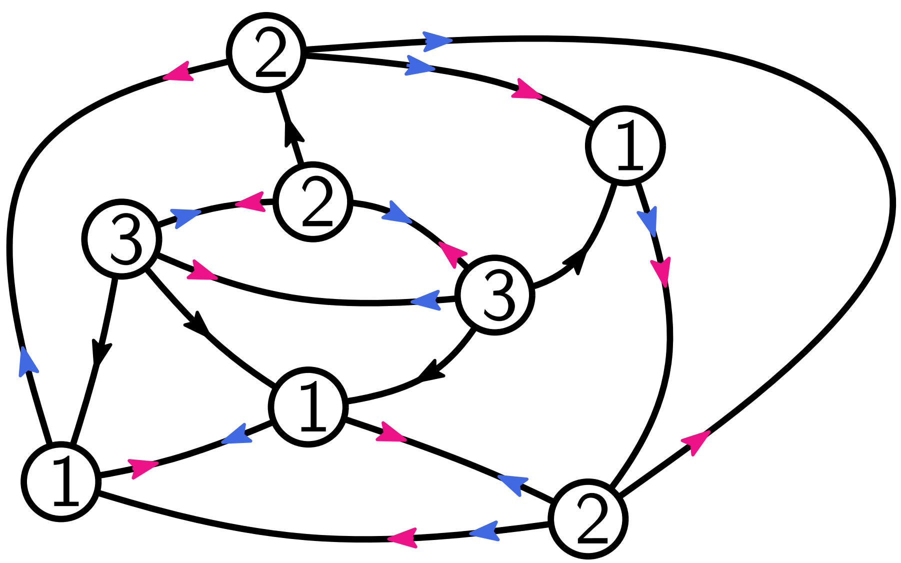
Théorème :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Ensemble des α-orientations

M carte plane
α faisable
$\Big\}$ Que peut-on dire des α-orientations ?

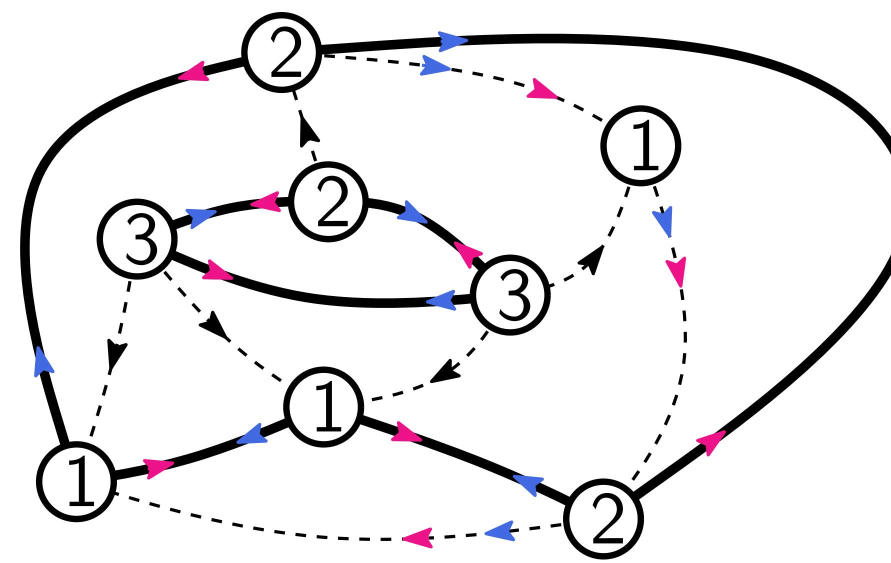
2 - Cycles



arêtes rigides

α-orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



Théorème :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Cycles essentiels

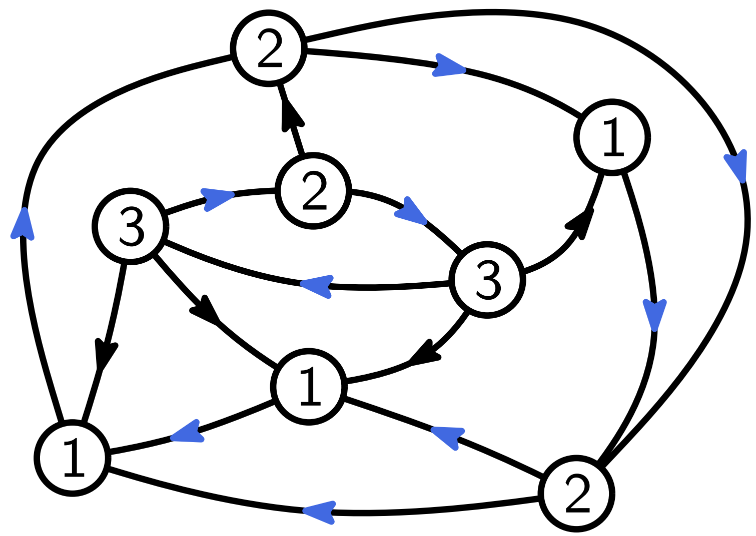
Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C =$ intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle

C est un cycle dirigé.



Cycles essentiels

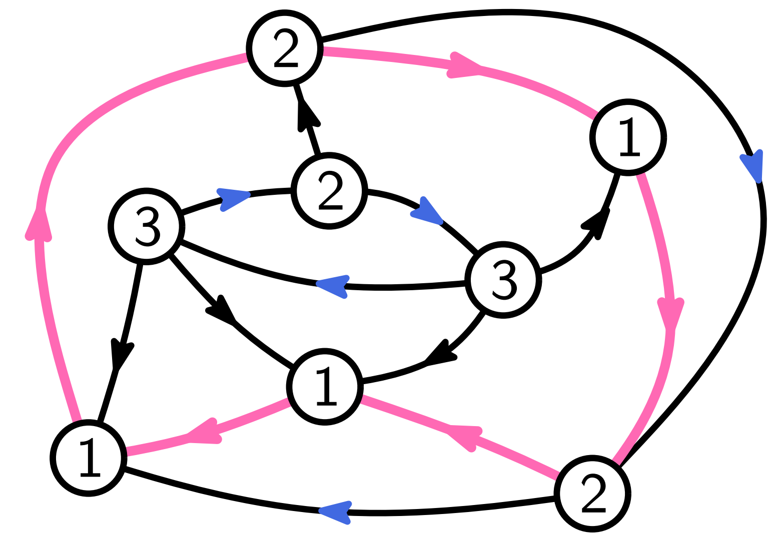
Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\mathrm{cut}}[I_C]$ est rigide (I_C = intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle

C est un cycle dirigé.



essentiel

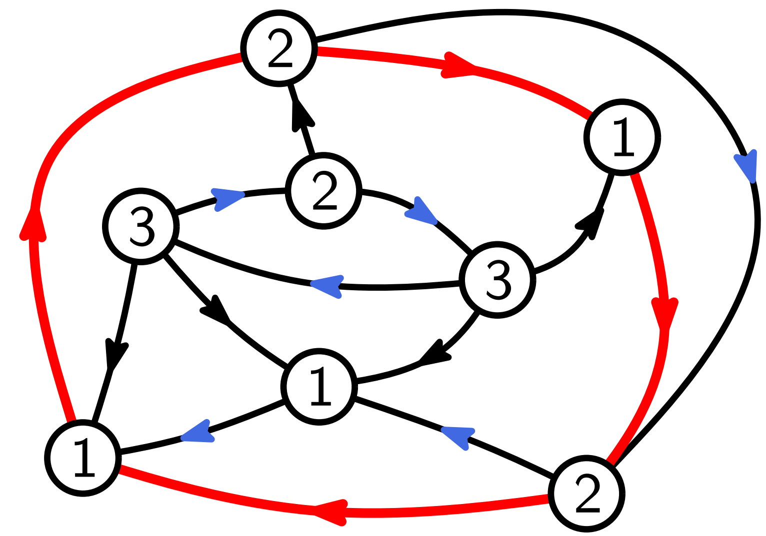
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C =$ intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



non-essentiel

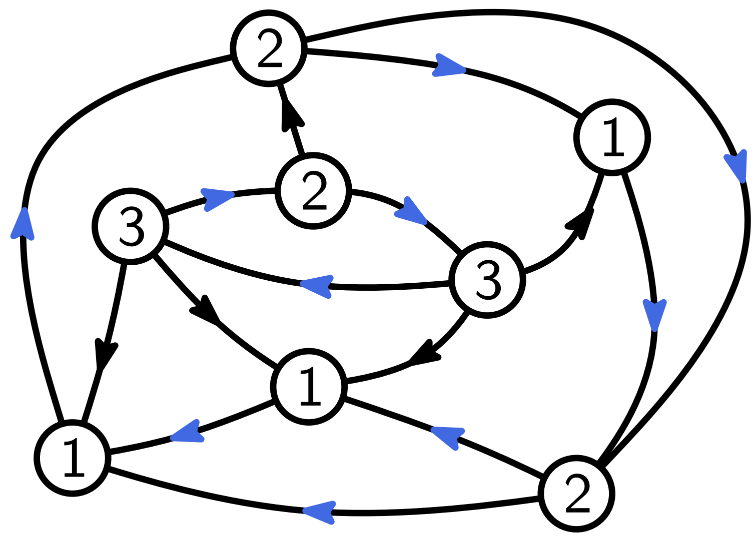
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide (I_C = intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



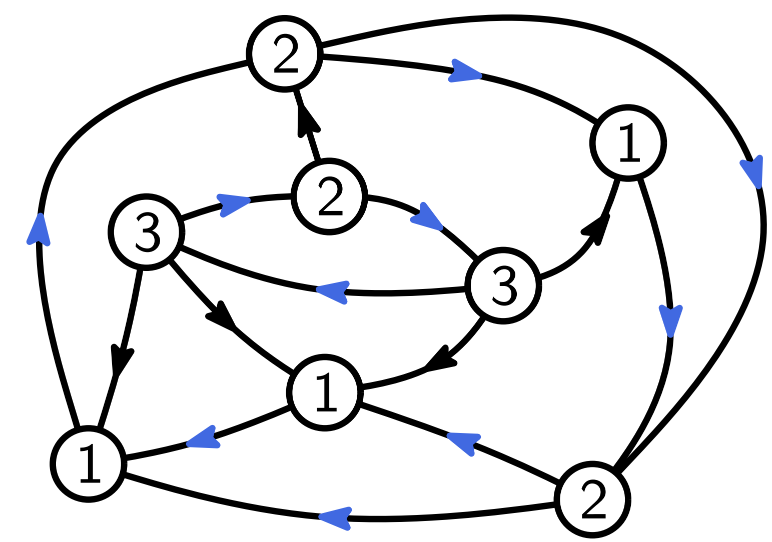
Cycles essentiels

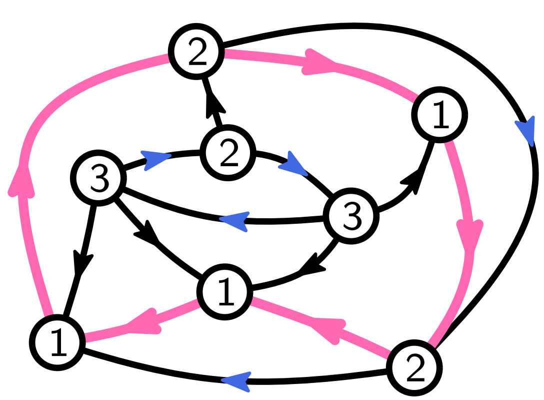
Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

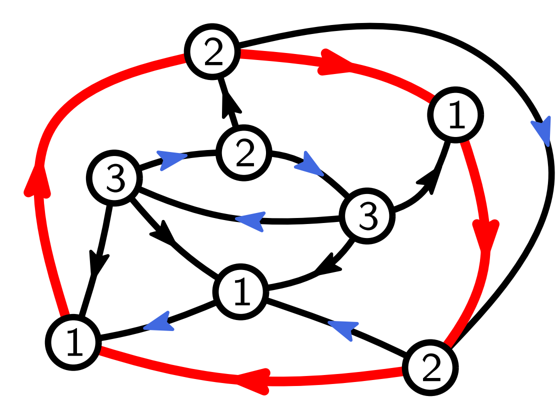
Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide (I_C = intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.





essentiel



non-essentiel

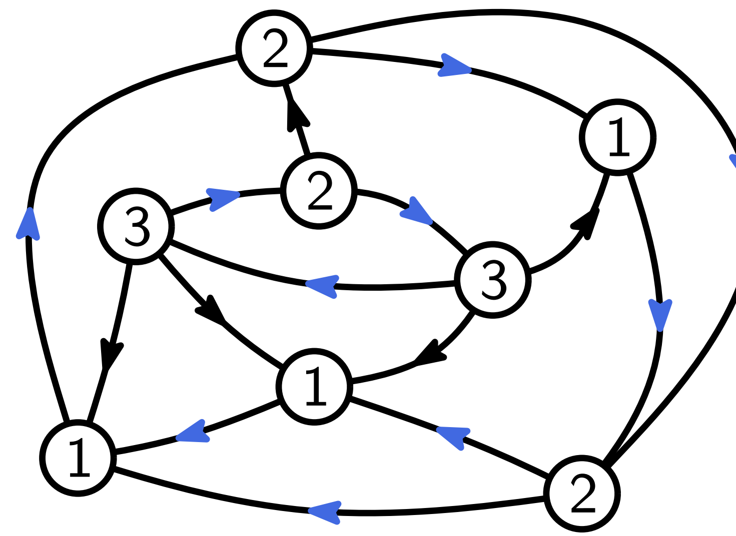
Cycles essentiels

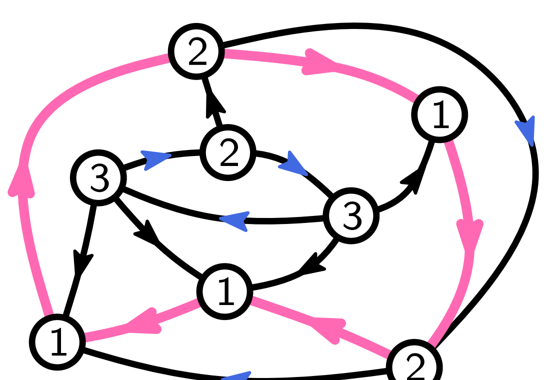
Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

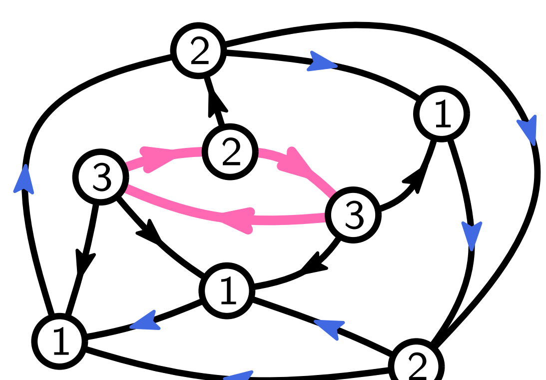
Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C =$ intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.

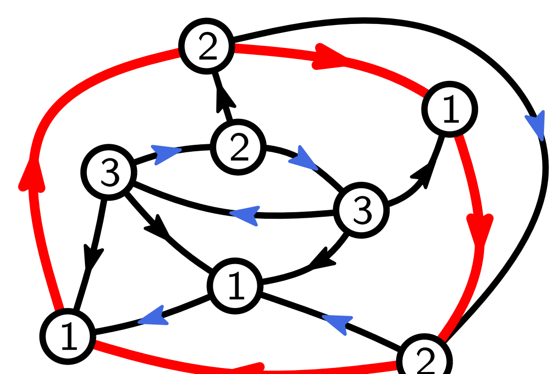




essentiel



essentiel



non-essentiel

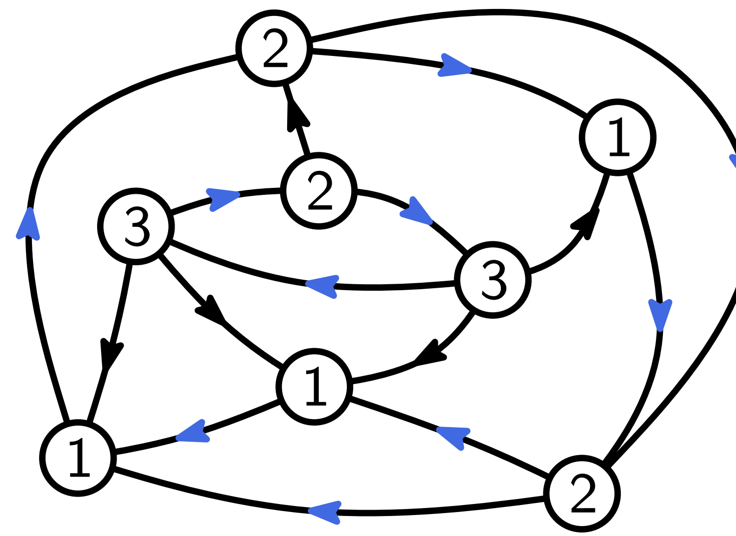
Cycles essentiels

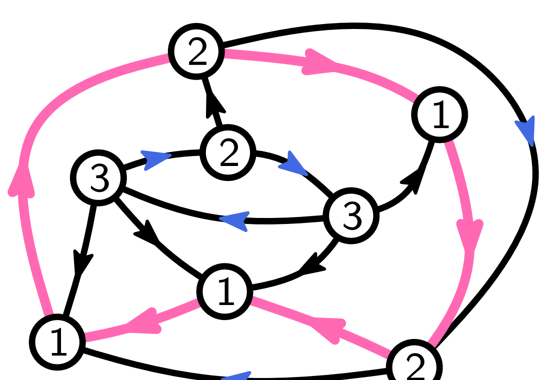
Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α-orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

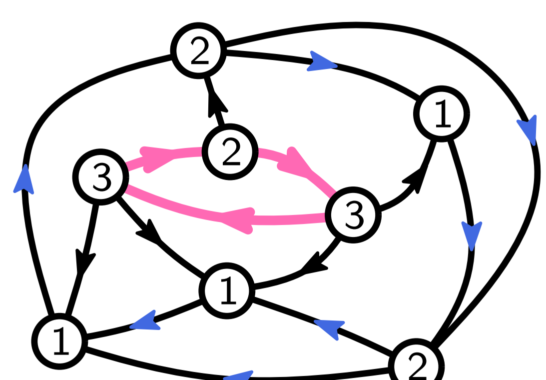
Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C =$ intérieur de C)
- il existe une α-orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.

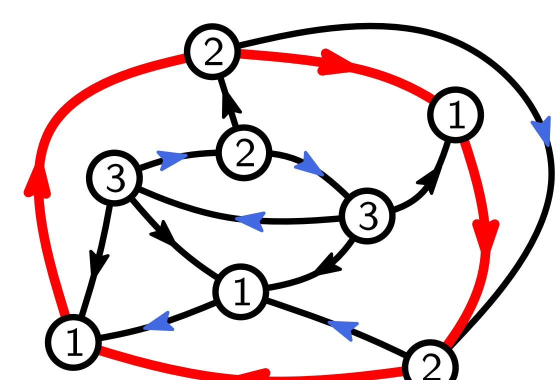




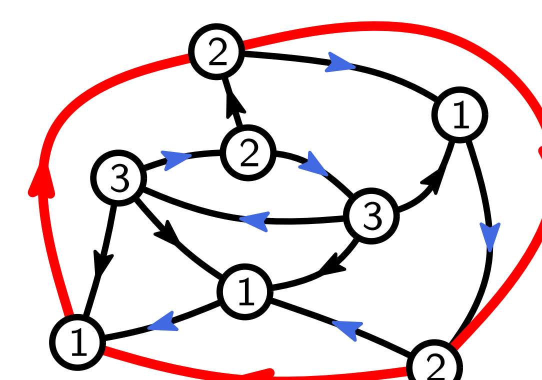
essentiel



essentiel

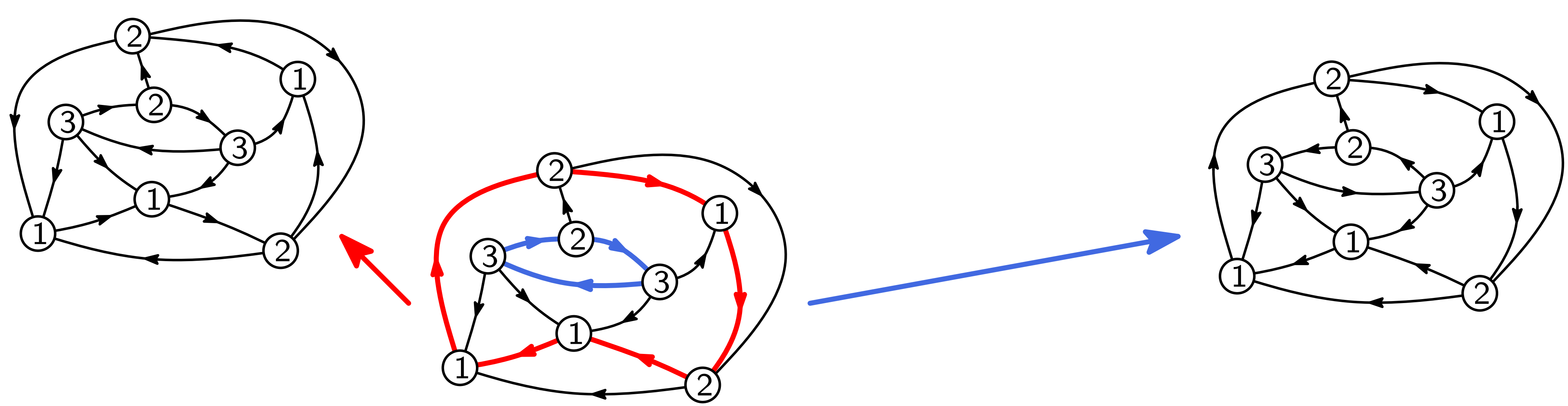


non-essentiel

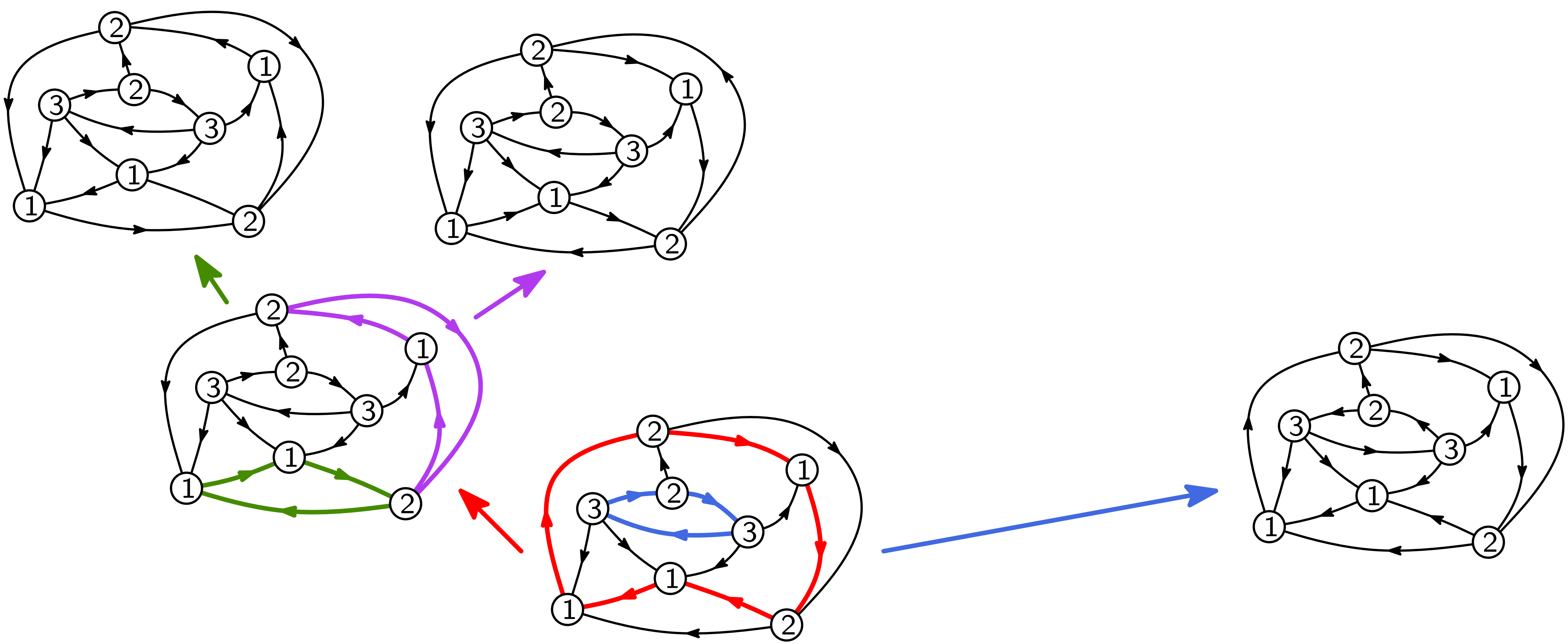


non-essentiel

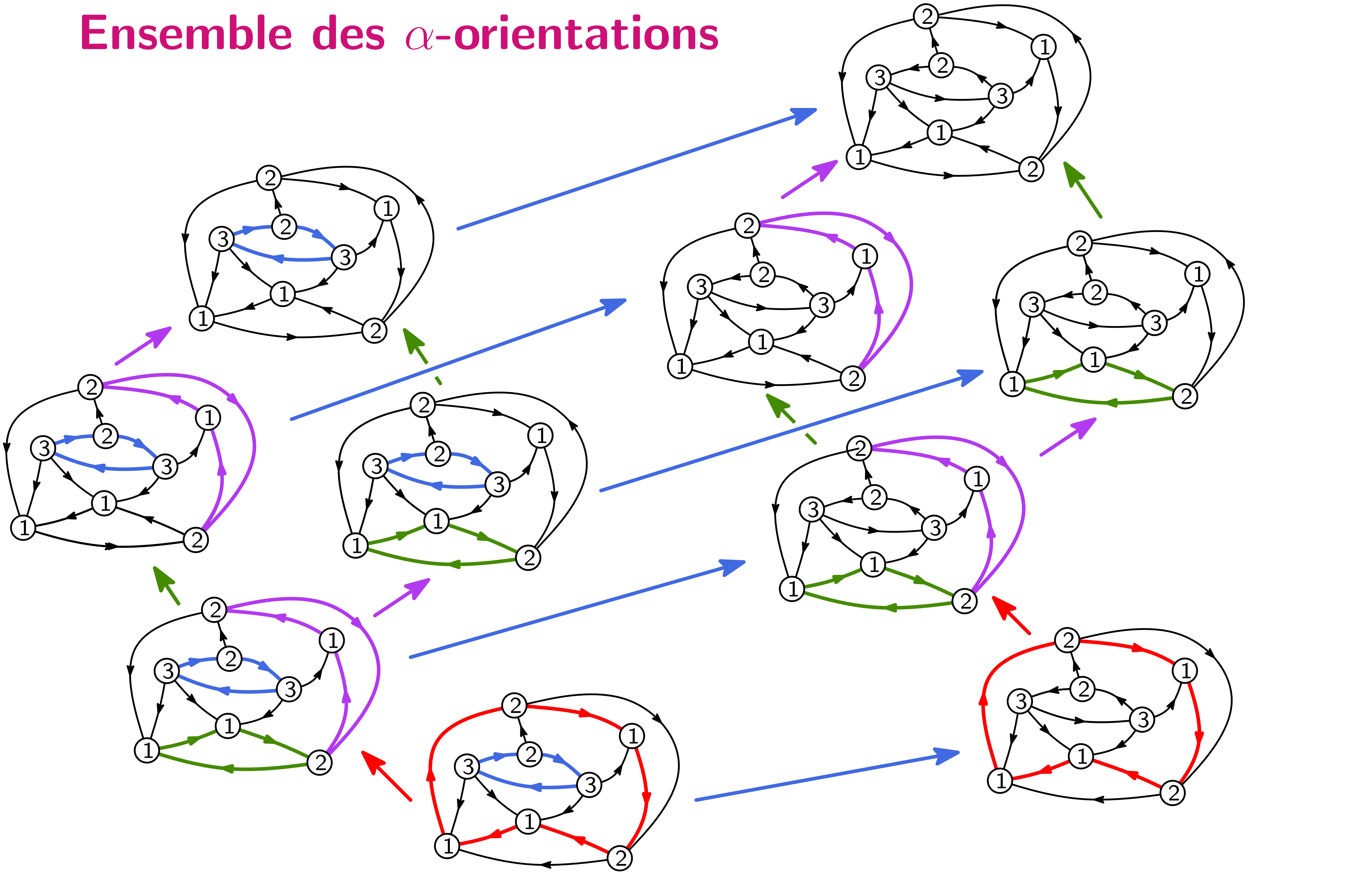
Ensemble des α-orientations



Ensemble des α-orientations



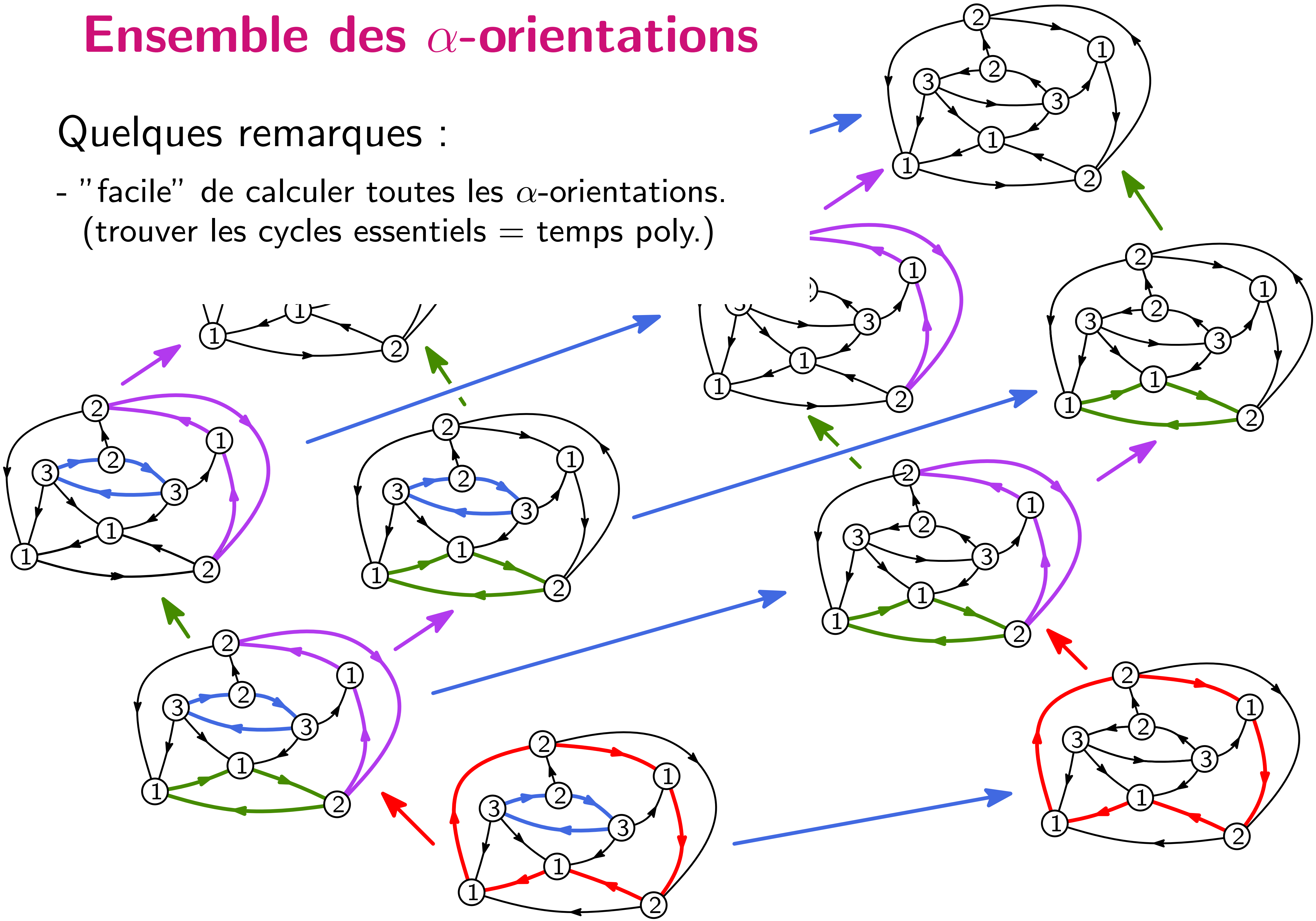
Ensemble des α-orientations



Ensemble des α-orientations

Quelques remarques :

- "facile" de calculer toutes les α-orientations.
  (trouver les cycles essentiels = temps poly.)

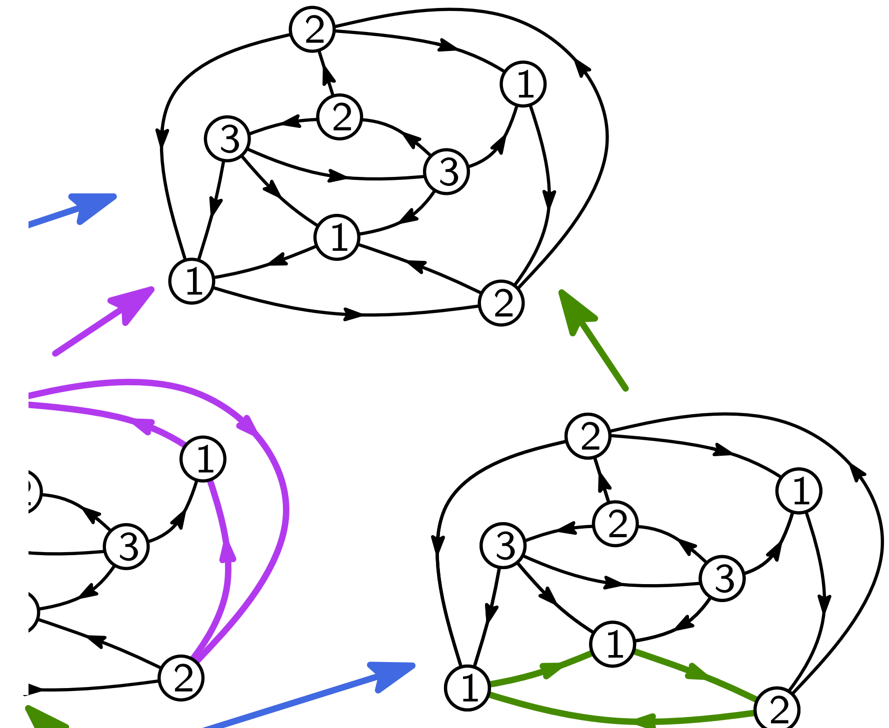


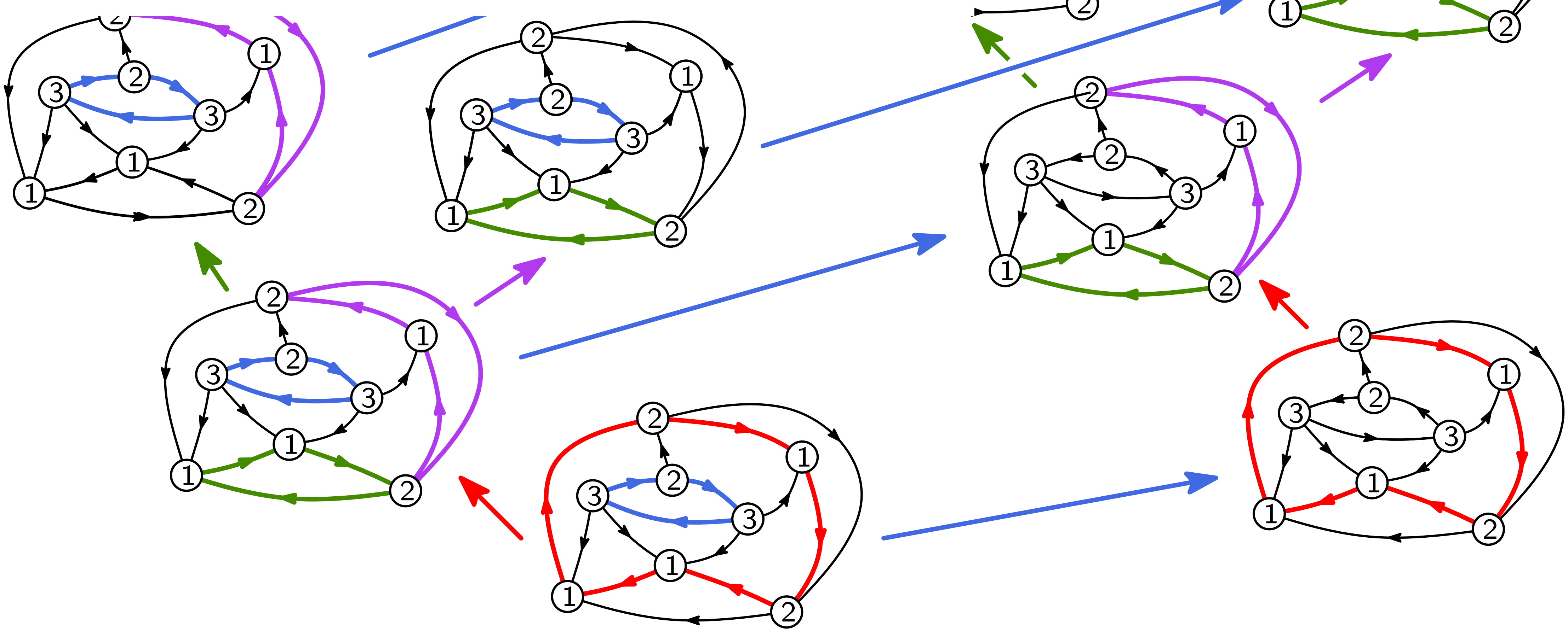
Ensemble des α-orientations

Quelques remarques :

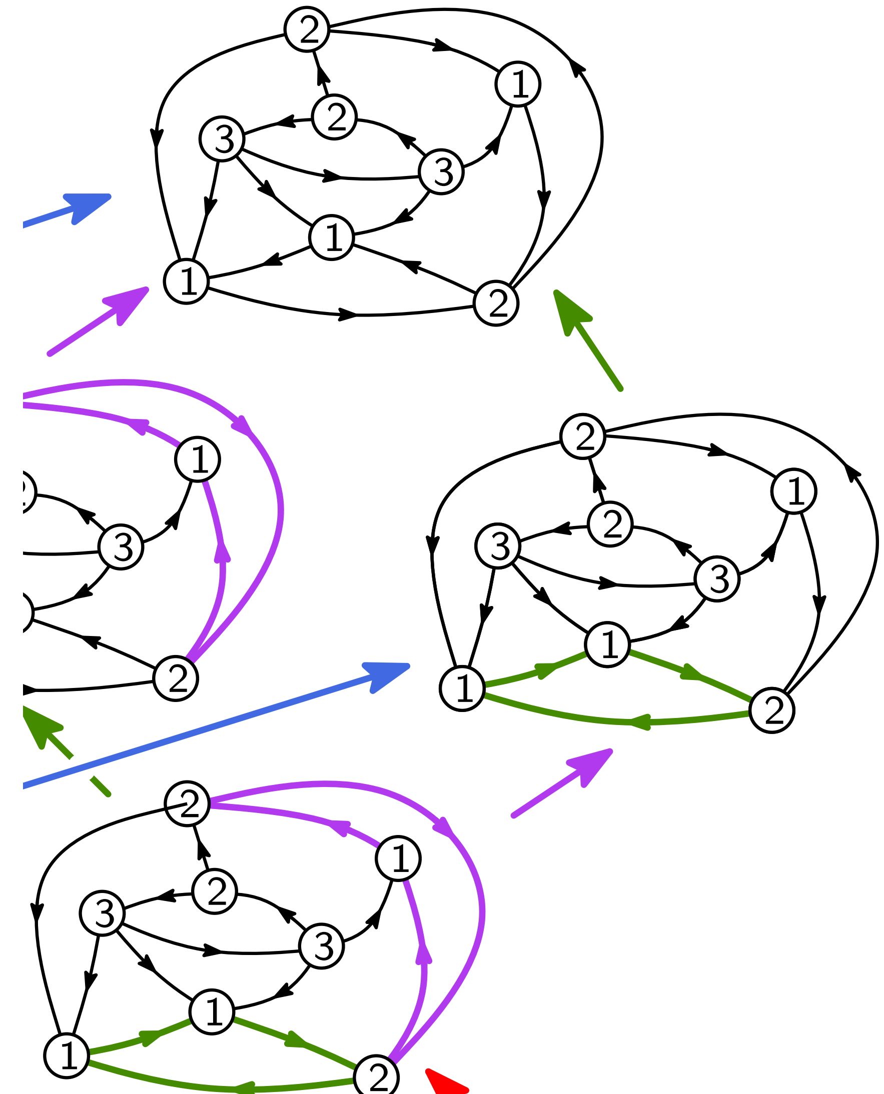
- "facile" de calculer toutes les α-orientations.
  (trouver les cycles essentiels = temps poly.)

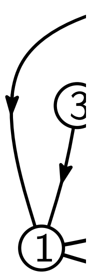
- le retournement d'un cycle essentiel horaire en un cycle antihoraire induit une **relation d'ordre**.





Ensemble des α-orientations



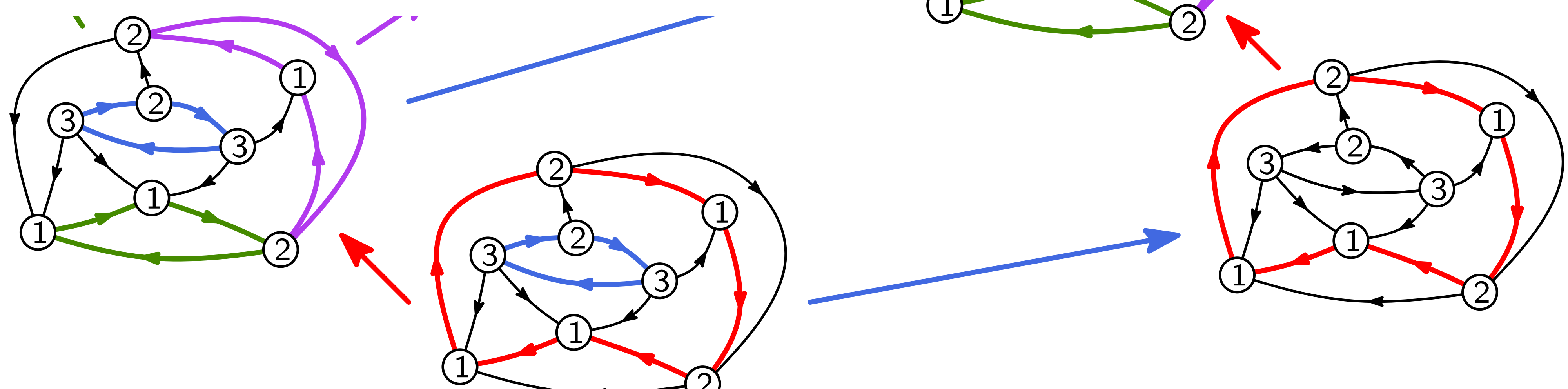


Théorème : (Felsner ’04)

Muni de cette relation d’ordre, les α-orientations forment un **treillis**

i.e. toute paire d’éléments admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Corollaire : Il existe un unique élément minimal (resp. maximal) qui n’a pas de cycle antihoraire (resp. horaire).



Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**

Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

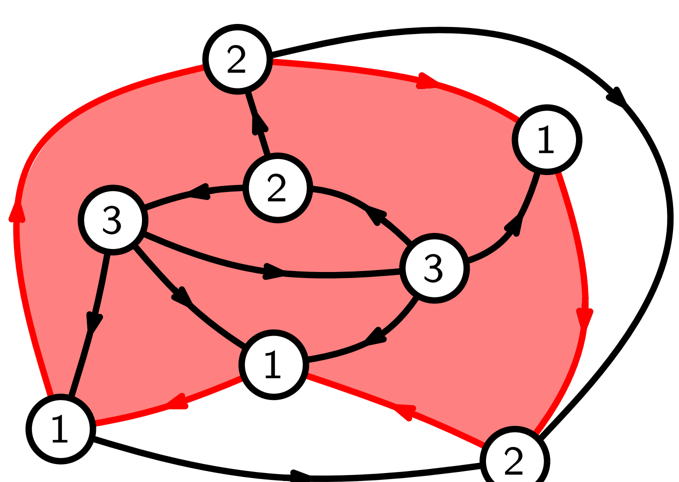
Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

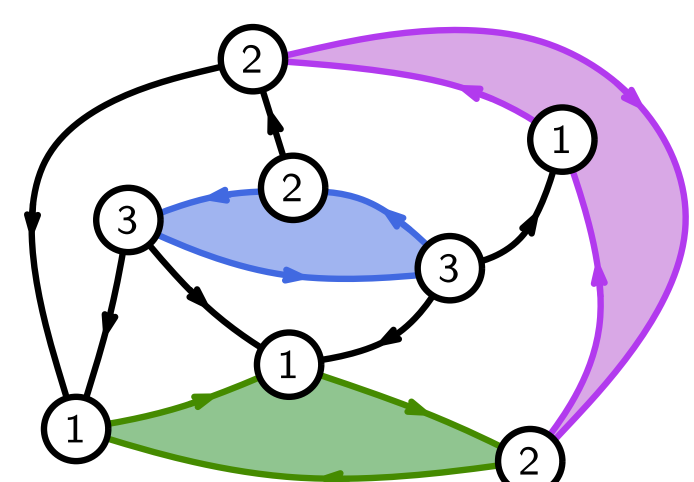
flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**

Propriété :

Une arête appartient au plus à deux cycles essentiels.
Les intérieurs de ces cycles sont disjoints.





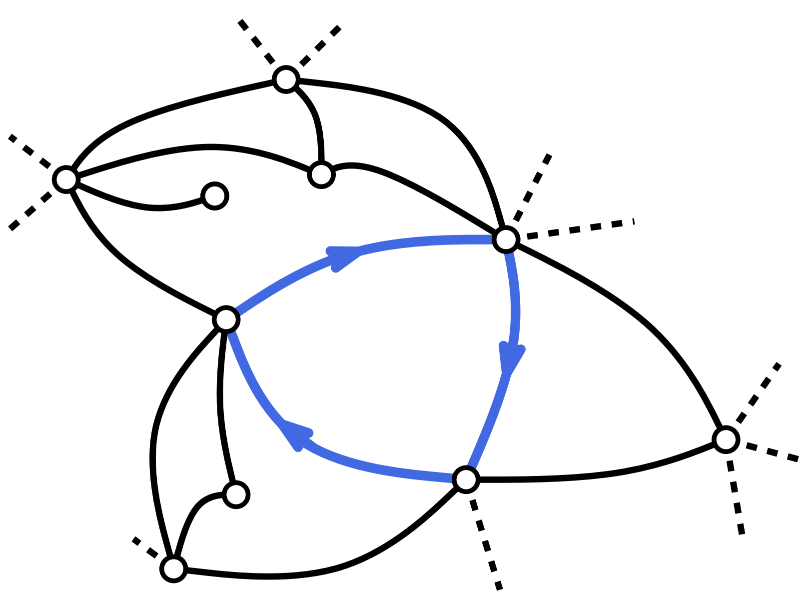
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



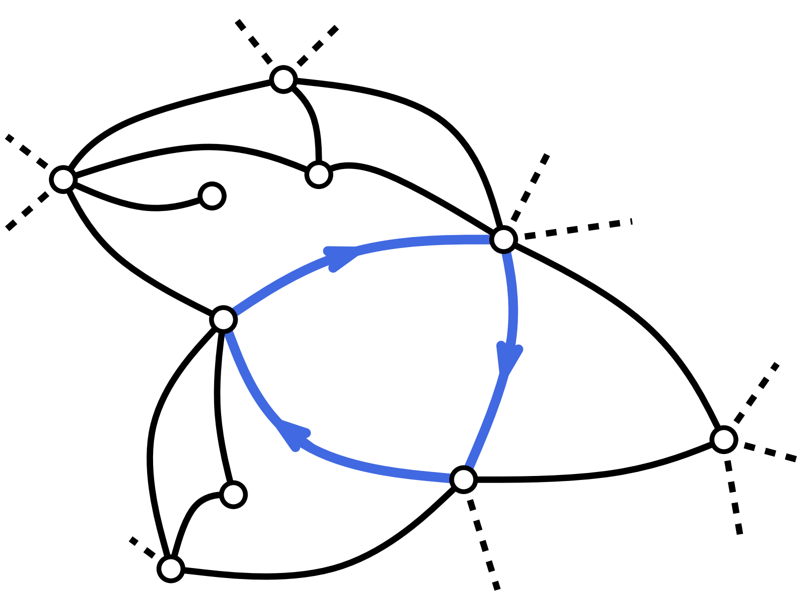
Existence d'un élément maximal

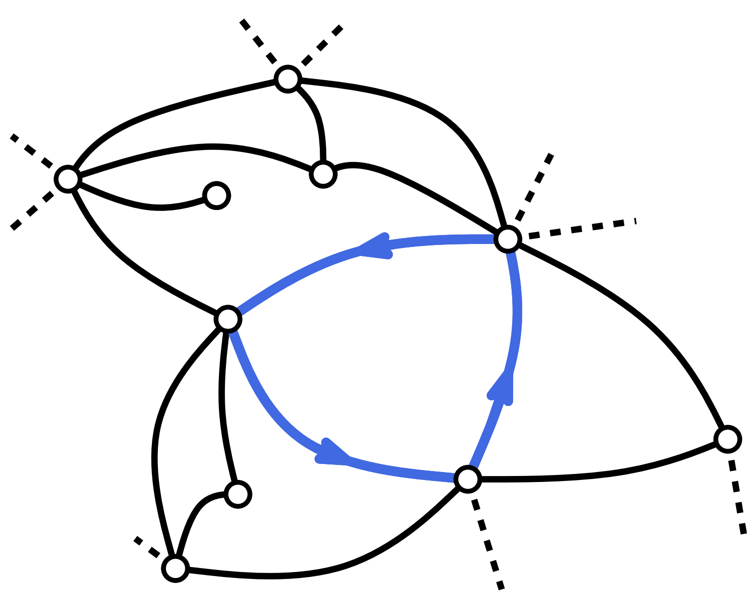
Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**





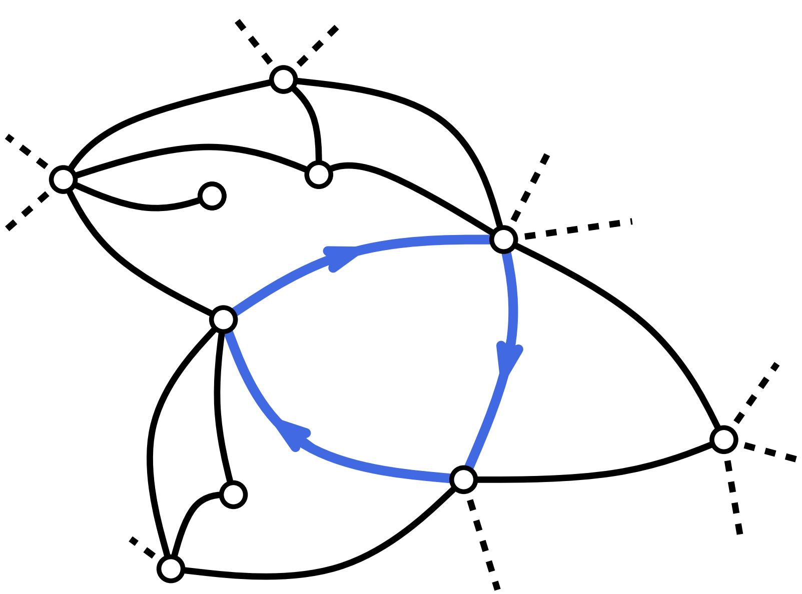
Existence d'un élément maximal

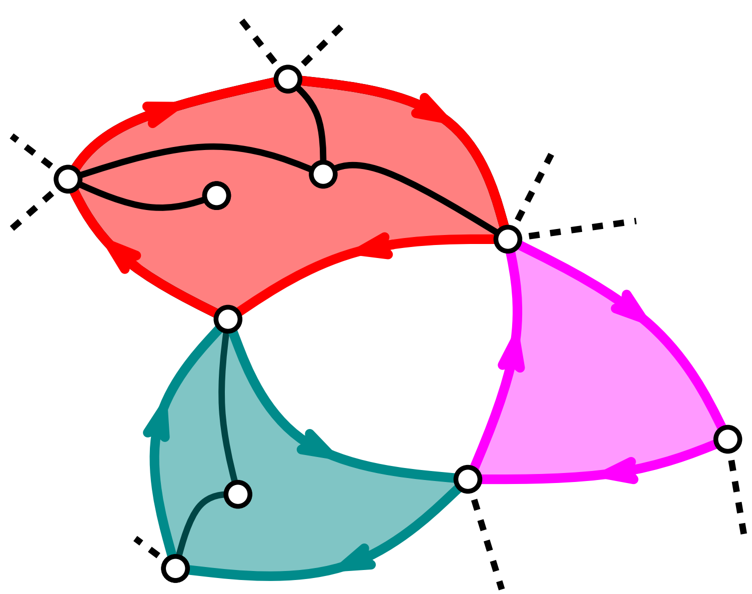
Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**





Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes,
il faut "flipper" chacune d'entre elles.

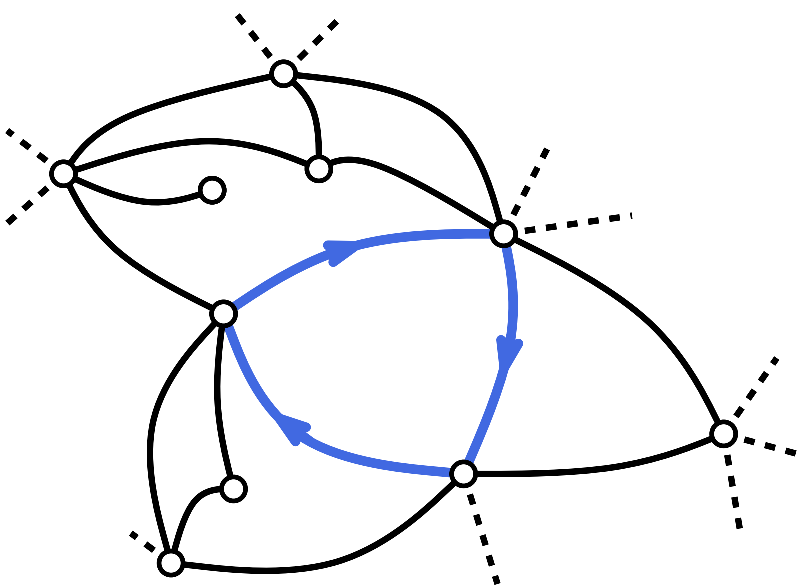
Existence d'un élément maximal

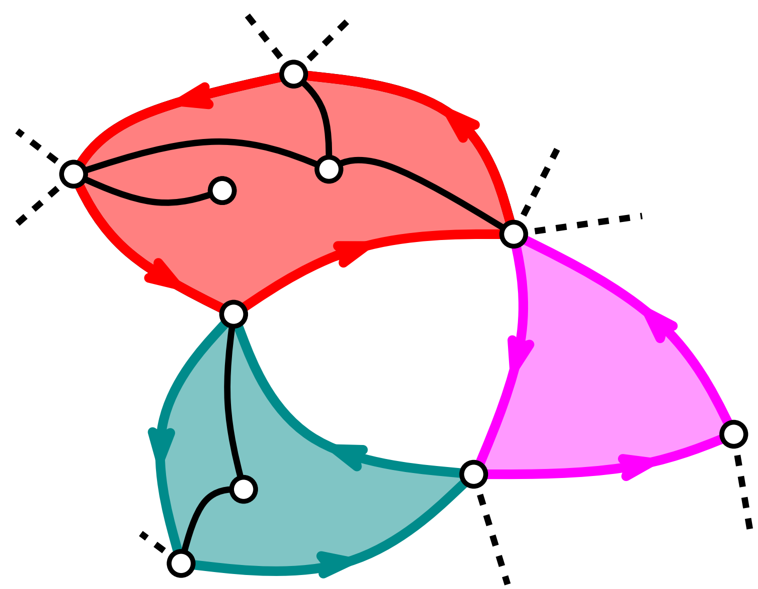
Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**





Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes,
il faut "flipper" chacune d'entre elles.

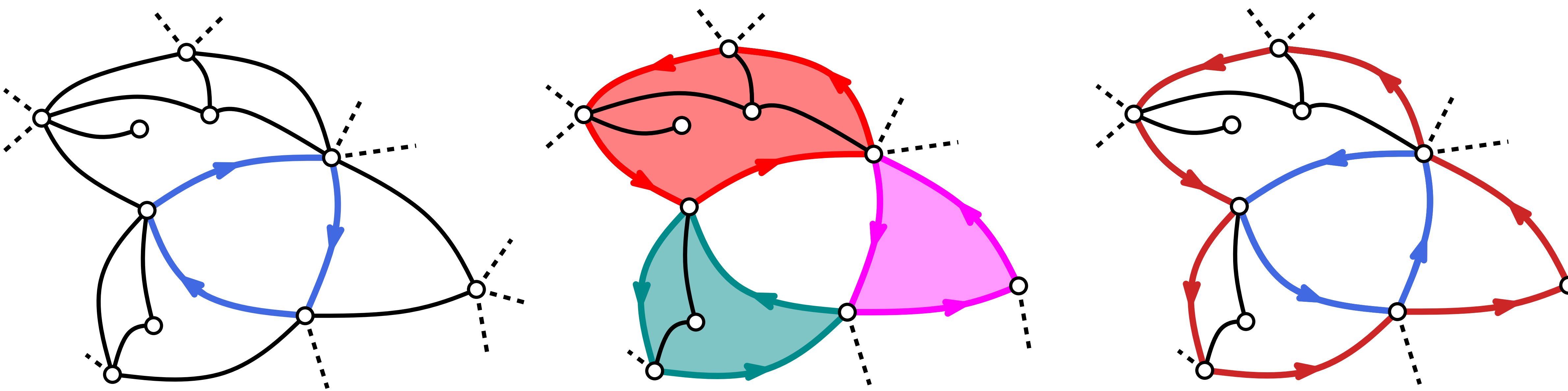
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes, il faut "flipper" chacune d'entre elles.

Il faut "flipper" chacune des arêtes rouges etc etc ...

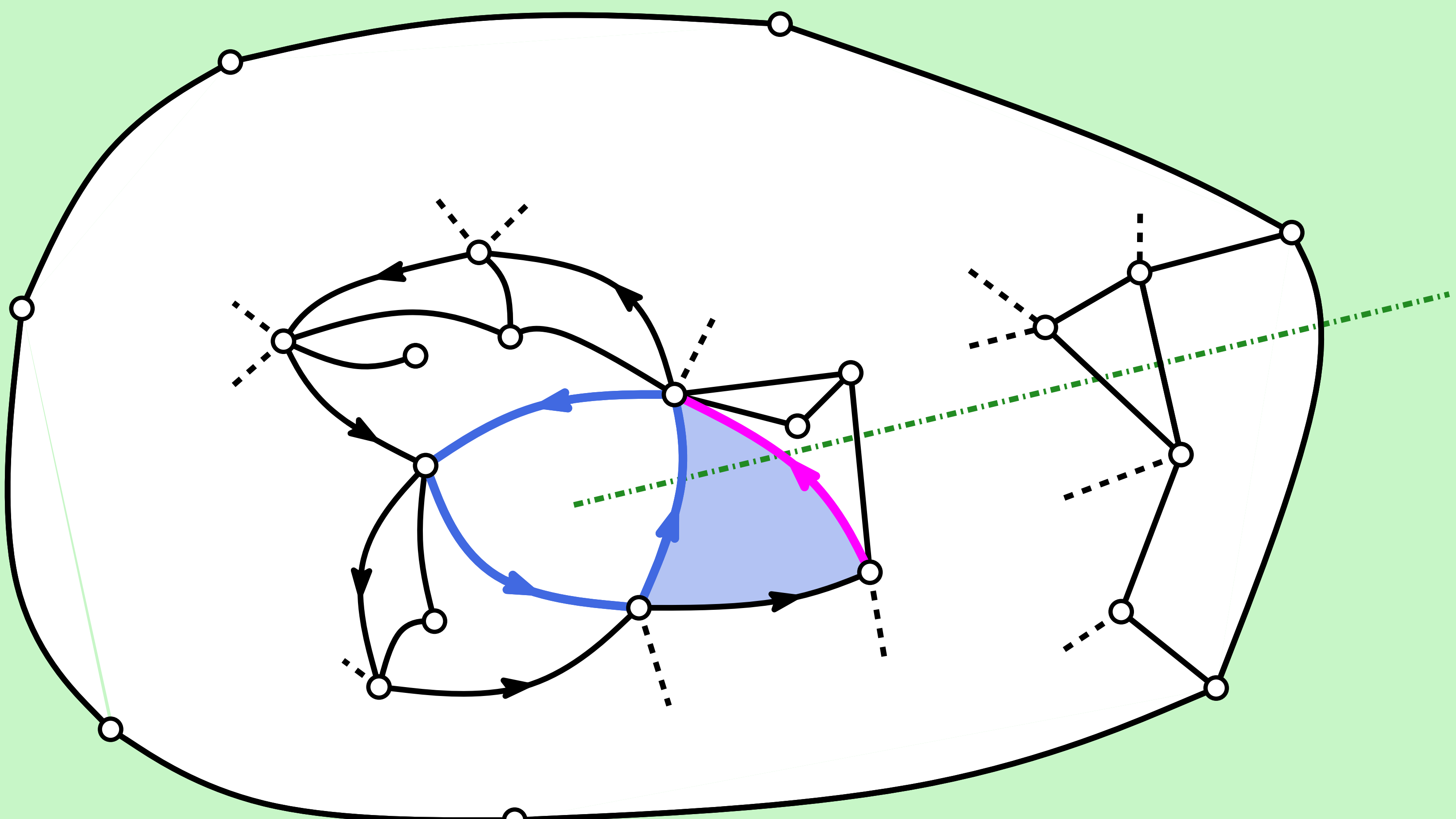
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



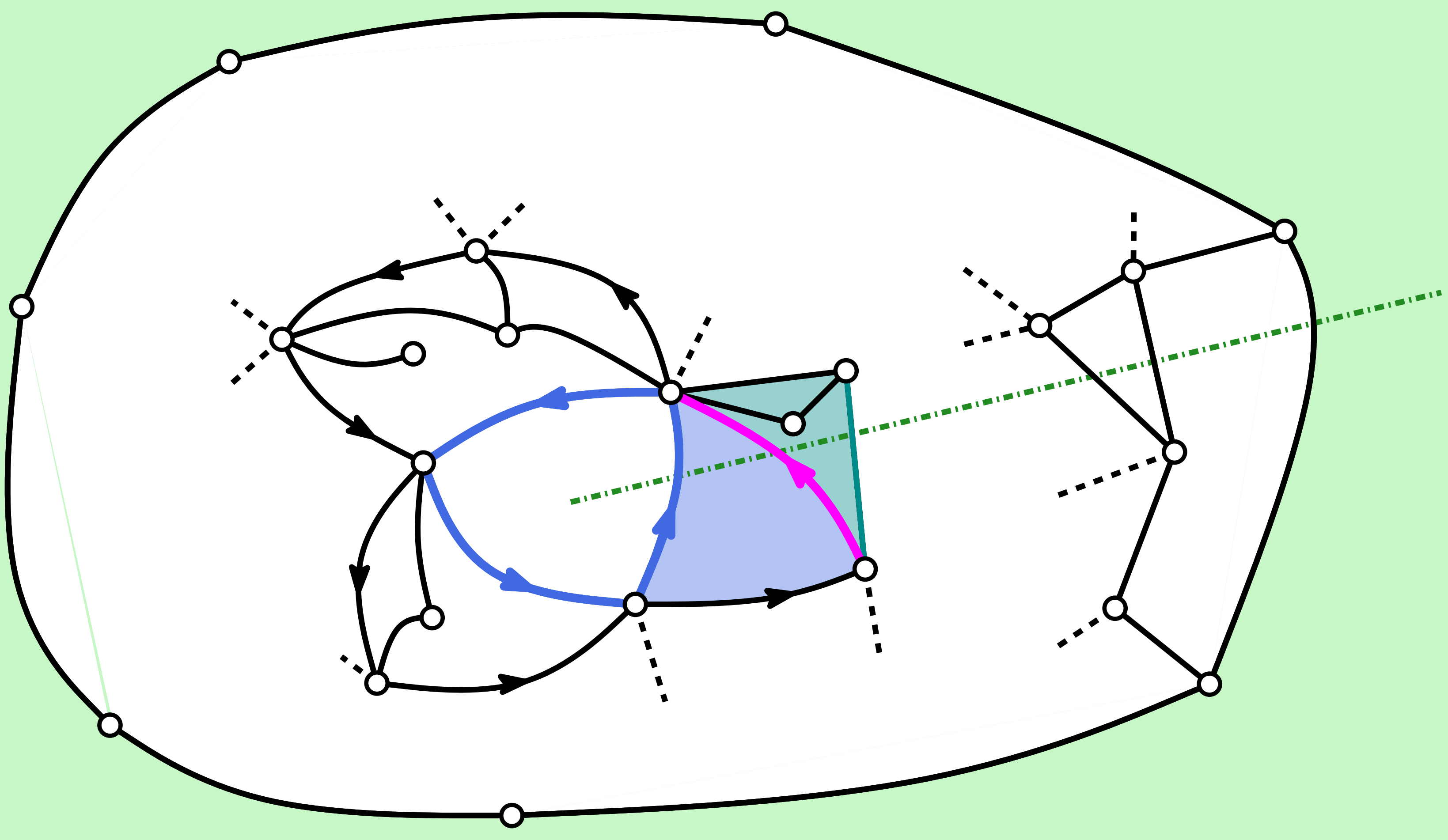
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



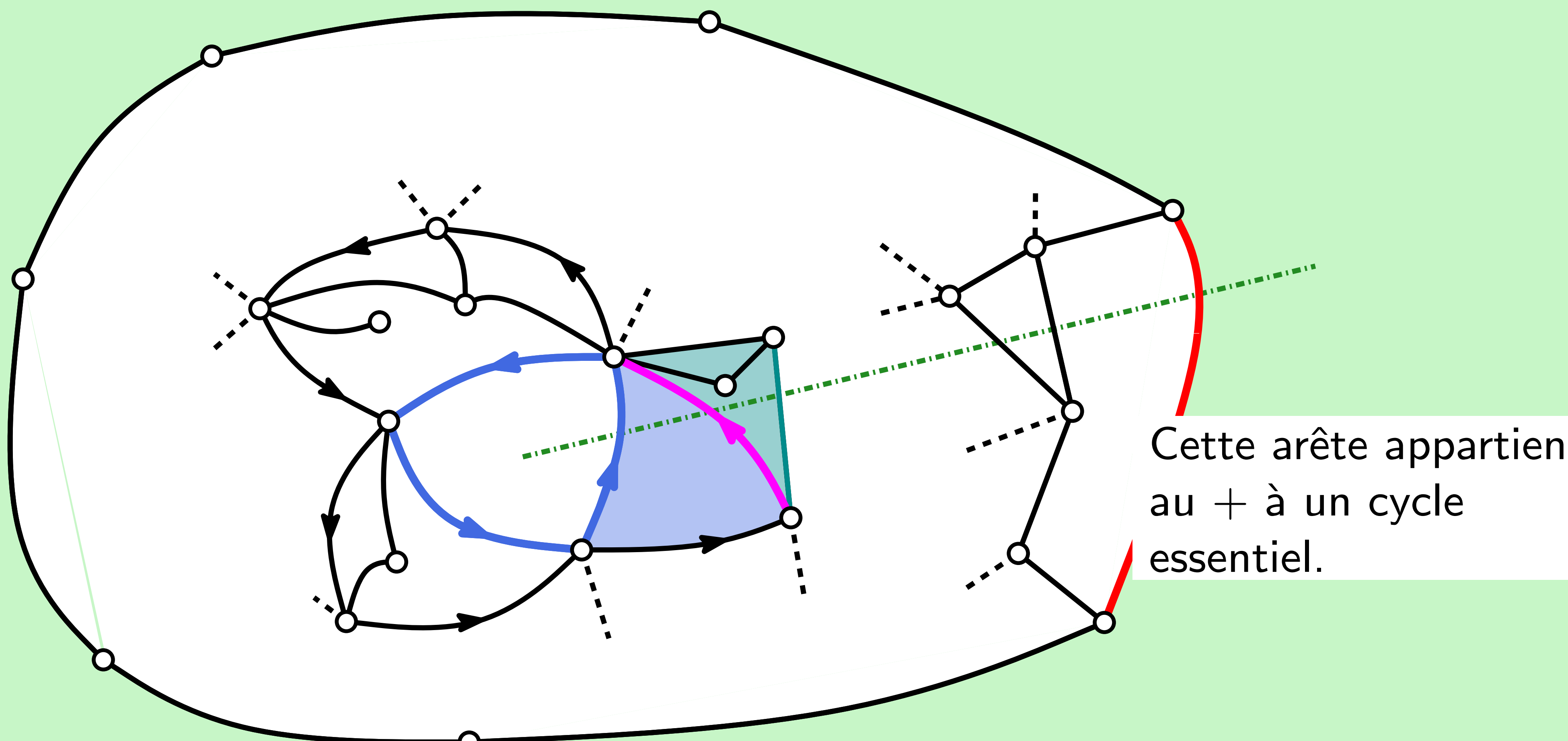
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α-orientation sans cycle horaire.

flip $=$ retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème $\Leftrightarrow$ **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Résumé

- Étant donnée une carte plane M et une fonction $\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$, une α-orientation est une orientation des arêtes de M telle que pour tout sommet v, $\mathrm{out}(v) = \alpha(v)$.

- S'il existe une α-orientation, on dit que α est faisable. Il est **facile** de décider si α est faisable.

- On peut passer d'une α-orientation à une autre en retournant des cycles et même en ne retournant que des cycles **essentiels**.

- Le retournement de cycles essentiels induit une structure de **treillis**. Notamment, il existe une unique α-orientation sans cycle horaire et une unique α-orientation sans cycle antihoraire.

Résumé

- Étant donnée une carte plane M et une fonction $\alpha : V(M) \to \mathbb{N}$, une α-orientation est une orientation des arêtes de M telle que pour tout sommet v, $\mathrm{out}(v) = \alpha(v)$.

- S'il existe une α-orientation, on dit que α est faisable. Il est **facile** de décider si α est faisable.

- On peut passer d'une α-orientation à une autre en retournant des cycles et même en ne retournant que des cycles **essentiels**.

- Le retournement de cycles essentiels induit une structure de **treillis**. Notamment, il existe une unique α-orientation sans cycle horaire et une unique α-orientation sans cycle antihoraire.

La suite : ce soir ... Merci !