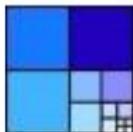


# Tresses, Animaux, Cartes :

## À l'interaction entre combinatoire et probabilité.

Marie ALBENQUE

Soutenance de Thèse, 3 décembre 2008



# Plan

- **Énumération de tresses positives**
  - Généralisation des empilements de Viennot
  - Application au monoïde de tresse dual
- **Énumération d'animaux dirigés**
  - Étude de modèles de gaz
- **Triangulations en pile**
  - Comportement asymptotique de grandes triangulations en pile aléatoires
  - Sous la loi uniforme pour la topologie de Gromov-Hausdorff

# Plan

- Énumération de tresses positives
  - Généralisation des empilements de Viennot
  - Application au monoïde de tresse dual
- Énumération d'animaux dirigés
  - Étude de modèles de gaz
- Triangulations en pile
  - Comportement asymptotique de grandes triangulations en pile aléatoires
  - Sous la loi uniforme pour la topologie de Gromov-Hausdorff

# DES TRESSES ?



## Diagramme de tresses positives

diagramme de tresse = une suite de croisements de brins.

$\sigma_{t,s} = \sigma_{s,t}$  ( $s < t$ ) = croisement des brins  $s$  et  $t$  avec le brin  $s$  au dessus

diagramme de tresse = mot sur l'alphabet des  $\sigma_{s,t}$

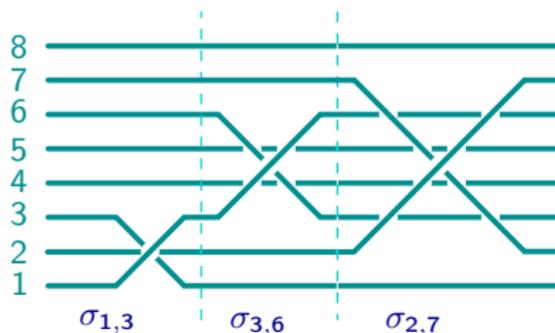
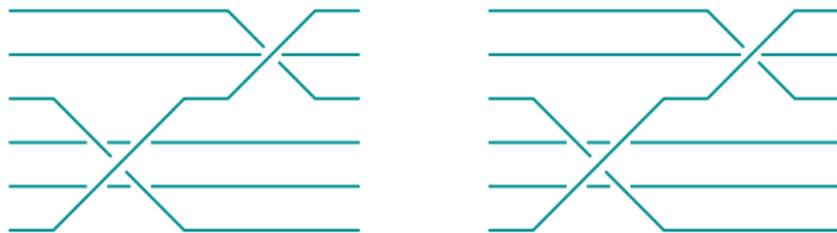


Figure: Diagramme de tresse et mot associé

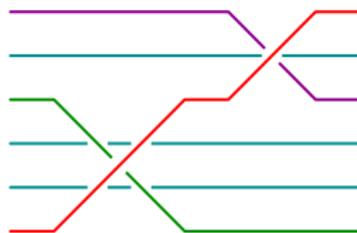
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

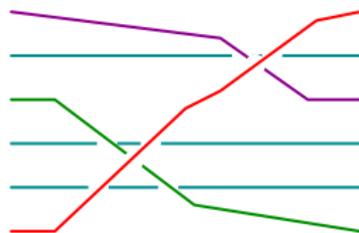
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

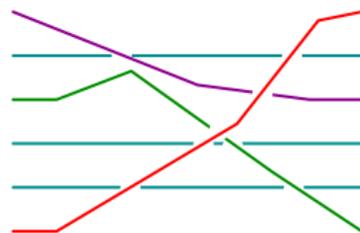
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

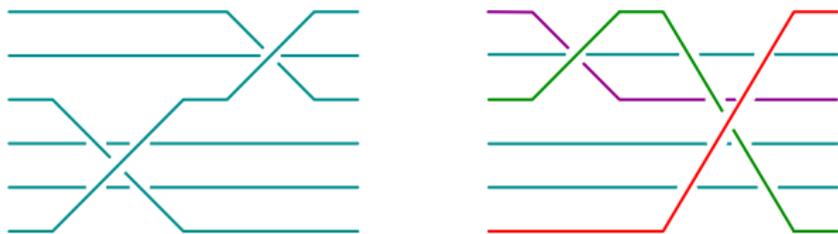
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

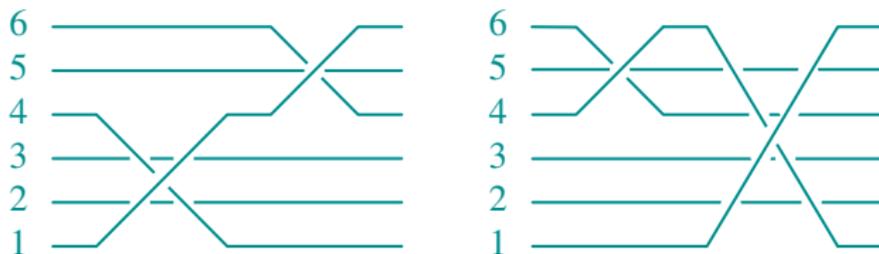
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

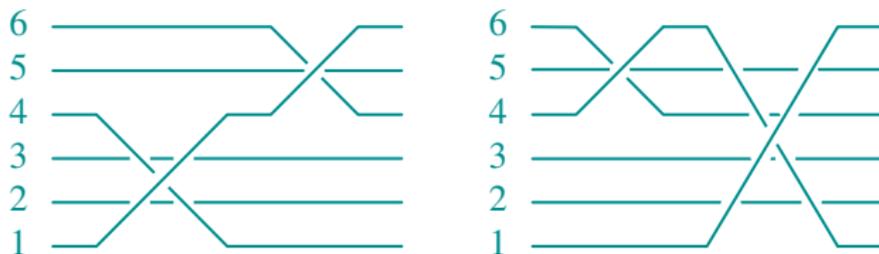
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = **classe d'équivalence** de diagrammes.

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s =$  ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s+1 <_s s+2 <_s \dots <_s s-1.$$

Longueur d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s =$  ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s + 1 <_s s + 2 <_s \dots <_s s - 1.$$

Longueur d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s =$  ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s + 1 <_s s + 2 <_s \dots <_s s - 1.$$

**Longueur** d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

# Série génératrice du monoïde de tresses dual

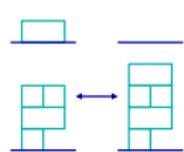
## Théorème

*La série génératrice des tresses duales sur  $n$  brins comptées selon leur longueur est égale à :*

$$F_n(t) = \sum \#\{\text{tresses de longueur } n\} t^n = \sum_{b \in B_n^{+*}} t^{|b|_{\Sigma_n}}$$

$$F_n(t) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right]^{-1} .$$

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

Polynôme générateur alterné des ppcm

# Empilements de pièces

$$H = \langle a, b, c \mid ac = ca \rangle.$$

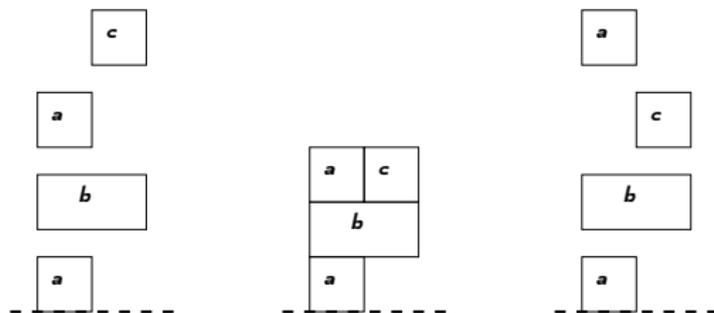
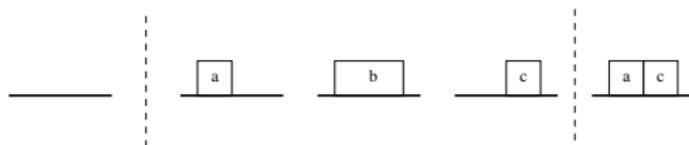


Figure: Trois représentations de  $abac = abca$  sous forme d'empilements.

# Énumération d'empilements, Viennot '86

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des empilements de hauteur au plus un :



Viennot construit une involution  $\Psi : \mathcal{M} \times H \rightarrow \mathcal{M} \times H$

- Si  $\Psi(m, h) = (m', h')$ , alors  $mh = m'h'$  et  $|m| = |m'| \pm 1$
- $\Psi$  admet uniquement  $(1, 1)$  comme point fixe.

[Viennot, 86], [Krattenthaler, 00], [Bouillard et Mairesse, 04]

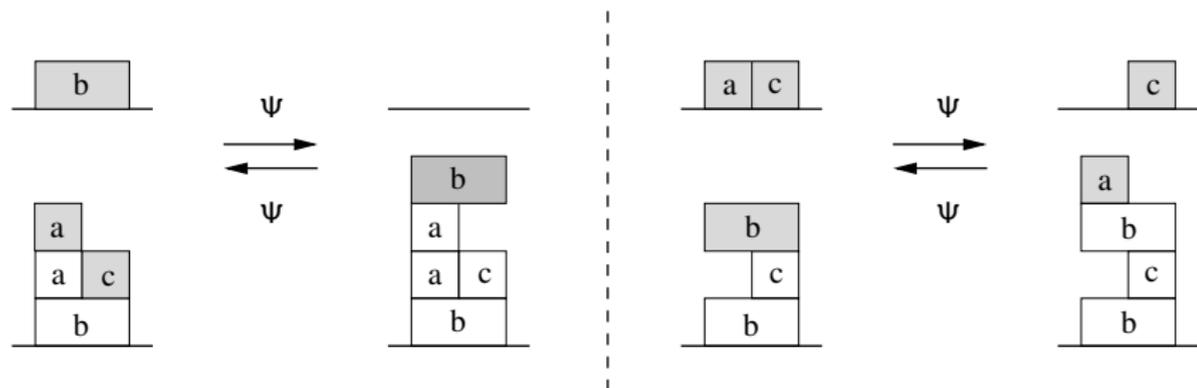


Figure: Quelques exemples de l'application  $\Psi$

## Calcul de la série génératrice

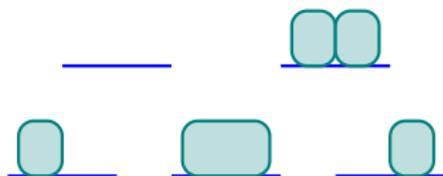
$$\begin{aligned} & \left( \sum_{m \in \mathcal{M}} (-1)^{|m|} m \right) \cdot \left( \sum_{h \in H} h \right) \\ &= \sum_{(m,h)} (-1)^{|m|} mh \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{(m,h) \neq (1,1)} (-1)^{|m|} (mh - m'h') \text{ où } \Psi((m,h)) = (m',h') \\ &= 1 \end{aligned}$$

En projetant, on obtient la série génératrice :

## Calcul de la série génératrice

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{m \in \mathcal{M}} (-1)^{|m|} m \right) \cdot \left( \sum_{h \in H} h \right) \\
 = & \sum_{(m,h)} (-1)^{|m|} mh \\
 = & 1 + \frac{1}{2} \sum_{(m,h) \neq (1,1)} (-1)^{|m|} (mh - m'h') \text{ où } \Psi((m,h)) = (m',h') \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant, on obtient la série génératrice :



$$F(t)(1 - 3t + t^2) = 1$$

Empilements  $\rightarrow$  tresses

$$\mathcal{J} = \{J \subset \Sigma_n \text{ tel que } M_J = \text{ppcm}J \text{ existe}\}$$

$\Psi$  **involution** définie par :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{J} \times B_n^{+*} &\rightarrow \mathcal{J} \times B_n^{+*} \\ (J, b) &\mapsto (J', b') \text{ avec } M_J b = M_{J'} b' \text{ et } |J \Delta J'| = 1 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\left( \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} M_J \right) \cdot \left( \sum_{b \in B_n^{+*}} b \right) = 1$$

et

$$F_n(t) = \left[ \sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} t^{|M_J|} \right]^{-1}$$

Empilements  $\rightarrow$  tresses

$$\mathcal{J} = \{J \subset \Sigma_n \text{ tel que } M_J = \text{ppcm}J \text{ existe}\}$$

$\Psi$  **involution** définie par :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{J} \times B_n^{+\star} &\rightarrow \mathcal{J} \times B_n^{+\star} \\ (J, b) &\mapsto (J', b') \text{ avec } M_J b = M_{J'} b' \text{ et } |J \Delta J'| = 1 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\left( \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} M_J \right) \cdot \left( \sum_{b \in B_n^{+\star}} b \right) = 1$$

et

$$F_n(t) = \left[ \sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} t^{|M_J|} \right]^{-1}$$

Empilements  $\rightarrow$  tresses

$$\mathcal{J} = \{J \subset \Sigma_n \text{ tel que } M_J = \text{ppcm}J \text{ existe}\}$$

$\Psi$  **involution** définie par :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{J} \times B_n^{+\star} &\rightarrow \mathcal{J} \times B_n^{+\star} \\ (J, b) &\mapsto (J', b') \text{ avec } M_J b = M_{J'} b' \text{ et } |J \Delta J'| = 1 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\left( \sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} M_J \right) \cdot \left( \sum_{b \in B_n^{+\star}} b \right) = 1$$

et

$$F_n(t) = \left[ \sum_{J \subset \Sigma_n} (-1)^{|J|} t^{|M_J|} \right]^{-1}$$

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

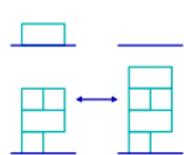
- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

# Étapes de la preuve

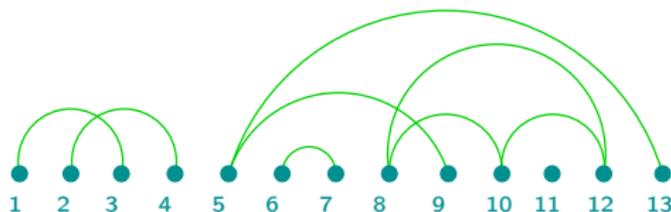


Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

Polynôme générateur alterné des ppcm

## Retour aux tresses duales

Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?

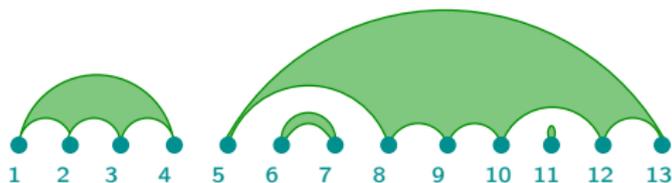
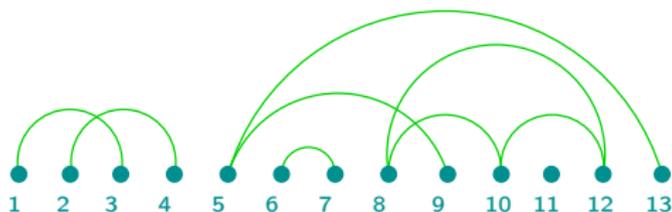


$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$

## Retour aux tresses duales

Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?

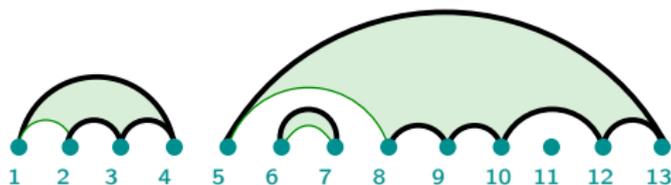
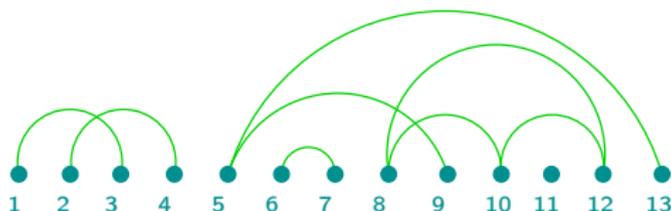


$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$

## Retour aux tresses duales

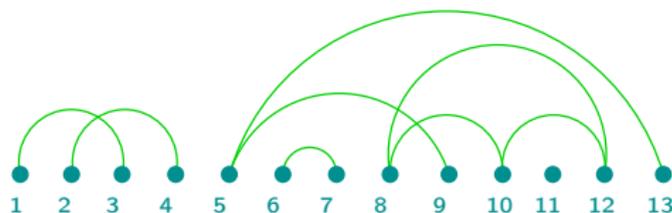
Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?



$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$

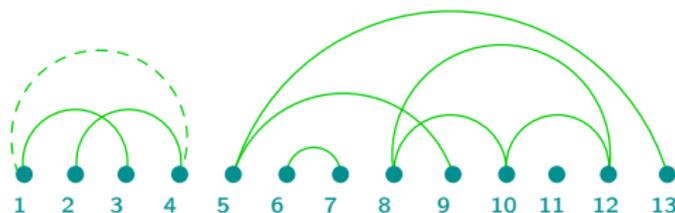
# Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

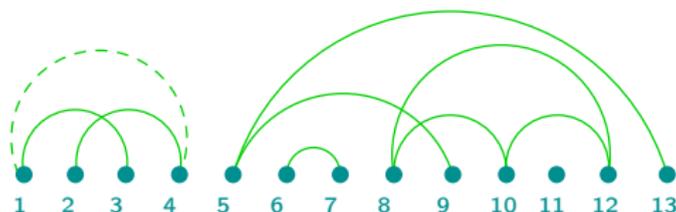
# Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

# Involution sur les configurations d'arêtes



$$s < t < u < v$$

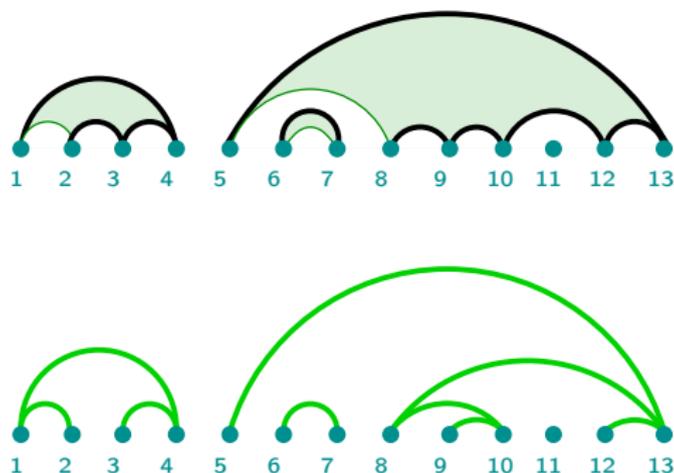


$$s < t < u < v$$

⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

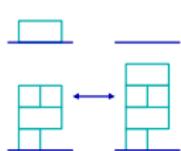
# Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

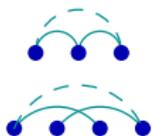
Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

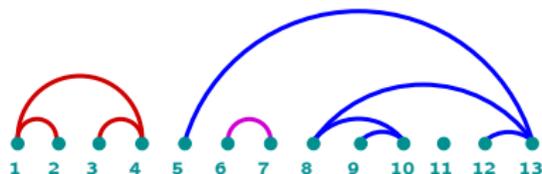
Polynôme générateur alterné des ppcm



Forêts alternantes non-croisées

?

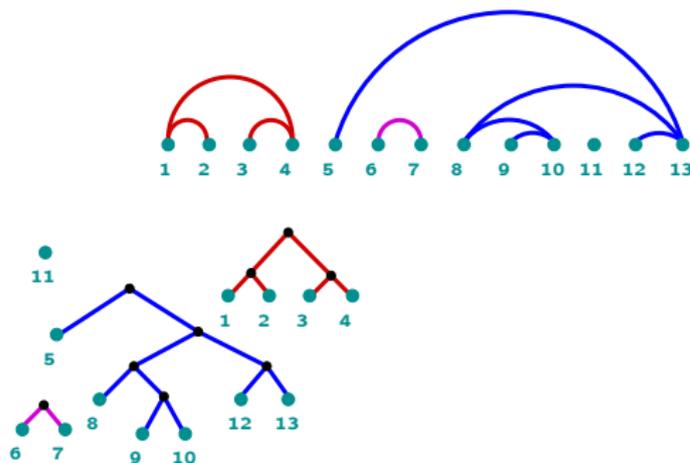
# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires



Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]

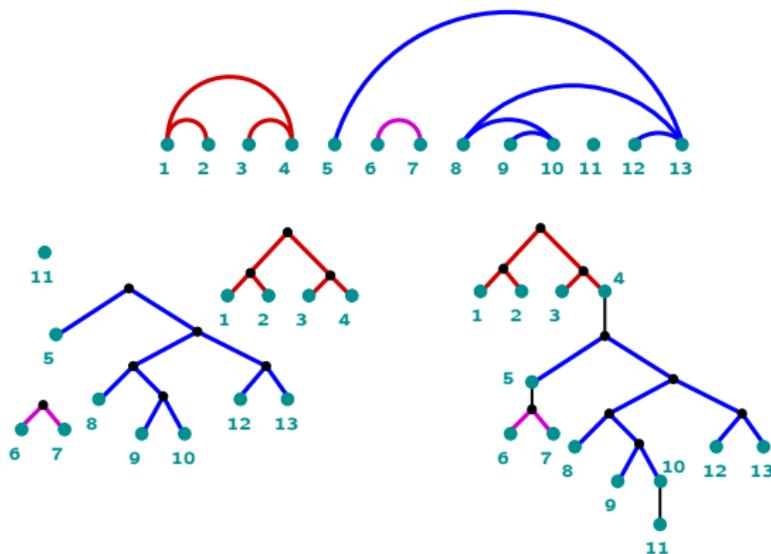
# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires



Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]

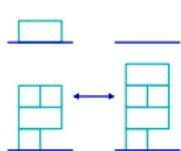
# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires



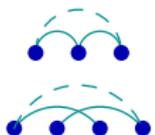
Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse



Polynôme générateur alterné des ppcm



Forêts alternantes non-croisées

Arbres unaires-binaires

# Série génératrice du monoïde de tresses dual

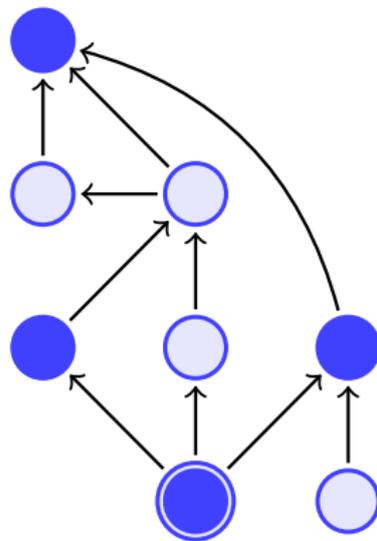
## Théorème

*La série génératrice des tresses duales sur  $n$  brins comptées selon leur longueur est égale à :*

$$F_n(t) = \sum \#\{\text{tresses de longueur } n\} t^n = \sum_{b \in B_n^{+*}} t^{|b|_{\Sigma_n}}$$

$$F_n(t) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right]^{-1}.$$

# DES ANIMAUX DIRIGÉS ?



## Des animaux dirigés ?

- $G$  un graphe **orienté**
- $S$  un ensemble fini de sommets de  $G$

### Definition

Un animal dirigé de source  $S =$   
ensemble de sommets de  $G$  tel que chaque sommet peut être  
atteint par un chemin inclus dans l'animal et issu d'un sommet de  
 $S$ .

L'aire de l'animal = son nombre de sommets

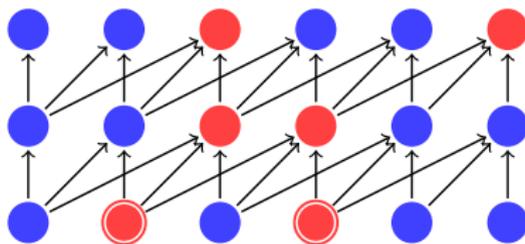
## Des animaux dirigés ?

- $G$  un graphe **orienté**
- $S$  un ensemble fini de sommets de  $G$

### Definition

Un **animal dirigé** de source  $S =$   
ensemble de sommets de  $G$  tel que chaque sommet peut être  
atteint par un chemin inclus dans l'animal et issu d'un sommet de  
 $S$ .

L'aire de l'animal = son nombre de sommets



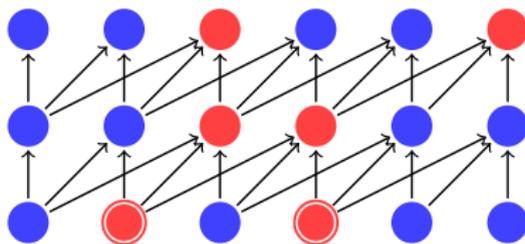
## Des animaux dirigés ?

- $G$  un graphe **orienté**
- $S$  un ensemble fini de sommets de  $G$

### Definition

Un **animal dirigé** de source  $S =$   
ensemble de sommets de  $G$  tel que chaque sommet peut être  
atteint par un chemin inclus dans l'animal et issu d'un sommet de  
 $S$ .

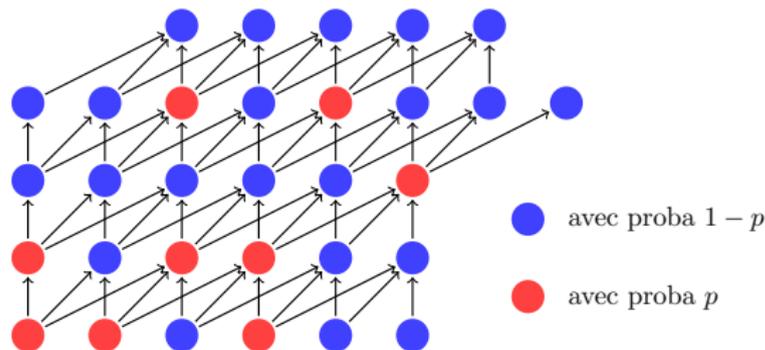
L'**aire** de l'animal = son nombre de sommets



## Modèle de gaz

**Configuration de gaz** = à chaque sommet, on associe 0 ou 1.

**Modèle de gaz** = loi de probabilités sur l'ensemble des configurations de gaz.



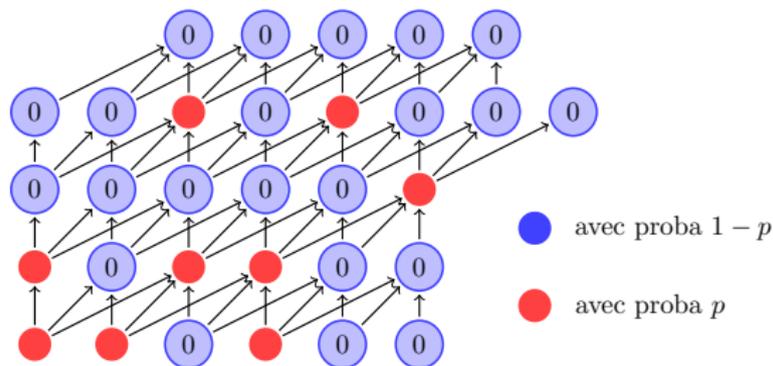
Série génératrice des animaux dirigés de source  $S =$   
 Probabilité que le gaz vaille 1 sur les sommets de  $S$ .

[Dhar, 86], [Bousquet-Mélou, Conway 96],  
 [Bousquet-Mélou, 98], [Le Borgne, Marckert 07]

## Modèle de gaz

**Configuration de gaz** = à chaque sommet, on associe 0 ou 1.

**Modèle de gaz** = loi de probabilités sur l'ensemble des configurations de gaz.



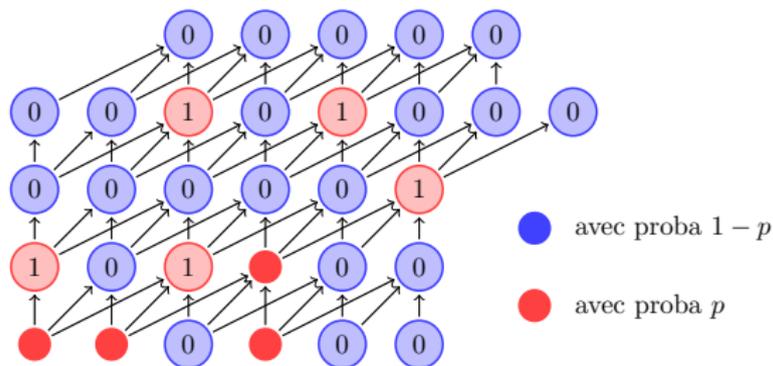
Série génératrice des animaux dirigés de source  $S =$   
 Probabilité que le gaz vaille 1 sur les sommets de  $S$ .

[Dhar, 86], [Bousquet-Mélou, Conway 96],  
 [Bousquet-Mélou, 98], [Le Borgne, Marckert 07]

## Modèle de gaz

**Configuration de gaz** = à chaque sommet, on associe 0 ou 1.

**Modèle de gaz** = loi de probabilités sur l'ensemble des configurations de gaz.



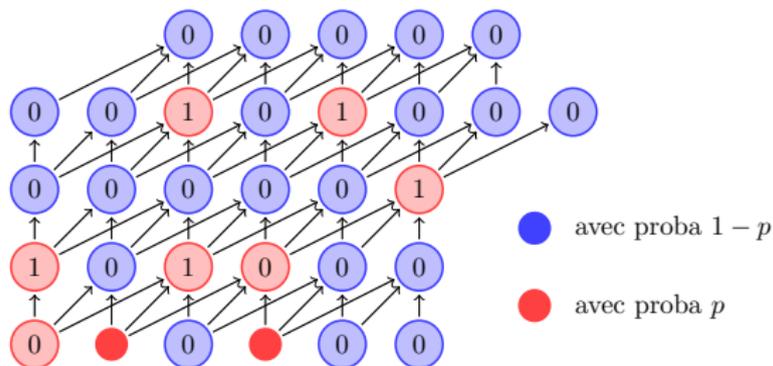
Série génératrice des animaux dirigés de source  $S =$   
 Probabilité que le gaz vaille 1 sur les sommets de  $S$ .

[Dhar, 86], [Bousquet-Mélou, Conway 96],  
 [Bousquet-Mélou, 98], [Le Borgne, Marckert 07]

## Modèle de gaz

**Configuration de gaz** = à chaque sommet, on associe 0 ou 1.

**Modèle de gaz** = loi de probabilités sur l'ensemble des configurations de gaz.



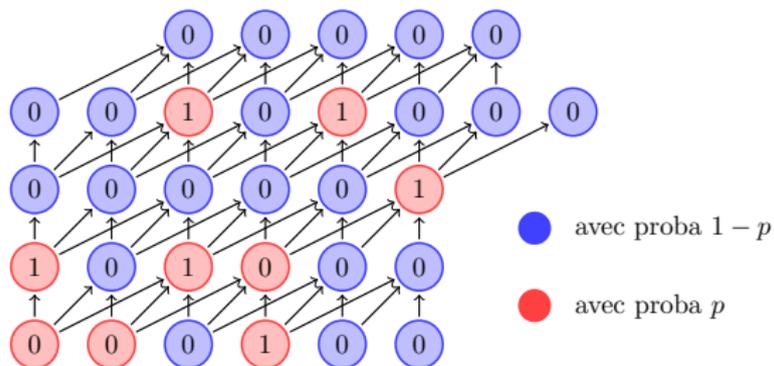
Série génératrice des animaux dirigés de source  $S =$   
 Probabilité que le gaz vaille 1 sur les sommets de  $S$ .

[Dhar, 86], [Bousquet-Mélou, Conway 96],  
 [Bousquet-Mélou, 98], [Le Borgne, Marckert 07]

## Modèle de gaz

**Configuration de gaz** = à chaque sommet, on associe 0 ou 1.

**Modèle de gaz** = loi de probabilités sur l'ensemble des configurations de gaz.



Série génératrice des animaux dirigés de source  $S =$   
 Probabilité que le gaz vaille 1 sur les sommets de  $S$ .

[Dhar, 86], [Bousquet-Mélou, Conway 96],  
 [Bousquet-Mélou, 98], [Le Borgne, Marckert 07]

# Contributions

Harmonisation et généralisation des résultats antérieurs obtenus à largeur finie.

[Nadal et al, 82], [Hakim, Nadal, 83],

[Bousquet-Mélou, Conway 96], [Bousquet-Mélou, 98]

- Une bonne notion de convergence de graphes.
- La définition et l'étude de chaînes de Markov cycliques

Définition d'un cadre général :

- La restriction du modèle de gaz à une ligne est une chaîne de Markov sous sa loi stationnaire.
- Nouveaux résultats d'énumération, pour des sources variées.

# Contributions

Harmonisation et généralisation des résultats antérieurs obtenus à largeur finie.

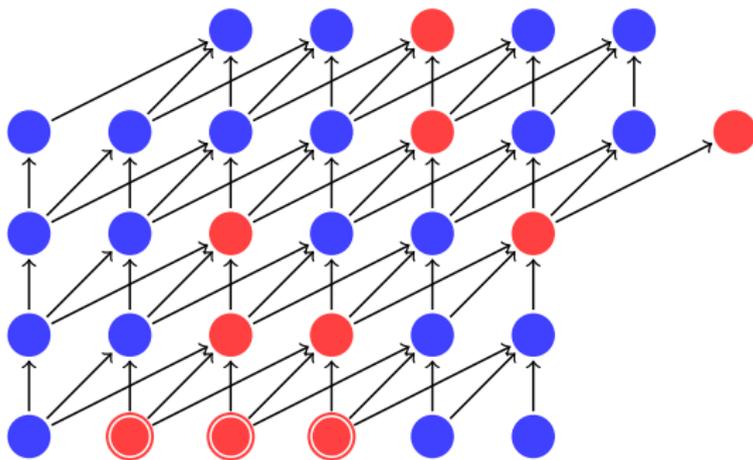
[Nadal et al, 82], [Hakim, Nadal, 83],

[Bousquet-Mélou, Conway 96], [Bousquet-Mélou, 98]

- Une bonne notion de convergence de graphes.
- La définition et l'étude de chaînes de Markov cycliques

Définition d'un cadre général :

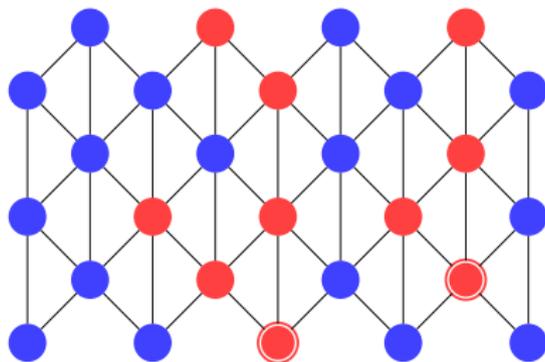
- La restriction du modèle de gaz à une ligne est une chaîne de Markov sous sa loi stationnaire.
- Nouveaux résultats d'énumération, pour des sources variées.

Sur le réseau  $\mathcal{L}_3$ 

$$\mathcal{F}(t) = \frac{2t^2(1 - \sqrt{1 - 4t - 4t^2})}{(1 + \sqrt{1 - 4t - 4t^2})(1 - 4t - 4t^2 + (1 + 2t)\sqrt{1 - 4t - 4t^2})}$$

voir également [Bousquet-Mélou, Conway 96]

## Sur le réseau triangulaire



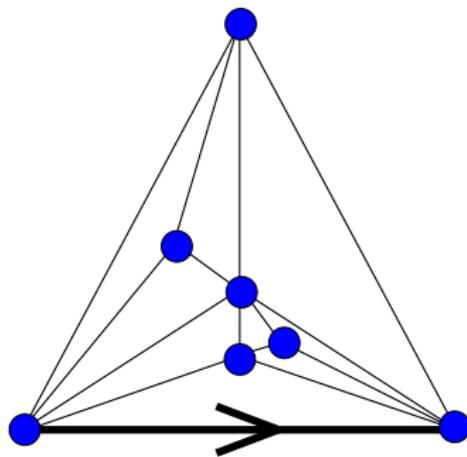
$$\mathcal{F}(t) = \frac{\alpha^2(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)},$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + 2t^2 + \sqrt{1 + 4t^2}}{2t^2}$$

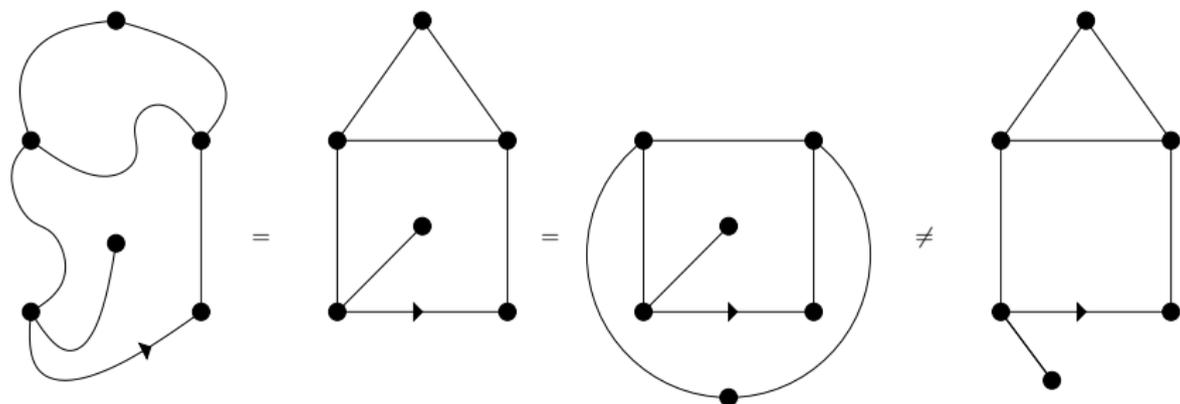
voir également [Bousquet-Mélou 98]

# DES CARTES ?



## Cartes planaires

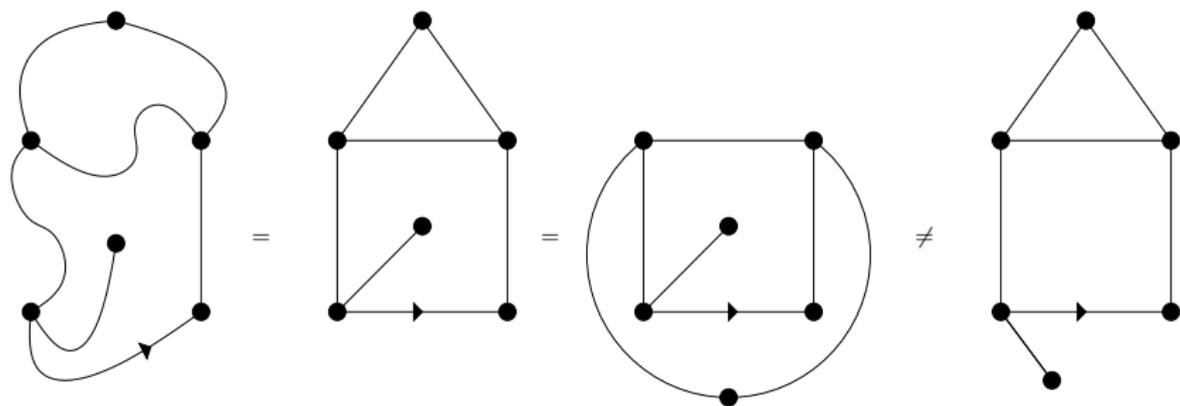
Carte planaire = graphe planaire connexe plongé proprement dans la sphère à homéomorphisme direct près



Carte **enracinée** : une arête orientée est distinguée.

## Cartes planaires

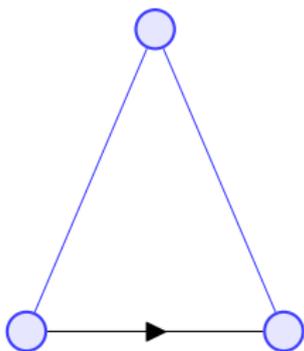
Carte planaire = graphe planaire connexe plongé proprement dans la sphère à homéomorphisme direct près



Carte **enracinée** : une arête orientée est distinguée.

## Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

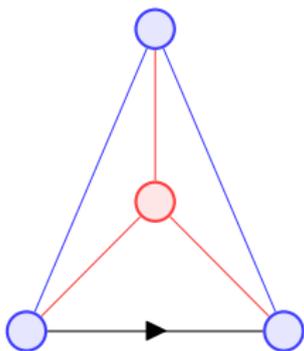
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

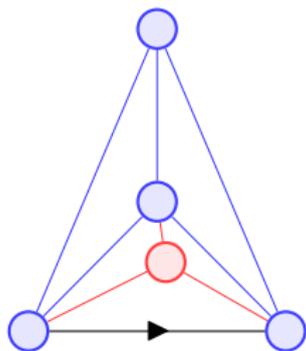
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

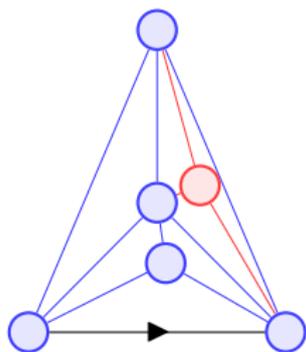
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

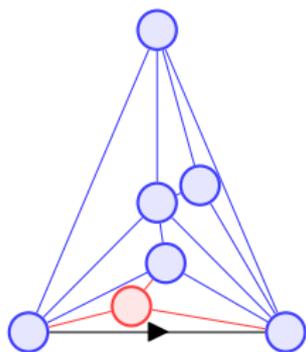
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

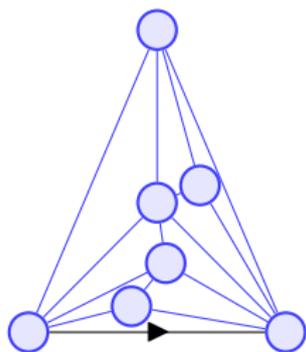
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

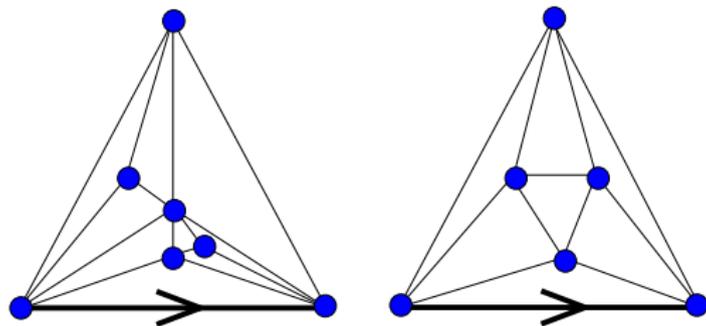
Les **triangulations en pile** = triangulations obtenues de manière récursive :



$\Delta_{2k}$  = ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.

# Triangulations en pile vs Triangulations

{triangulations en pile}  $\subsetneq$  {triangulations générales}



# Convergence de grandes cartes aléatoires

- **Grandes**? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires? Pour quelle loi?
- Convergence? Pour quelle topologie?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04],  
[Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06],  
[Marckert et Mokrakadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et  
Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et  
Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

# Convergence de grandes cartes aléatoires

- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- **Aléatoires** ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04],  
[Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06],  
[Marckert et Mokrakadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et  
Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et  
Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

# Convergence de grandes cartes aléatoires

- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- **Convergence** ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04],  
[Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06],  
[Marckert et Mokrakadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et  
Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et  
Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

# Convergence de grandes cartes aléatoires

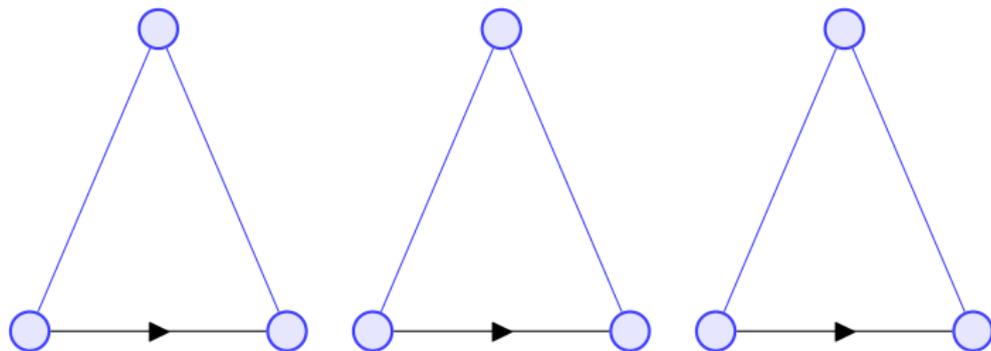
- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04],  
[Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06],  
[Marckert et Mokraddem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et  
Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et  
Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
 Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les  
 triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

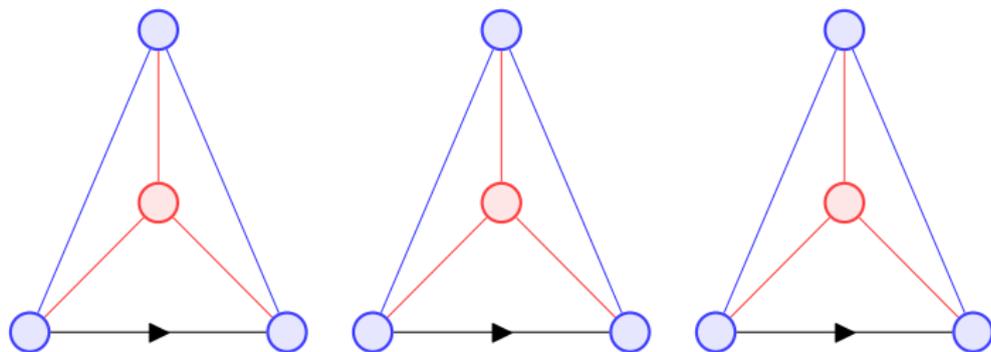


- la loi "historique", notée  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ , où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
 Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^{\Delta}$ ,

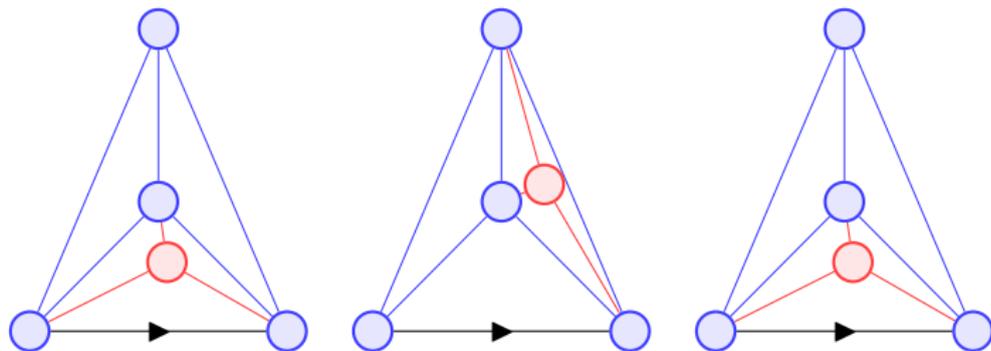


- la loi "historique", notée  $\mathbb{H}_{2k}^{\Delta}$ , où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

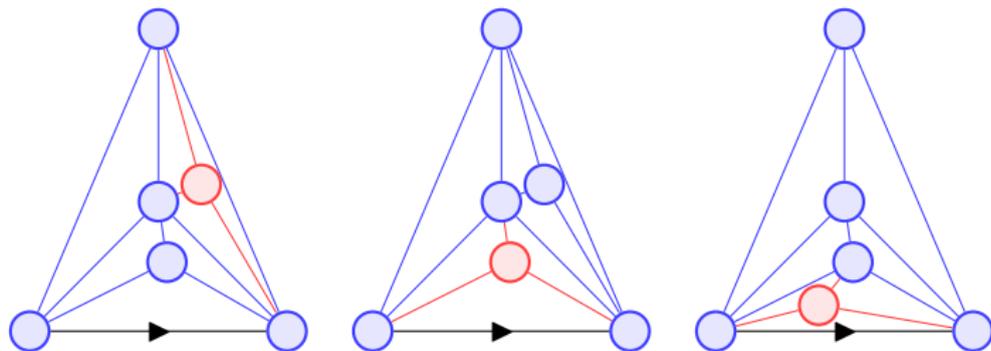


- la loi “historique”, notée  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ , où chaque carte a une probabilité d’apparaître proportionnelle à son nombre d’histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
 Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

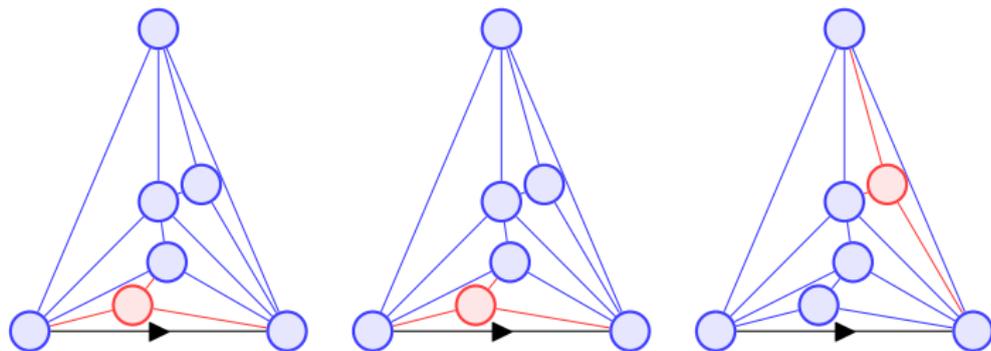


- la loi "historique", notée  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ , où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

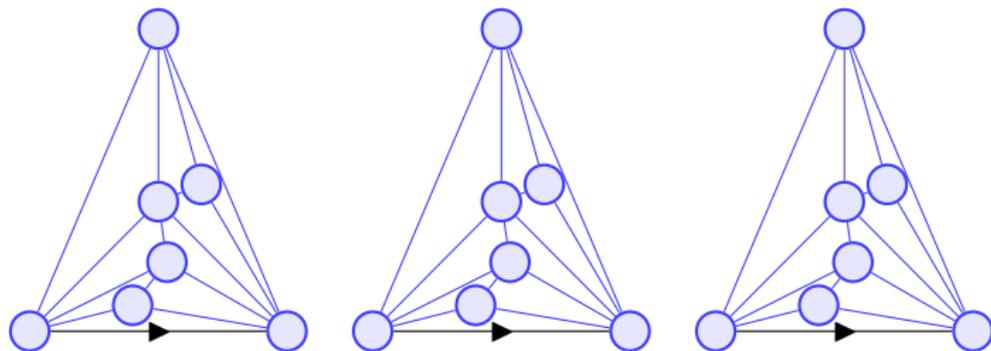


- la loi “historique”, notée  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ , où chaque carte a une probabilité d’apparaître proportionnelle à son nombre d’histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

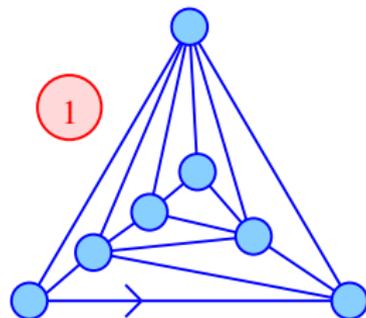
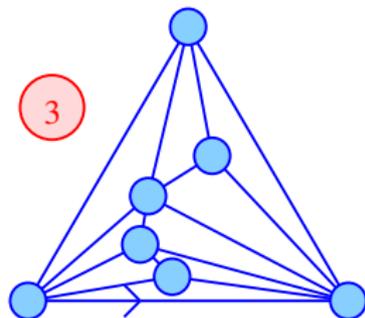


- la loi "historique", notée  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ , où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

## Deux lois de probabilités

On note  $\Delta_{2k}$  l'ensemble des triangulations en pile à  $2k$  faces.  
 Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les  
 triangulations de  $\Delta_{2k}$  :

- la loi uniforme, notée  $\mathbb{U}_{2k}^{\Delta}$ ,



- la loi "historique", notée  $\mathbb{H}_{2k}^{\Delta}$ , où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

# Résultats sur les triangulations en pile aléatoires

Sous  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ ,

- Étude du degré d'un sommet et de l'espérance de la distance entre deux points.  
[Zhou et al., 05], [Zhang et al., 06], [Zhang et al., 08]

Sous  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

- Étude du degré d'un sommet [Darasse et Soria, 07]
- Distribution limite de la distance entre deux sommets [Bodini, Darasse, Soria, 08]

# Résultats sur les triangulations en pile aléatoires

Sous  $\mathbb{H}_{2k}^\Delta$ ,

- Étude du degré d'un sommet et de l'espérance de la distance entre deux points.  
[Zhou et al., 05], [Zhang et al., 06], [Zhang et al., 08]

Sous  $\mathbb{U}_{2k}^\Delta$ ,

- Étude du degré d'un sommet [Darasse et Soria, 07]
- Distribution limite de la distance entre deux sommets [Bodini, Darasse, Soria, 08]

Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
loi uniforme	loi historique	

Quelle notion  
de convergence ?

## Deux notions de convergence : convergence locale

$B_m(r)$  = boule de rayon  $r$  centrée en la racine de  $m$ .

### Definition

Soient  $m$  et  $m'$  deux cartes de  $\mathcal{M}$ , la distance locale entre  $m$  et  $m'$  est :

$$d_L(m, m') = \inf \left\{ \frac{1}{1+r} \text{ où } B_m(r) \sim B_{m'}(r) \right\},$$

Convergence locale = Convergence des **boules** centrées en la racine.

# Convergence locale des triangulations en pile

- Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  :

## Théorème

*La suite  $(\mathbb{U}_{2n}^\Delta)$  converge faiblement vers  $P_\infty^\Delta$  pour la topologie de la convergence locale, lorsque  $n$  tend vers l'infini, où  $P_\infty^\Delta$  est une loi portée par les triangulations infinies.*

Ingrédients :

Convergence locale d'arbres de Galton-Watson,

Définition d'une carte infinie à la « Angel-Schramm »

- Sous  $\mathbb{H}_{2n}^\Delta$  :

Le degré de la racine tend vers l'infini,

⇒ Pas de convergence locale.

# Convergence locale des triangulations en pile

- Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$  :

## Théorème

*La suite  $(\mathbb{U}_{2n}^\Delta)$  converge faiblement vers  $P_\infty^\Delta$  pour la topologie de la convergence locale, lorsque  $n$  tend vers l'infini, où  $P_\infty^\Delta$  est une loi portée par les triangulations infinies.*

Ingrédients :

Convergence locale d'arbres de Galton-Watson,

Définition d'une carte infinie à la « Angel-Schramm »

- Sous  $\mathbb{H}_{2n}^\Delta$  :

Le degré de la racine tend vers l'infini,

⇒ Pas de convergence locale.

		Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
		loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers une loi portée par des trig. $\infty$	Pas de convergence	Angel et Schramm, 03 Chassaing et Durhuss, 06	

## Deux notions de convergence : convergence globale

Nombre de sommets tend vers l'infini

⇒ distance entre deux sommets tend vers l'infini.

Pour étudier le comportement global de la carte,  
il faut la renormaliser :

Longueur d'une arête = fonction du nombre de sommets.

## Deux notions de convergence : convergence globale

Nombre de sommets tend vers l'infini  
⇒ distance entre deux sommets tend vers l'infini.

Pour étudier le comportement **global** de la carte,  
il faut la renormaliser :

Longueur d'une arête = fonction du nombre de sommets.

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée			Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	?		Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

# Le Théorème

## Théorème

Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

*pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts,*

*où  $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}) =$  arbre continu d'Aldous.*

# Le Théorème

## Théorème

Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

pour la topologie de *Gromov-Hausdorff* sur les espaces métriques compacts,

où  $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}) =$  arbre continu d'Aldous.

# Le Théorème

## Théorème

Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

pour la topologie de *Gromov-Hausdorff* sur les espaces métriques compacts,

où  $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}) = \text{arbre continu d'Aldous}$ .

# Le Théorème

## Théorème

Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

pour la topologie de *Gromov-Hausdorff* sur les espaces métriques compacts,

où  $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}) = \text{arbre continu d'Aldous}$ .

## Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre  $X, Y$  compacts de  $(E, d)$  :

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}$$

Distance de *Gromov-Hausdorff* entre  $E$  et  $F$  métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf d_H(\phi(E), \psi(F))$$

Infimum pris sur :

- tous les espaces métriques  $M$
- toutes les isométries  $\phi : E \rightarrow M$  et  $\psi : F \rightarrow M$ .

{classes isométriques des espace métriques compacts}

= espace complet et séparable.

## Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre  $X, Y$  compacts de  $(E, d)$  :

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}$$

Distance de *Gromov-Hausdorff* entre  $E$  et  $F$  métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf d_H(\phi(E), \psi(F))$$

Infimum pris sur :

- tous les espaces métriques  $M$
- toutes les isométries  $\phi : E \rightarrow M$  et  $\psi : F \rightarrow M$ .

{classes isométriques des espace métriques compacts}

= espace complet et séparable.

## Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre  $X, Y$  compacts de  $(E, d)$  :

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}$$

Distance de *Gromov-Hausdorff* entre  $E$  et  $F$  métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf d_H(\phi(E), \psi(F))$$

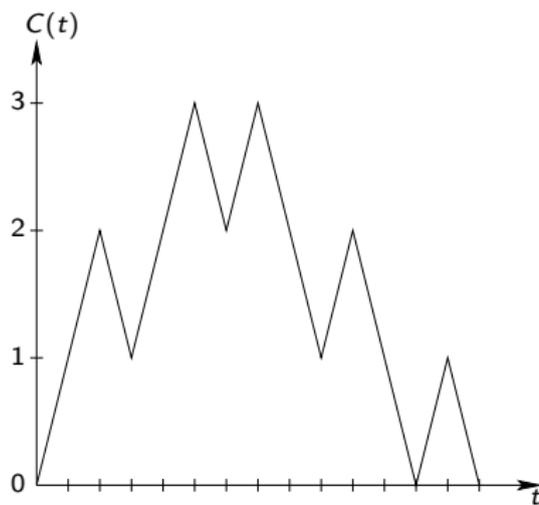
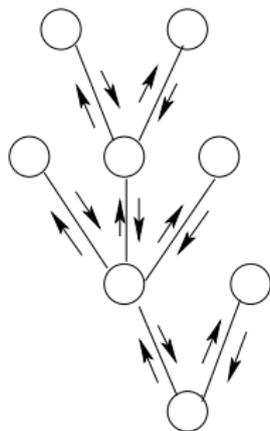
Infimum pris sur :

- tous les espaces métriques  $M$
- toutes les isométries  $\phi : E \rightarrow M$  et  $\psi : F \rightarrow M$ .

{classes isométriques des espace métriques compacts}

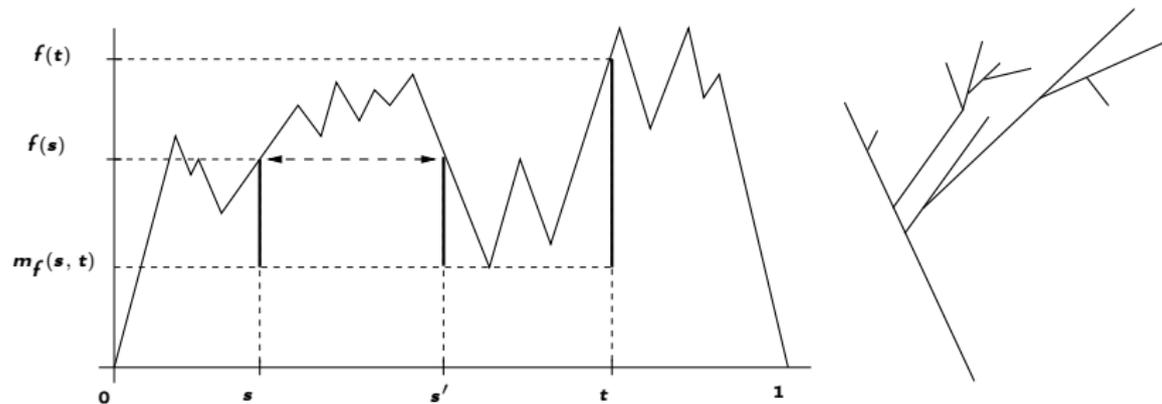
= espace complet et séparable.

# Contour d'un arbre



## Arbre continu

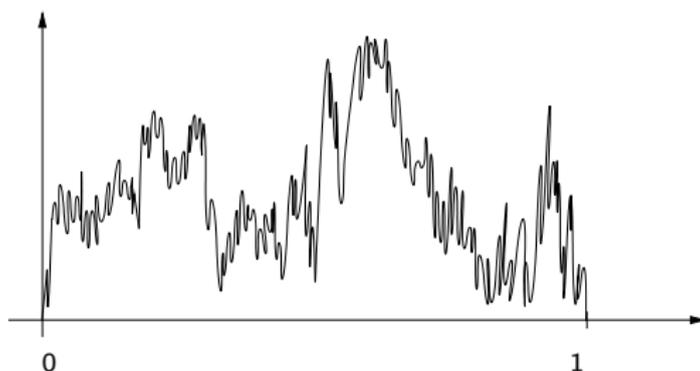
$f$  une fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ .



- $s \sim s'$  si et seulement si  $f(s) = f(s') = m_f(s, s')$
- arbre continu =  $[0, 1] / \sim$
- distance :  $d_f(s, t) = f(s) + f(t) - 2m_f(s, t)$

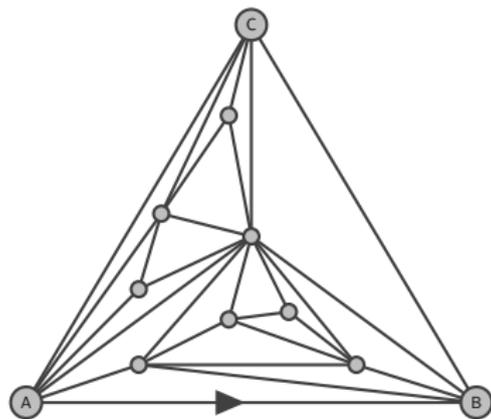
## Arbre continu d'Aldous – CRT

L'excursion brownienne renormalisée  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_t)_{t \in [0,1]}$  est un mouvement brownien conditionné à vérifier  $\mathcal{B}_0 = 0$ ,  $\mathcal{B}_1 = 0$  et  $\mathcal{B}(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, 1[$ .

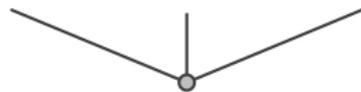


L'arbre continu d'Aldous est un arbre continu aléatoire défini à partir d'une excursion brownienne renormalisée.  
On le note  $(\mathcal{T}_{2\mathbf{e}}, d_{2\mathbf{e}})$ .

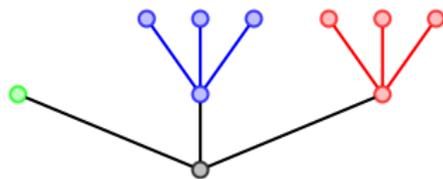
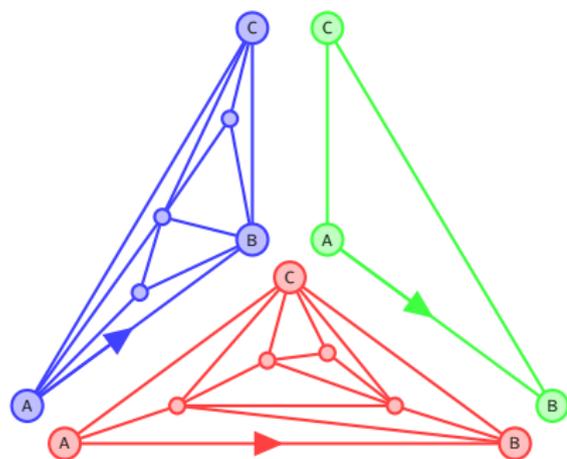
# Triangulations et arbres ternaires



[Darasse et Soria, 07]

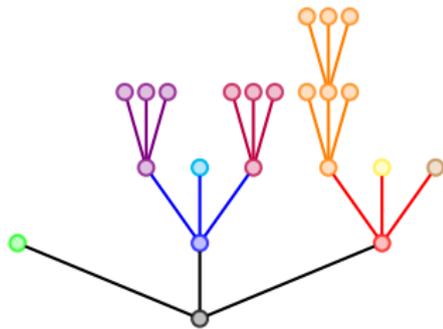
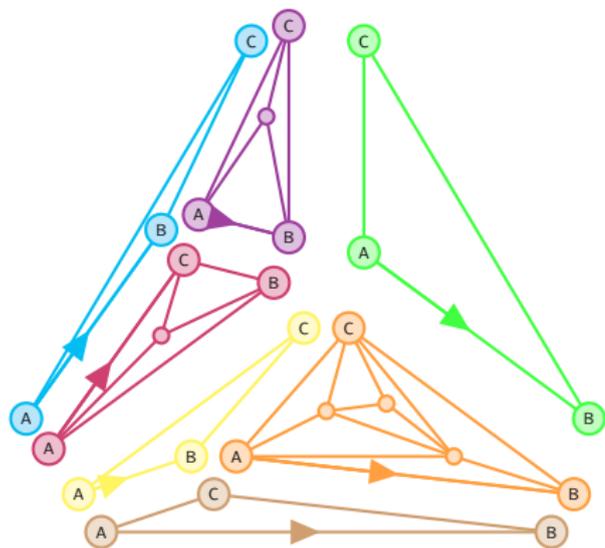


# Triangulations et arbres ternaires



[Darasse et Soria, 07]

# Triangulations et arbres ternaires



[Darasse et Soria, 07]

## Lien arbres et Cartes

## Proposition

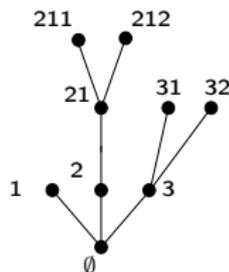
Pour tout  $K \geq 1$  il existe une bijection

$$\begin{aligned} \Psi_K^\Delta : \Delta_{2K} &\longrightarrow \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}} \\ m &\longmapsto t := \Psi_K^\Delta(m) \end{aligned}$$

- (i) Pour tout noeud interne  $u$  de  $m$ ,  $|\Gamma(u') - d_m(\text{root}, u)| \leq 1$ .  
 (ii) Pour tous noeuds internes  $u$  et  $v$  de  $m$

$$|d_m(u, v) - \Gamma(u', v')| \leq 3.$$

Formalisme de Neveu :  
 sommet = mot sur  $\{1, 2, 3\}$



## Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{ \text{mots de } \{1, 2, 3\}^* \text{ où apparaissent au moins une fois } 1, 2 \text{ et } 3 \}$

Pour  $u \in \{1, 2, 3\}^*$ ,

$\Gamma(u) = \max\{k \text{ tel que } u = u_1 \dots u_k, u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$

$$u = 122132132212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient  $u = w \cdot u_1 \dots u_k$  et  $v = w \cdot v_1 \dots v_l$  avec  $u_1 \neq v_1$ , on note :

$$\Gamma(u, v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

## Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{ \text{mots de } \{1, 2, 3\}^* \text{ où apparaissent au moins une fois } 1, 2 \text{ et } 3 \}$

Pour  $u \in \{1, 2, 3\}^*$ ,

$\Gamma(u) = \max\{k \text{ tel que } u = u_1 \dots u_k, u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$

$$u = 122132132212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient  $u = w \cdot u_1 \dots u_k$  et  $v = w \cdot v_1 \dots v_l$  avec  $u_1 \neq v_1$ , on note :

$$\Gamma(u, v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

## Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{ \text{mots de } \{1, 2, 3\}^* \text{ où apparaissent au moins une fois } 1, 2 \text{ et } 3 \}$

Pour  $u \in \{1, 2, 3\}^*$ ,

$\Gamma(u) = \max\{k \text{ tel que } u = u_1 \dots u_k, u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient  $u = w \cdot u_1 \dots u_k$  et  $v = w \cdot v_1 \dots v_l$  avec  $u_1 \neq v_1$ , on note :

$$\Gamma(u, v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

## Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{ \text{mots de } \{1, 2, 3\}^* \text{ où apparaissent au moins une fois } 1, 2 \text{ et } 3 \}$

Pour  $u \in \{1, 2, 3\}^*$ ,

$\Gamma(u) = \max\{k \text{ tel que } u = u_1 \dots u_k, u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient  $u = w \cdot u_1 \dots u_k$  et  $v = w \cdot v_1 \dots v_l$  avec  $u_1 \neq v_1$ , on note :

$$\Gamma(u, v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

## Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{ \text{mots de } \{1, 2, 3\}^* \text{ où apparaissent au moins une fois } 1, 2 \text{ et } 3 \}$

Pour  $u \in \{1, 2, 3\}^*$ ,

$\Gamma(u) = \max\{k \text{ tel que } u = u_1 \dots u_k, u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3} \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient  $u = w \cdot u_1 \dots u_k$  et  $v = w \cdot v_1 \dots v_l$  avec  $u_1 \neq v_1$ , on note :

$$\Gamma(u, v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

## Convergence des triangulations en pile

### Lemme

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $\{1, 2, 3\}$ . Soit  $W_n$  le mot  $X_1 \dots X_n$ , on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_{\Delta}, \text{ où } \Gamma_{\Delta} = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u, v) - \Gamma(u', v')| \leq 3$$

On montre :

$$P(\sup |d_{m_n}(u, v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u', v')| \geq n^{1/3}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

## Convergence des triangulations en pile

### Lemme

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $\{1, 2, 3\}$ . Soit  $W_n$  le mot  $X_1 \dots X_n$ , on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_{\Delta}, \text{ où } \Gamma_{\Delta} = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u, v) - \Gamma(u', v')| \leq 3$$

On montre :

$$P\left(\sup |d_{m_n}(u, v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u', v')| \geq n^{1/3}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

## Convergence des triangulations en pile

### Lemme

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $\{1, 2, 3\}$ . Soit  $W_n$  le mot  $X_1 \dots X_n$ , on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_{\Delta}, \text{ où } \Gamma_{\Delta} = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u, v) - \Gamma(u', v')| \leq 3$$

On montre :

$$P(\sup |d_{m_n}(u, v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u', v')| \geq n^{1/3}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

# Convergence des triangulations renormalisées

## Théorème

*Sous  $\mathbb{U}_{2n}^\Delta$ ,*

$$\left( m_n, \frac{D_{m_n}}{\Gamma_\Delta \sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

*pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.*

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	cvg en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers le CRT normalisation = $\sqrt{n}$		Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	cvg en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers le CRT normalisation = $\sqrt{n}$	cvg des lois fini-dimensionnelles normalisation = $\log n$	Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

## Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

## Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

## Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

## Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

# Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

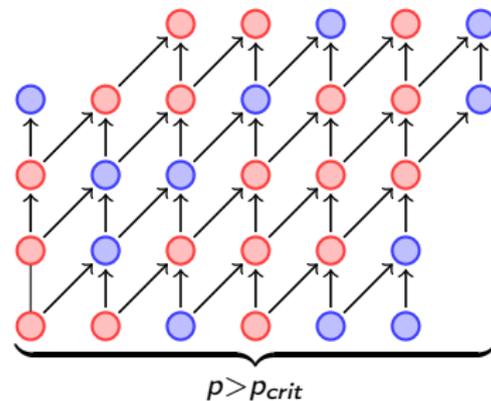
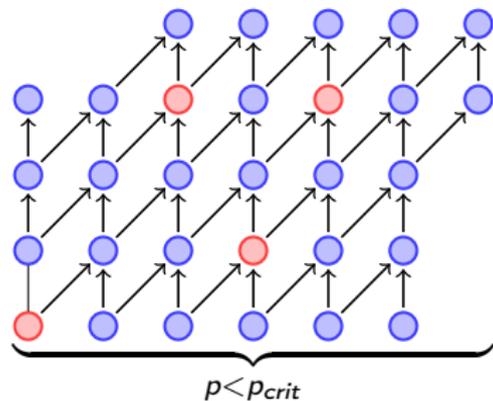
## Combinatoire du groupe de tresses



- Existe-t-il des algorithmes efficaces pour minimiser une tresse ?
- Que dire de la série génératrice des tresses ? Rationnelle ? Algébrique ?

1, 6, 26, 98, 338, 1110, 3542, 11098, 34362,  
105546, 322400, 980904, 2975728, ...

## Percolation dirigée



Série génératrice aire-périmètre des animaux dirigés

⇒ Valeur de la percolation critique.

## Carte brownienne

Convergence des quadrangulations renormalisées sous la loi uniforme ?

[Chassaing et Schaeffer, 04], [Marckert et Mokrakadem, 06],  
[Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08]

- Hypothèse d'universalité ? Convergence des modèles « raisonnables » vers la même limite ?
- Quelle limite ? Carte brownienne ...

## Carte brownienne

Convergence des quadrangulations renormalisées sous la loi uniforme ?

[Chassaing et Schaeffer, 04], [Marckert et Mokraddem, 06],  
[Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08]

- Hypothèse d'universalité ? Convergence des modèles « raisonnables » vers la même limite ?
- Quelle limite ? Carte brownienne ...

Merci !