

Animaux dirigés et modèles de gaz markoviens

Marie Albenque

LIX

Séminaire Algorithms – 19 avril 2010

Plan

Introduction

Modèle de gaz

Convergence de graphes

Et Markov ?

Animaux dirigés

$G = (V, E)$ un graphe dirigé, $S \subset V$ un ensemble de sommets.

Animal dirigé (AD) de source S = sous-ensemble de G tel qu'il existe un chemin d'une source à chaque sommet de l'animal.

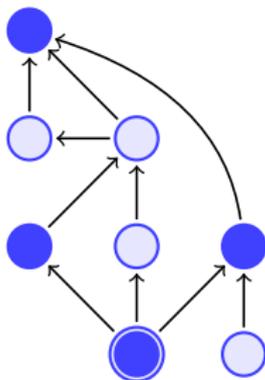


Figure: Exemple d'animal dirigé

Aire et périmètre

Aire d'un animal = nombre de sommets.

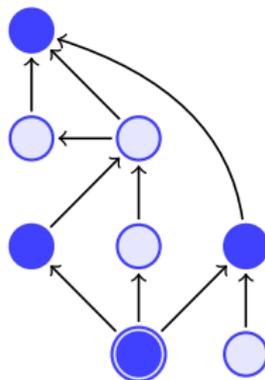


Figure: Exemple d'animal dirigé d'aire 4

Aire et périmètre

Aire d'un animal = nombre de sommets.

Périmètre = nombre sommets qui n'appartiennent pas à l'animal et dont un père appartient à l'animal.

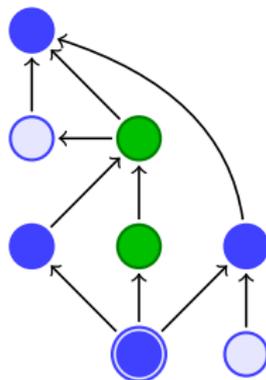
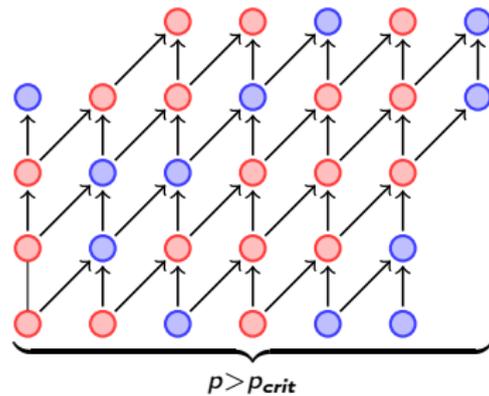
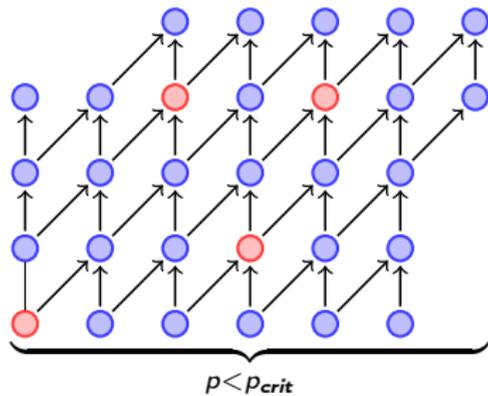


Figure: Exemple d'animal dirigé d'aire 4 et de périmètre 2

Percolation dirigée



Série génératrice aire-périmètre des animaux dirigés

⇒ Valeur de la percolation critique.

Travaux pour l'énumération selon l'aire

Modèles de gaz

- Baxter, 1980
- Nadal et al., 1982
- Dhar, 1983.
- Bousquet-Mélou, 1996.
- Le Borgne et Marckert, 2007.
- A., 2009.

Travaux pour l'énumération selon l'aire

Modèles de gaz

- Baxter, 1980
- Nadal et al., 1982
- Dhar, 1983.
- Bousquet-Mélou, 1996.
- Le Borgne et Marckert, 2007.
- A., 2009.

Empilements

- Viennot, 1986
- Betrema et Penaud, 1993
- Corteel, Denise et Gouyou-Beauchamps, 2000.
- Bacher, 2009.

Modèle de gaz

$G = (V, E)$ un graphe, une **configuration de gaz** est une fonction qui à chaque sommet associe 0 (sommet libre) ou 1 (sommet occupé).

Configuration à particules dures = 2 sommets voisins ne peuvent pas être tous les deux occupés.

Un modèle de gaz est une loi de probabilité sur les configurations de gaz. La densité en un sommet est sa probabilité d'être occupé.

Modèle de gaz

$G = (V, E)$ un graphe, une **configuration de gaz** est une fonction qui à chaque sommet associe 0 (sommet libre) ou 1 (sommet occupé).

Configuration à **particules dures** = 2 sommets voisins ne peuvent pas être tous les deux occupés.

Un modèle de gaz est une loi de probabilité sur les configurations de gaz. La densité en un sommet est sa probabilité d'être occupé.

Modèle de gaz

$G = (V, E)$ un graphe, une **configuration de gaz** est une fonction qui à chaque sommet associe 0 (sommet libre) ou 1 (sommet occupé).

Configuration à **particules dures** = 2 sommets voisins ne peuvent pas être tous les deux occupés.

Un **modèle de gaz** est une loi de probabilité sur les configurations de gaz. La densité en un sommet est sa probabilité d'être occupé.

Modèle de gaz

$G = (V, E)$ un graphe, une **configuration de gaz** est une fonction qui à chaque sommet associe 0 (sommet libre) ou 1 (sommet occupé).

Configuration à **particules dures** = 2 sommets voisins ne peuvent pas être tous les deux occupés.

Un **modèle de gaz** est une loi de probabilité sur les configurations de gaz. La **densité** en un sommet est sa probabilité d'être occupé.

Modèle de gaz

$G = (V, E)$ un graphe, une **configuration de gaz** est une fonction qui à chaque sommet associe 0 (sommet libre) ou 1 (sommet occupé).

Configuration à **particules dures** = 2 sommets voisins ne peuvent pas être tous les deux occupés.

Un **modèle de gaz** est une loi de probabilité sur les configurations de gaz. La **densité** en un sommet est sa probabilité d'être occupé.

Travaux antérieurs sur les modèles de gaz

Lien entre la densité de modèles de gaz et l'énumération des AD :

- Nadal & al. (1982), Hakim et Nadal (1983)
- Dhar (1983)

Travaux antérieurs sur les modèles de gaz

Lien entre la densité de modèles de gaz et l'énumération des AD :

- Nadal & al. (1982), Hakim et Nadal (1983)
- Dhar (1983)
- Bousquet-Mélou (1998)
- Bousquet-Mélou et Conway (1996)

Travaux antérieurs sur les modèles de gaz

Lien entre la densité de modèles de gaz et l'énumération des AD :

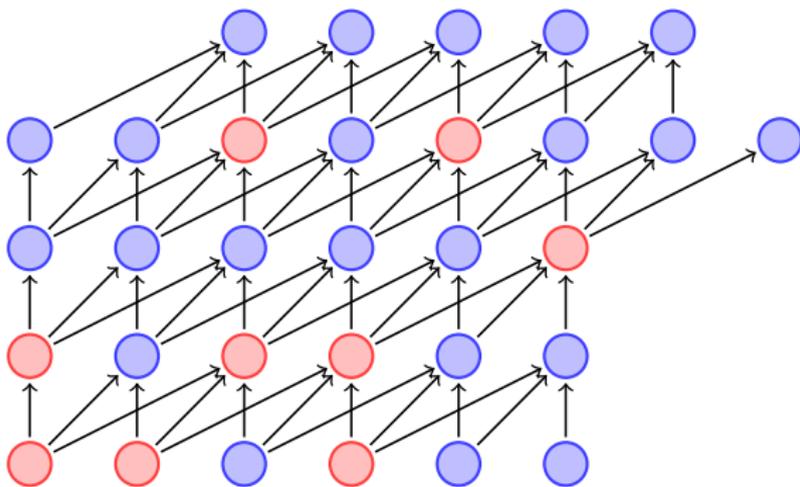
- Nadal & al. (1982), Hakim et Nadal (1983)
- Dhar (1983)
- Bousquet-Mélou (1998)
- Bousquet-Mélou et Conway (1996)
- Le Borgne et Marckert (2007)

Du coloriage aux animaux

ω = coloriage "Bernoulli" du graphe (rouge avec proba p , bleu sinon).
 S un ensemble de sommets.

\mathbf{A}^S = animal dirigé engendré par S

$\mathbf{A}^S(\omega) = \{x \in V \mid \omega(x) = r \text{ et soit } x \in S,$
 soit $\exists u \mid u \in \mathbf{A}^S \text{ et } u \rightarrow v\}$.

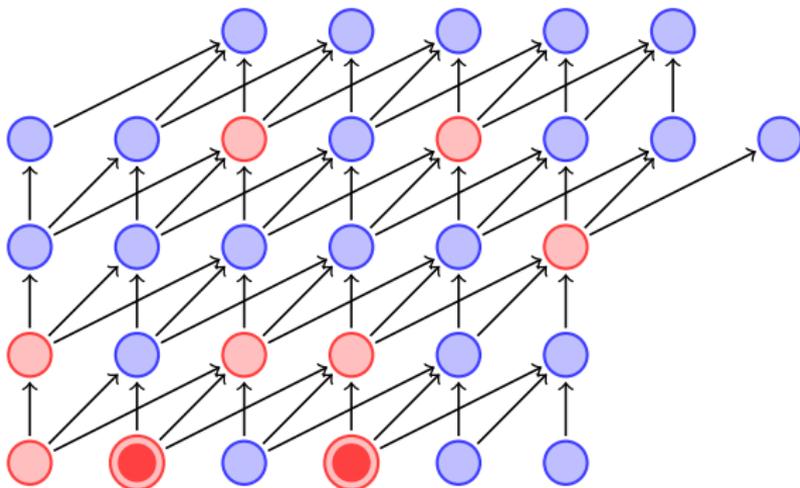


Du coloriage aux animaux

ω = coloriage "Bernoulli" du graphe (rouge avec proba p , bleu sinon).
 S un ensemble de sommets.

\mathbf{A}^S = animal dirigé engendré par S

$\mathbf{A}^S(\omega) = \{x \in V \mid \omega(x) = r \text{ et soit } x \in S,$
 soit $\exists u \mid u \in \mathbf{A}^S \text{ et } u \rightarrow v\}$.

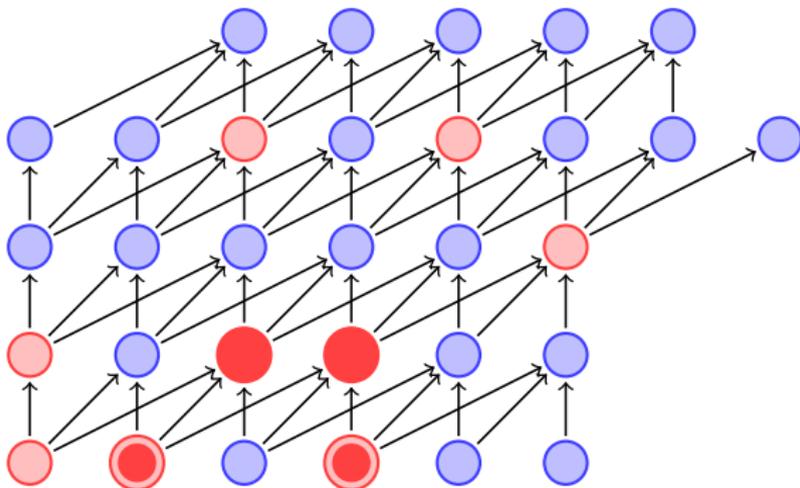


Du coloriage aux animaux

ω = coloriage "Bernoulli" du graphe (rouge avec proba p , bleu sinon).
 S un ensemble de sommets.

\mathbf{A}^S = animal dirigé engendré par S

$\mathbf{A}^S(\omega) = \{x \in V \mid \omega(x) = r \text{ et soit } x \in S,$
 soit $\exists u \mid u \in \mathbf{A}^S \text{ et } u \rightarrow v\}$.

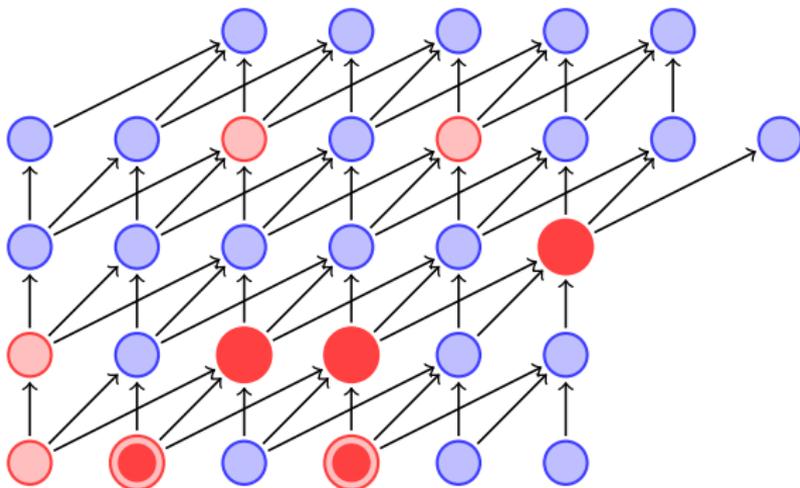


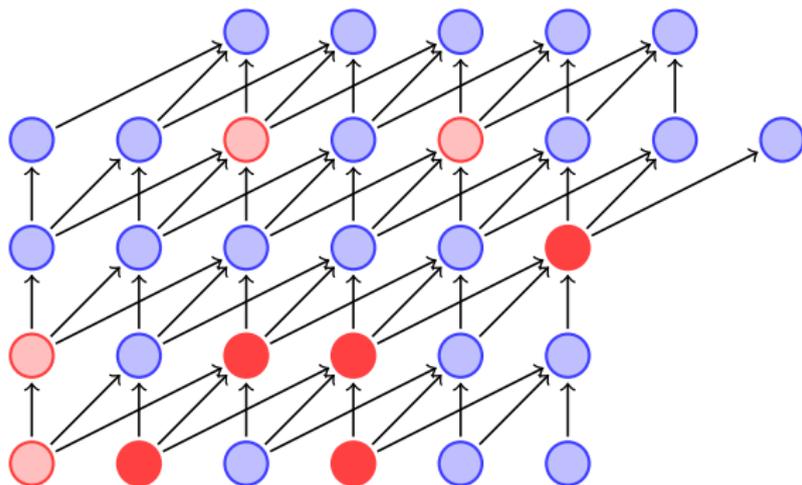
Du coloriage aux animaux

ω = coloriage "Bernoulli" du graphe (rouge avec proba p , bleu sinon).
 S un ensemble de sommets.

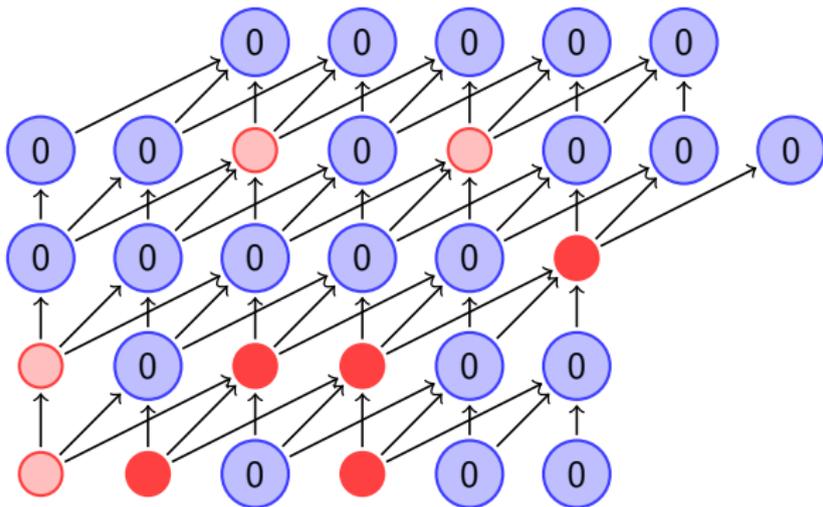
\mathbf{A}^S = animal dirigé engendré par S

$\mathbf{A}^S(\omega) = \{x \in V \mid \omega(x) = r \text{ et soit } x \in S,$
 soit $\exists u \mid u \in \mathbf{A}^S \text{ et } u \rightarrow v\}$.

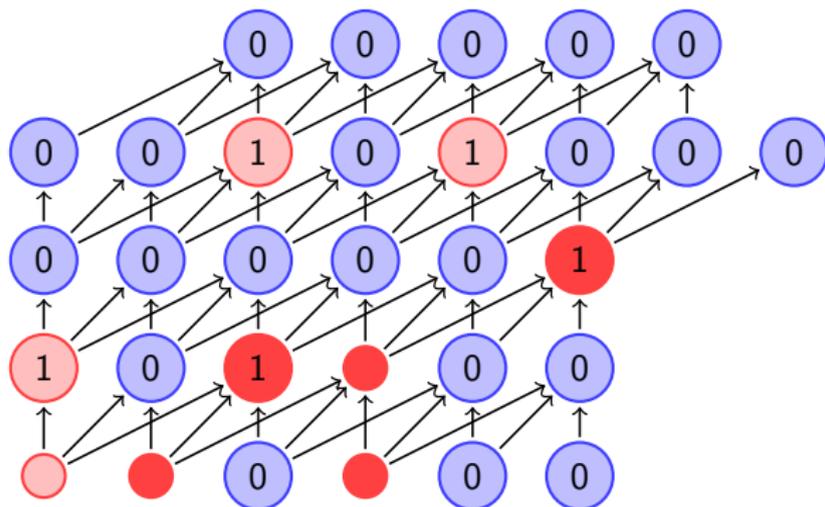


Exemple de gaz et d'animal sur \mathcal{L}_3 

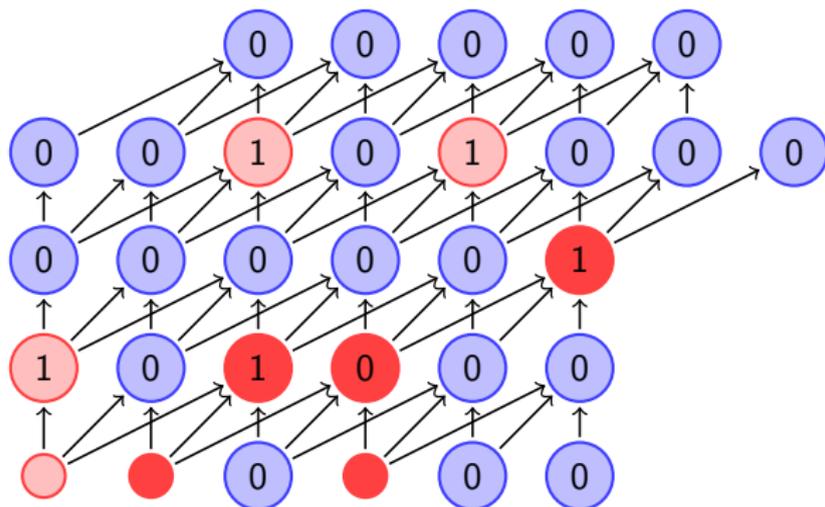
$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(s) = b \text{ ou } \exists e \text{ tel que } X(e) = 1 \\ 1 & \text{si } \forall e, X(e) = 0 \text{ et } \omega(s) = r \end{cases}$$

Exemple de gaz et d'animal sur \mathcal{L}_3 

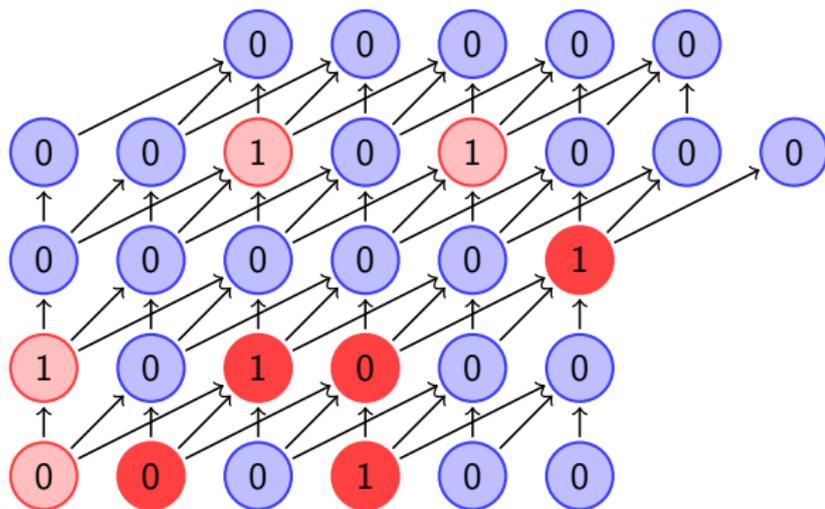
$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(s) = b \text{ ou } \exists e \text{ tel que } X(e) = 1 \\ 1 & \text{si } \forall e, X(e) = 0 \text{ et } \omega(s) = r \end{cases}$$

Exemple de gaz et d'animal sur \mathcal{L}_3 

$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(s) = b \text{ ou } \exists e \text{ tel que } X(e) = 1 \\ 1 & \text{si } \forall e, X(e) = 0 \text{ et } \omega(s) = r \end{cases}$$

Exemple de gaz et d'animal sur \mathcal{L}_3 

$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(s) = b \text{ ou } \exists e \text{ tel que } X(e) = 1 \\ 1 & \text{si } \forall e, X(e) = 0 \text{ et } \omega(s) = r \end{cases}$$

Exemple de gaz et d'animal sur \mathcal{L}_3 

$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega(s) = b \text{ ou } \exists e \text{ tel que } X(e) = 1 \\ 1 & \text{si } \forall e, X(e) = 0 \text{ et } \omega(s) = r \end{cases}$$

Lien entre le gaz et les DA

Proposition (Le Borgne, Marckert (2007))

Soit G un graphe orienté acyclique et S un ensemble libre de sommets de G ,

$$\mathbb{P}_p(\mathbf{X}(x) = 1, x \in S) = (-1)^{|S|} \mathcal{G}_S(-p),$$

pour tout p plus petit que le rayon de convergence de \mathcal{G}_S .

Résultats à largeur finie

Convergence formelle de la série :
le nombre d'animaux de taille fixée converge quand la largeur tend vers
l'infini

⇔

La densité du gaz converge.

Quel sens donner à une convergence du gaz comme processus ?

$$\mathbb{P}_\rho^{G_n}(X(s) = 1, s \in S_n) \xrightarrow[n]{} \mathbb{P}_\rho^G(X(s) = 1, s \in S)$$

Distance entre graphes

G un graphe dirigé, S ensemble libre de sommets de G .

$B_r(G, S)$ = sous-graphe de G contenant les sommets v tels que

$$d(v, S) = \inf_{u \in S} d(v, u) \leq r.$$

$$d((G, S), (G', S')) = \inf \left\{ \frac{1}{r+1}, \text{ où } r \text{ est tel que } B_r(G, S) \sim B_r(G', S') \right\}.$$

Convergence du gaz

Théorème

Si $(G_n, S_n) \rightarrow (G, S)$ alors :

- $\mathcal{G}_{G_n}^{S_n}(p) \xrightarrow[n]{} \mathcal{G}_G^S(p)$
- s'il existe $c, d \geq 0$ tel que pour tout n assez grand :

$$A_{n,k} \leq cd^k \text{ pour tout } k \geq 1,$$

alors pour $p < 1/d$,

$$\mathbb{P}_p^{G_n}(X(s) = 1, s \in S_n) \xrightarrow[n]{} \mathbb{P}_p^G(X(s) = 1, s \in S).$$

Convergence du gaz

Théorème

Si $(G_n, S_n) \rightarrow (G, S)$ alors :

- $\mathcal{G}_{G_n}^{S_n}(p) \xrightarrow[n]{} \mathcal{G}_G^S(p)$
- s'il existe $c, d \geq 0$ tel que pour tout n assez grand :

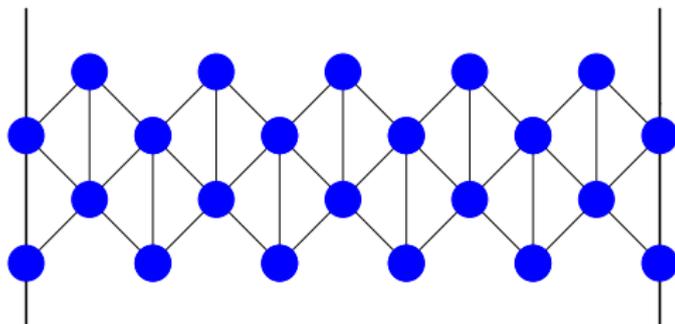
$$A_{n,k} \leq cd^k \text{ pour tout } k \geq 1,$$

alors pour $p < 1/d$,

$$\mathbb{P}_p^{G_n}(X(s) = 1, s \in S_n) \xrightarrow[n]{} \mathbb{P}_p^G(X(s) = 1, s \in S).$$

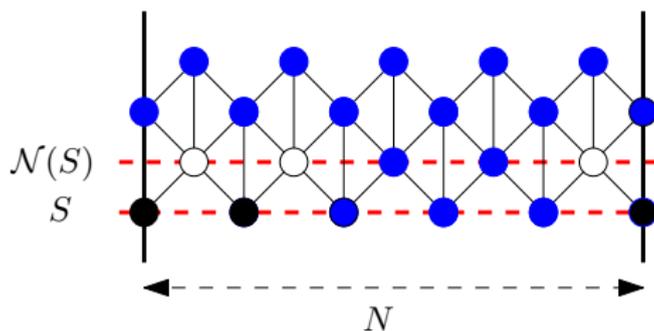
Reste à faire les calculs...

Retour au cylindre



Largeur bornée \Rightarrow équations de récurrence \Rightarrow On peut faire des calculs.

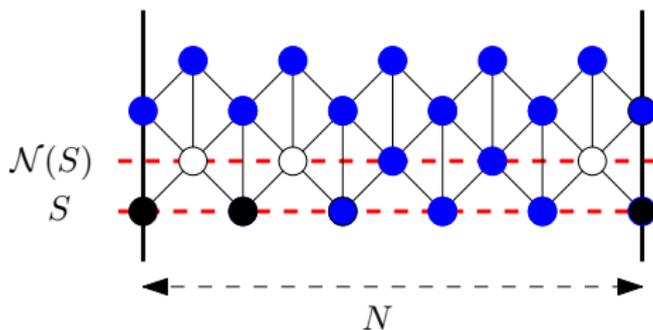
Sur le réseau triangulaire



$$F_S^N = \mathbb{P}_p(X_s = 1 \text{ si et seulement si } s \in S) = \frac{1}{Z_N} p^{|S|} (1+p)^{N-|\mathcal{N}(S)|}$$

où $Z_N = \sum_S p^{|S|} (1+p)^{N-|\mathcal{N}(S)|}$.

Sur le réseau triangulaire



$$F_S^N = \mathbb{P}_p(X_s = 1 \text{ si et seulement si } s \in S) = \frac{1}{Z_N} p^{|S|} (1+p)^{N-|\mathcal{N}(S)|}$$

où $Z_N = \sum_S p^{|S|} (1+p)^{N-|\mathcal{N}(S)|}$.

On peut réécrire :

$$F_S^N = \frac{1}{\text{trace}(V^N)} \prod_{i=1}^{N-1} V_{x_i, x_{i+1}}, \quad \text{où } V = \begin{pmatrix} 1+p & p \\ 1 & p \end{pmatrix}$$

Un peu d'algèbre linéaire

V matrice à coefficients positifs.

Perron-Froebenius \Rightarrow il existe λ valeur propre réelle de V telle que

$\lambda > |\lambda'|, \forall \lambda'$ v.p.

L et R vecteurs propres respectivement à gauche et à droite associés à λ .

Définition d'une mesure

Pour $x \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(V^N)_{x,x}}{Z_N}.$$

En effet, $(V^N)_{x,x} = \sum_{x_1, \dots, x_{N-1}} V_{x,x_1} \left(\prod_{i=1}^{N-2} V_{x_i, x_{i+1}} \right) V_{x_{N-1}, x}$.

Définition d'une mesure

Pour $x \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(V^N)_{x,x}}{Z_N}.$$

En effet, $(V^N)_{x,x} = \sum_{x_1, \dots, x_{N-1}} V_{x,x_1} \left(\prod_{i=1}^{N-2} V_{x_i, x_{i+1}} \right) V_{x_{N-1}, x}$.

D'où : $\mathbb{P}_\rho(X_0 = x) = \mathbf{L}_x \mathbf{R}_x$

Définition d'une matrice de transition

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x, X_1 = y) \\ &= V_{x,y} \frac{(V^{N-1})_{y,x}}{Z_N} \\ &= V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y \mathbf{L}_x}{\lambda}.\end{aligned}$$

Définition d'une matrice de transition

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x, X_1 = y) \\ &= V_{x,y} \frac{(V^{N-1})_{y,x}}{Z_N} \\ &= V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y \mathbf{L}_x}{\lambda}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) = (\mathbf{R}_x \mathbf{L}_x) \left(V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y}{\mathbf{R}_x \cdot \lambda} \right)$$

Définition d'une matrice de transition

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x, X_1 = y) \\
 &= V_{x,y} \frac{(V^{N-1})_{y,x}}{Z_N} \\
 &= V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y \mathbf{L}_x}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) = \underbrace{(\mathbf{R}_x \mathbf{L}_x)}_{\mu(x)} \left(V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y}{\mathbf{R}_x \cdot \lambda} \right)$$

Définition d'une matrice de transition

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\rho^{(N)}(X_0 = x, X_1 = y) \\
 &= V_{x,y} \frac{(V^{N-1})_{y,x}}{Z_N} \\
 &= V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y \mathbf{L}_x}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = x, X_1 = y) = \underbrace{(\mathbf{R}_x \mathbf{L}_x)}_{\mu(x)} \underbrace{\left(V_{x,y} \frac{\mathbf{R}_y}{\mathbf{R}_x \cdot \lambda} \right)}_{W_{x,y}}$$

Forme multiplicative – Markov conditionnée

Théorème

Soit $(X^{(N)})_{N \geq 1}$ une famille de processus stochastiques telle que :

$$P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_{N-1}^{(N)} = x_{N-1}) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} V_{x_i, x_{i+1}}}{\text{trace}(V^N)}.$$

alors il existe une matrice stochastique W telle que :

- $X^{(N)}$ est une chaîne de Markov cyclique de matrice de transition :

$$P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_{N-1}^{(N)} = x_{N-1}) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} W_{x_i, x_{i+1}}}{\text{trace}(W^N)}.$$

- Le processus $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ défini par :

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_0^{(N)} = x_0, \dots, X_k^{(N)} = x_k)$$

est une chaîne de Markov de matrice de transition W sous sa distribution stationnaire.

Réseau triangulaire

Théorème

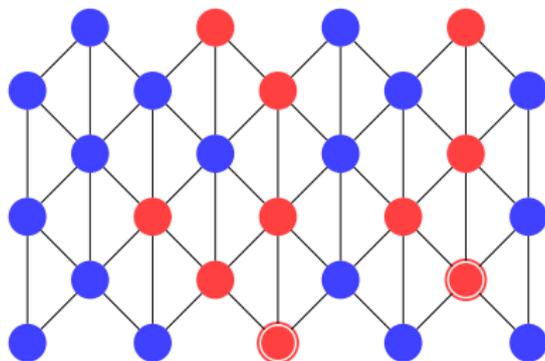
Sur une ligne du réseau triangulaire, le modèle de gaz $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} P(X_1 = 0 | X_0 = 0) & P(X_1 = 1 | X_0 = 0) \\ P(X_1 = 0 | X_0 = 1) & P(X_1 = 1 | X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_o & \alpha_o \\ \alpha_\bullet & 1 - \alpha_\bullet \end{pmatrix}$$

sous sa loi stationnaire : $\left[\frac{\alpha_\bullet}{\alpha_o + \alpha_\bullet}, \frac{\alpha_o}{\alpha_\bullet + \alpha_o} \right]$, avec

$$\alpha_o = \frac{2p}{1 + \sqrt{1 + 4p}} \text{ et } \alpha_\bullet = \frac{1 + \sqrt{1 + 4p}}{2}.$$

Sur le réseau triangulaire

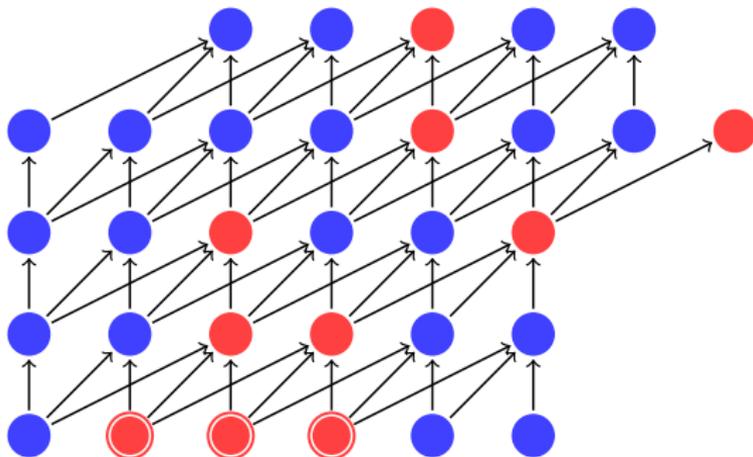


$$\mathcal{G}(t) = \frac{\alpha^2(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)},$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + 2t^2 + \sqrt{1 + 4t^2}}{2t^2}$$

voir également [Bousquet-Mélou 98]

Sur le réseau \mathcal{L}_3 

$$\mathcal{G}(t) = \frac{2t^2(1 - \sqrt{1 - 4t - 4t^2})}{(1 + \sqrt{1 - 4t - 4t^2})(1 - 4t - 4t^2 + (1 + 2t)\sqrt{1 - 4t - 4t^2})}$$

voir également [Bousquet-Mélou, Conway 96]

Merci !