Informatique Décisionnelle

Michel de Rougemont
Université Paris II

Contents

1 Introduction

Ce cours présuppose la maitrise des modèles informatiques suivants:

- Le modèle des fichiers auxquels on accède en utilisant le réseau, à l'aide de protocoles comme FTP ou HTTP,
- Le modèle des tableurs (Excel): calculer des informations stockées dans des céllules d'un tableur, afficher des statistiques,
- Le modèle relationnel (Access): les informations sont stockées dans des tables et on calcule des requêtes dont le résultat est aussi stocké dans des tables,
- Le modèle algorithmique simple: calcul d'une fonction (par exemple le tri) à l'aide d'un algorithme (par exemple, Quicksort), représenté dans un langage informatique (VBA, C, Java,..).

Le but du cours est de développer la Science des Données (*Data Science*), qui comporte l'analyse des données, la prédiction, l'intégration et la valorisation.

- l'analyse des données, aussi appelée analyse OLAP, consiste à étudier la répartition de certaines mesures de ces données selon certaines dimensions, spécifiées par un schéma OLAP,
- la prédiction, aussi appelée apprentissage (*machine learning*), consiste à trouver à partir de données d'apprentissage, une fonction qui sera aussi proche de données inconnues. On pourra alors prédire la valeur de la fonction,
- l'intégration des données est la possibilité de combiner plusieurs sources de données pour en faire l'analyse et la prédiction globale,
- la valorisation est l'étape qui permet de donner une valeur économique aux opérations précédentes.

Les techniques que nous présentons ont une robustesse par rapport à l'incertitude des données. Les données réelles sont en effet souvent *bruitées*, c'est-à-dire inexactes et approximatives, pour de nombreuses raisons:

- elles sont produites par des agents imparfaits,
- elles sont traitées par des processus physiques,
- elles reflètent des mesures qui sont toujours approximatives,
- elles peuvent être manipulées.

Il est donc fondamental d'isoler des procédures informatiques robustes au bruit, c'est-à-dire qui produisent des résultats ε-approchés lorsque les données sont ε-bruitées. Différentes distances entre objets et différentes notions d'approximation sont introduites et associées à la notion de robustesse.

Les principaux modèles informatiques étudiés dans ce cours sont:

- Le modèle d'automates sur les mots
- Le modèle d'arbres ordonnés, aussi appelé XML

- Le modèle relationnel: MySQL
- Le modèle OLAP: Mondrian
- Le Data-Mining: Dtree et SAS/Entreprise Miner
- Les mécanismes pour la valorisation des données

Les automates sur les mots se généralisent aux arbres et sont le fondement du langage XML. Le modèle relationnel se généralise au modèle OLAP et constitue le coeur des systèmes d'Information. Le Data-Mining s'applique à tous les modèles, mais le cours décrit son utilisation à partir du modèle OLAP, qui constitue les fondements du *Business Intelligence*.

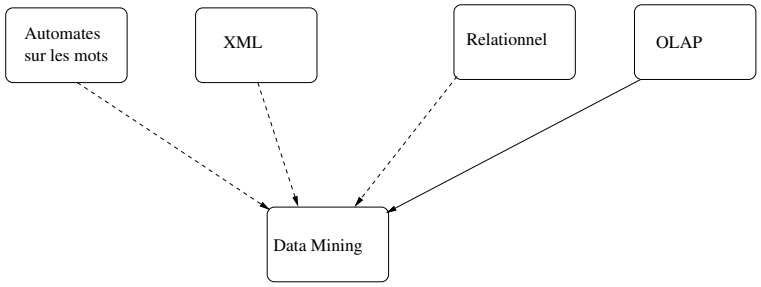


Figure 1: Les principaux liens entre les parties du cours.

Le cours est prolongé par des travaux dirigés qui illustrent les différentes techniques numériques introduites.

La section 2 décrit les modèles probabilistes et les modèles d'approximation et de robustesse. La section 3 décrit les modèles d'automates, modèle simplifié de calcul sur les données de texte. La section 4 décrit le modèle XML d'arbres. La section 5 décrit le modèle relationnel, et la section 6 le modèle OLAP. La section 7 décrit le Data-Mining et la section 8 les Mécanismes.

2 Robustesse et Modèles probabilistes

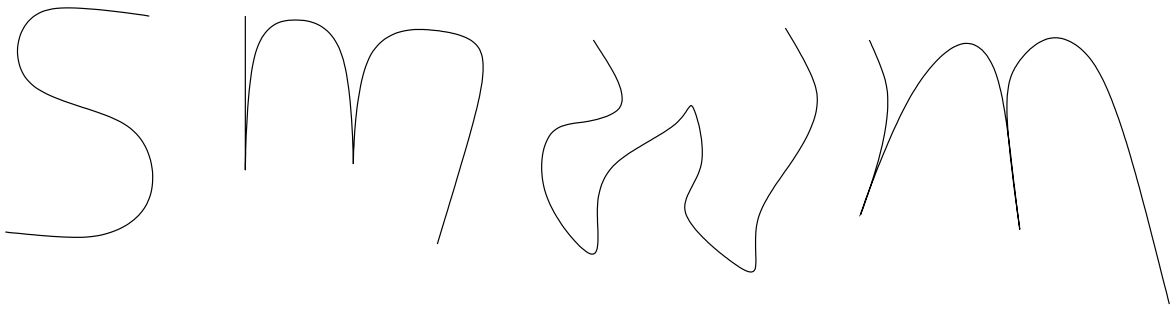
Un calcul robuste est un calcul qui est peu sensible aux erreurs sur les données. Si l'entrée $\hat{x}$ est une variation aléatoire de x à distance au plus ε, la sortie $f(\hat{x})$ est une variation aléatoire à distance au plus δ qui est fonction de ε. Il faut alors bien définir la distance sur x, et le choix d'une distance est essentiel.

En général, x est une donnée: cela peut-être un fichier ou une structure de données comme un arbre ou une table. Si on lit un fichier, on lit une séquence de 0 et de 1, donc un mot sur l'alphabet $\Sigma = 0, 1$. On peut transformer ce mot en arbre ou en table, en modificant la structure des données, mais il est important de comprendre comment traiter du texte, des arbres ou des tables. Les traitements seront différents dans chaque cas.

Les algorithmes probabilistes utilisent le hasard (tirage à pile ou face) et offrent très souvent des solutions robustes. Pour certains problèmes, on souhaite créer des problèmes difficiles grâce au bruit. C'est le cas des Captchas, décrits ci-dessous.

2.1 Captcha

A captcha (an acronym for "completely automated public Turing test to tell computers and humans apart") is a type of challenge-response test used in computing to determine whether or not the user is human. The term was coined in 2000 by Luis von Ahn, Manuel Blum, and Nicholas J. Hopper of Carnegie Mellon University, and John Langford of IBM. A common type of captcha requires that the user type the letters of a distorted and/or obscured sequence of letters or digits that appears on the screen. Because the test is administered by a computer, in contrast to the standard Turing test that is administered by a human, a captcha is sometimes described as a reverse Turing test.



Un captcha du mot *smwm*

On bruite le mot *smwm* et à partir d'un certain seuil de bruit, il devient difficile pour une machine de retrouver le mot original.

2.2 Robustesse sur les mots

Comment décider si un mot x ou si x est loin de L, lorsque L est un langage régulier, par exemple.

Il faut prélalablement définir une distance entre mots. Ils existent plusieurs distances classiques:

- la distance de Hamming. Pour deux mots de même longueur, la distance absolue est la somme des positions où ils diffèrent. Si $w_1 = 000011110$ et $w_2 = 000111101$ la distance est 3.
- la distance d'Edition est le nombre minimum d'effacements, de flips (changement de lettre), insertions pour transformer un mot dans l'autre. La distance est 2 pour l'exemple précédent.

- la distance d'Edition avec déplacements est la distance d'Edition où on ajoute comme opérateur élémentaire le déplacement d'un sous-mot arbitraire.

La distance relative est toujours égale à la distance absolue divisée par la longueur maximum des mots.

La distance d'un mot x à un langage L, on écrit $\mathsf{dist}(x, L)$, est par définition $Min_{x' \in L} \mathsf{dist}(x, x')$.

Comment peut-on calculer cette distance ou décider si elle grande ou petite? C'est en général un problème difficile si l'on recherche la distance exacte. Mais cela peut être un problème très simple si l'on recherche une solution approchée.

2.3 Algorithmes probabilistes

Nous donnons trois exemples simples d'algorithme probabiliste. Dans chaque cas, l'algorithme probabiliste permet un gain par rapport aux procédures classiques :

- correcteur arithmétique,
- une marche aléatoire sur un graphe symétrique,
- recherche de mots fréquents.

2.3.1 Correcteur arithmétique.

Supposons que des circuits arithmétiques (addition, multiplication, division) calculent avec une erreur $p = 0,3$. Pour deux valeurs aléatoires $x, y \in_r [0, ...N]$, le circuit *division* $div(x, y) = (q, r)$ produit un quotient q et un reste r, qui sont corrects avec probabilité $1 - p$ et erronnés avec probabilité p. Supposons que l'on s'intéresse uniquement au quotient.

Comment réduire, voire supprimer l'erreur? L'algorithme probabiliste suivant va permettre de rendre l'erreur aussi petite que l'on souhaite, par exemple 10^{-9}.

Entrée: *Deux entiers x et y sur un intervalle* $[0, ...N]$.
Sortie: *le quotient q de x et y.*

L'algorithme de correction est paramétré par m:

Correcteur pour la division:
Répétons $2m + 1$ *fois les opérations:*
Générer r_i *aléatoire dans* $[1, ..., N]$,
Calculer $x_i = x.r_i$, $y_i = y.r_i$,
Soit q_i *le quotient de* $div(x_i, y_i)$
Si $\{q_1, ...q_{2m+1}\}$ *a une réponse* q' *qui apparait plus de* $m+1$ *fois, appelée réponse majoritaire, stop,*
Sortie: *la réponse majoritaire q'.*

Montrons que cette réponse est correcte avec grande probabilité, par exemple 10^{-9}. Il faut évaluer la probabilité de ne pas avoir de réponse majoritaire, qui est la probabilité d'avoir $m +$

$1, m+2, ...2m+1$ réponses erronnées. Soit p la probabilité d'erreur, par exemple $p = 0,3$ et $q = 1-p$. La probabilité de ne pas avoir de réponse majoritaire est la probabilité μ:

$$\mu = \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{i} p^{2m+1-i}.q^{i} = p.p^{m}.q^{m} \sum_{i=0}^{m} p^{m-i}.q^{i-m} C_{2m+1}^{i} \leq p.p^{m}.q^{m}.2^{2m}$$

μ est en effet la somme pour toutes les combinaisons de i parmi $2m+1$ de la probabilité d'avoir i erreurs, et donc $2m+1-i$ réponses correctes. En majorant p par 1 on obtient :

$$\mu \leq p^{m}.q^{m}.2^{2m} = (4pq)^{m}$$

On a alors en remplacant $p = 1/3$ et $q = 2/3$, $4.p.q = 8/9$. Pour que $(4pq)^{m} \leq 10^{-9}$, il suffit de choisir $m \geq \frac{9.log10}{log9/8} \geq 180$.

L'argument précédent est similaire tant que $p = 1/2 - \varepsilon$.

2.3.2 Chemin aléatoire dans un graphe non orienté (Facultatif, sujet avancé)

Soit $G = (D_n, E)$ un graphe non orienté à e arêtes. Le problème $UGAP$ est défini de la manière suivante.

> **Entrée:** *Un graphe non orienté et deux points s et t.*
> **Sortie:** *1 s'il existe un chemin entre s et t, 0 sinon.*

Ce problème est exactement le problème GAP dans le cas où le graphe est symétrique. Ce problème est polynomial car il existe des algorithmes en temps polynomial pour trouver un chemin. Peut-on le résoudre de manière déterministe en utilisant une mémoire finie?

Montrons cependant qu'il existe une solution probabiliste en espace $O(\log n)$, pour $UGAP$ en analysant une *marche aléatoire* à partir de s en espérant arriver à t.

> *Algorithme probabiliste pour UGAP :*
> *Itérer k fois la procédure suivante.*
>
> 1. *Soit $u := s, i := 1$.*
>
> 2. *Tant que $i < 2.n^3$, on considère les arêtes d'origine u:*

- *on tire une des arêtes (u, u') au hasard*[1].
- $u := u'$, $i := i + 1$.

> 3. *Si $u = t$, alors il existe un chemin entre s et t.*
>
> 4. *Sinon il n'existe probablement pas de chemin entre s et t.*

Il est clair que cet algorithme utilise comme espace deux registres, où se trouvent le code u d'un noeud arbitraire dans un graphe à n points et l'entier i. Il utilise donc $log\ n$ bits. Montrons

[1] Le tirage suit une distribution uniforme. S'il y a m arêtes, chacune a une probabilité de $1/m$ d'être tirée.

maintenant qu'un chemin aléatoire de longueur $O(n^3)$ a plus d'une chance sur 2 d'arriver à t s'il existe un chemin entre s et t.

L'argument utilise quelques résultats classiques sur les chaînes de Markov [MR95] pour estimer le temps moyen $T(i)$ nécessaire à l'exploration de tous les noeuds du graphe à partir d'un sommet i. Ce temps moyen $T(i)$ sera borné par $O(n^3)$. On en déduira alors qu'un chemin aléatoire de longueur supérieure à cette borne polynomiale a plus d'une chance sur deux d'atteindre un sommet arbitraire t s'il existe un chemin entre s et t.

L'algorithme précédent définit un processus Markovien auquel on associe une matrice de transition A, telle que $a_{i,j}$ soit la probabilité de passer du noeud i au noeud j. Une telle représentation permet de calculer A, A^2,...,A^k. La matrice A^k donne les probabilités d'atteindre un sommet i à partir d'un sommet j après k transitions. Les probabilités *stationnaires*, si elles existent, sont définies comme les probabilités limites en chacun des points et sont données par le vecteur π tel que :

$$A.\pi = \pi$$

où $\sum_{i=1}^{n} \pi(i) = 1$. Si $d(i)$ est le degré du noeud i, on vérifie alors que

$$\pi(i) = \frac{d(i)}{2e}$$

où $2e$ est le nombre de couples $(i,j) \in E$. Le système précédent admet une solution unique, et cette expression est une solution. Nous admettons ici le résultat fondamental des chaînes de Markov montrant l'unicité de π si la chaîne est irréductible (le graphe G est connexe), finie et apériodique.

Dnition 1. *Soit $t(i,j)$ l'espérance du nombre de transitions pour aller de i à j et $T(i)$ celle du nombre de transitions pour qu'un chemin parcoure tous les noeuds en partant de i.*

Nous admettons un autre résultat important : $T(i)$ est l'inverse de la probabilité stationnaire $\pi(i)$ et donc

$$T(i) = \frac{2e}{d(i)}$$

Pour une arête a, soit $f(a)$ le nombre de passages par a d'une marche aléatoire et $I\!E(f(a))$ l'espérance de cette fonction aléatoire, c'est-à-dire le nombre moyen de passages en a. Le dernier résultat que nous utilisons est :

$$I\!E(f(a)) = \frac{1}{2e}$$

Cette espérance est aussi appelée *la fréquence stationnaire d'une arête* et est indépendante de l'arête considérée.

Lemma 1. *Si i et j sont deux sommets adjacents de G, alors $t(i,j) + t(j,i) \leq 2e$.*

Dnstration: Si i et j sont des sommets arbitraires, $t(i,j) + t(j,i)$, le nombre moyen de transitions lors d'un parcours de i vers j et retour est égal à $2e$ fois l'espérance $I\!E(f(a)) = E$ du nombre d'apparitions de chaque arête a. Celle-ci est la même pour toutes les arêtes d'après la remarque précédente. Donc $t(i,j) + t(j,i) = 2e.E$. Considérons l'arête $a = (i,j)$. L'espérance du nombre d'apparitions de cette arête,

notée E_a, est inférieure ou égale à 1, car de nombreux aller-retours n'empruntent pas cette arête. Dans le cas où l'on doit emprunter l'arête a, on dit que a est un isthme, et $E_a = 1$. Et donc $t(i,j) + t(j,i) \leq 2e$.

On peut alors déduire du lemme précédent que si $d(i,j)$ est la distance entre i et j, c'est-à-dire le nombre d'arêtes d'un plus court chemin entre i et j :

$$t(i,j) + t(j,i) \leq 2e.d(i,j)$$

Lemma 2. $T(i) \leq 2e.(n-1)$.

Dnstration: Soit H un arbre recouvrant pour le graphe G. Pour explorer tous les noeuds à partir d'un noeud s et revenir en s il faut traverser chaque arête de H dans les deux sens.

$$T(i) \leq \sum_{(j,j') \in H} (t(i_j, i_{j'}) + t(i_{j'}, i_j))$$

D'après le lemme précédent :

$$T(i) \leq 2e.(n-1)$$

On peut remarquer alors que $e < n^2$ et donc $T(i) < 2.n^3$.

2.3.3 Mots fréquents dans un texte

Supposons un texte de grande taille écrit en Français, où on recherche les expressions les plus féquentes. On considère chaque mot du dictionnaire comme une lettre et les blancs séparent les lettres. L'alphabet est donc le dictionnaire du Français avec par exemple 20.10^3 mots.

L'expression *Algorithme probabiliste* apparait sans-doute très souvent dans ce document. C'est un mot de longueur 2. Il est naturel de s'intéresser aux mots d'une longueur k les plus fréquents, qui donnent des indices importants sur le texte.

On peut lire le document entier et pour chaque mot de longueur 2, établir un compteur qui sera incrémenté pour chaque occurrence. Si le document a $n = 10^9$ mots, sa lecture peut nécessiter quelques heures. Est-il possible d'obtenir les mots les plus fréquents sans lire tout le document, prenant la forme d'un fichier f.txt ?

Un algorithme probabiliste peut générer un entier i entre 1 et n avec la distribution uniforme, c'est-à-dire que la probabilité de trouver i est $1/n$. Il peut aussi lire les mots à partir de la position i, en 1 étape. Soit d la densité d'un sous-mot u de longueur k dans un fichier f.txt de longueur n définie comme le nombre d'occurrence de u dans f.txt, divisé par le $n - k + 1$ (nombre maximum d'occurences possibles).

On peut alors considérer le vecteur ustat_k qui donne la densité de tous les mots de longueur k dans le texte. Pour chaque mot u de longueur k:

$$\mathsf{ustat}_k[u] = \frac{\#\text{occurences de } u}{n-k+1}$$

La dimension de ce vecteur est 400.10^6 ! Cependant un texte en Français va générer un vecteur creux (sparse) où la plupart des densités sont nulles. Par exemple le mot *Algorithme Algorithme* n'apparaitra sans-doute pas, alors que le mot *Algorithme probabiliste* apparaitra plusieurs fois. Si le fichier f.txt avait été généré en prenant chaque mot au hasard dans le dictionnaire avec la distribution uniforme, alors la vecteur ustat_k sera proche de la distribution uniforme. Mais pour un fichier réel, le vecteur densité sera creux et loin d'être uniforme.

Si on procède à N échantillons en prenant une position i au hasard et en lisant le mot u de longueur k à partir de cette position i, on peut alors définir le vecteur $\widehat{\mathsf{ustat}}_k$ qui est le vecteur ustat_k sur les seuls N échantillons. Ce vecteur $\widehat{\mathsf{ustat}}_k$ approxime ustat_k dès que N est suffisamment grand, mais bien inférieur à n. On trouvera alors les mots les plus fréquents parmi les mots de plus forte densité dans $\widehat{\mathsf{ustat}}_k$.

2.4 Approximation

De nombreux problèmes sur des données peuvent être difficiles si l'on recherche une solution exacte, mais beaucoup plus faciles si l'on recherche une solution approchée.

Considérons la programmation linéaire, comme un exemple d'optimisation. On souhaite trouver une solution x, i.e. un vecteur positif de dimension n, qui maximise $c^t.x$ tels que $A.x \leq b$.

Exemple.

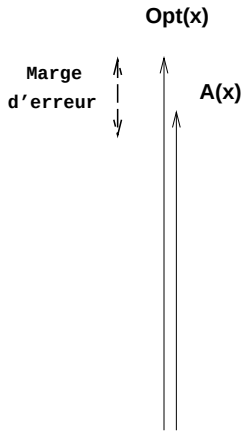
- Dans le cas où les x_i sont rationnels ou réels, l'algorithme du Simplex, donne une solution. Cependant le Simplex peut être exponentiel en temps, et il suffit alors de perturber aléatoirement la matrice A pour obtenir très rapidement une solution proche de l'optimum.
- Dans le cas où les x_i sont entiers ou booléens (0 ou 1), il n'est pas possible d'approximer efficacement la solution optimale.

Un algorithme approche à ε près un problème d'optimisation s'il calcule pour toute entrée x une solution y telle que :

$$\frac{\mid val(y) - opt(x) \mid}{Max\{opt(x), val(y)\}} \leq \varepsilon$$

$Val(y) = c^t.y$ dans le cas de la programmation linéaire et $opt(x)$ est la valeur de la solution optimale. Un problème d'optimisation est ε-approximable s'il existe $\varepsilon < 1$ et un algorithme polynomial qui l'approche à ε près.

Dans le cas d'un problème de maximisation, la marge d'erreur entre $A(x)$ et $opt(x)$ est inférieure à $\varepsilon.opt(x)$ et $A(x) \geq (1 - \varepsilon).opt(x)$, comme le décrit la figure ci-dessous.



Approximation d'un problème de maximisation.

La définition d'approximation peut être généralisée en considérant des ε qui dépendent de n, par exemple $\varepsilon(n) = \log n$.

2.4.1 Approximation de problèmes de décision

Dans l'exemple précédent (programme linéaire), on calcule une valeur numérique, l'optimum. Supposons que l'on demande si $x > \lambda$ ou que $x \leq \lambda$. La réponse est alors 1 (vrai) ou 0 (faux). Comment approximer un tel problème, appelé un problème de décision?

Un tel problème C prend une entrée x, donnée qui peut être grande, et la sortie est 1 si $x \in C$ ou 0 si $x \notin C$. Supposons que x soit un elément d'un domaine D muni d'une distance relative (entre 0 et 1). On dit que x est ε-loin d'une classe C (un ensemble de x) si:

$$Min_{y \in C}\ \mathsf{dist}(x, y) \geq \varepsilon$$

La solution est la suivante: on fixe un $0 < \varepsilon < 1$ arbitraire et on cherche à décider 1 si la réponse est vraie et 0 si x est ε-loin d'être vrai, à l'aide d'un algorithme probabiliste.

De manière plus concise, on cherche un algorithme A qui prend x en entrée tel que:

- Si $x \in C$, alors $A(x) = 1$,
- Si x est ε-loin de C, alors $Prob[A(x) = 0] > 2/3$,

Noter que si x est ε-proche, alors A peut se tromper. Il n'y a pas de guarantie, car on relâche le critère de décision exact. On dit alors que A est un ε-testeur pour C.

Exemple: soit x un mot sur un alphabet Σ et C un sous-ensemble de mots. Prenons la distance d'édition sur les mots. Soit $\varepsilon = 10\%$. On cherche donc à décider si $x \in C$ ou si x est ε-loin de C avec grande probabilité. Si C est un ensemble simple (régulier par exemple), il existe des algorithmes A qui peuvent réaliser cette approximation sans lire tout le mot, en réalisant environ 100 échantillons $(1/\varepsilon^2)$ de longueur 10 $(1/\varepsilon)$.

3 Modèle de calcul sur les mots

Le traitement de l'information nécessite un *modèle de calcul*. Les automates finis sont un des modèles les plus simples, qui ont des variantes sur les arbres ainsi que sur d'autres classes de structures.

Ces modèles de machines sont des des machines de Turing *sans mémoire* et jouent un rôle important en Logique et en Informatique.

3.1 Les automates sur les mots

Soit Σ un alphabet fini et w un mot sur Σ. Un *Langage* est un ensemble de mots.

Dnition 2. *Un* **automate fini** *est défini par* (Q, q_0, F, δ)*, tel que:*

- Q *est un ensemble fini d'états,*
- $q_0 \in Q$ *est l'état initial,*
- $F \subseteq Q$ *est un ensemble d'états finaux,*
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.

Un automate est *déterministe* si δ est une fonction $Q \times \Sigma \to Q$. Dans ce cas, on écrit: $\delta(q, s) = q'$. Dans le cas où δ n'est pas une fonction, l'automate est dit *non déterministe*.

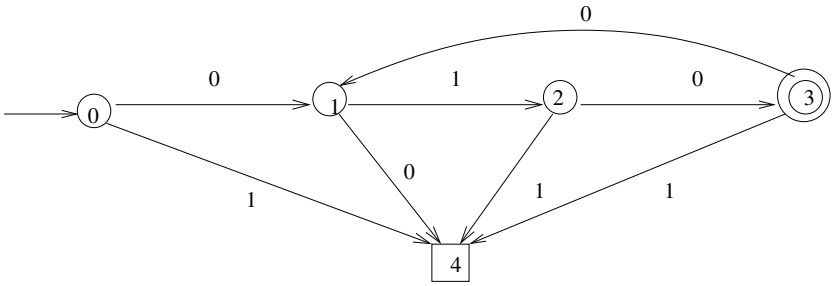


Figure 2: Un automate fini à 4 états et sa complétion à 5 états.

On représente souvent un automate par un graphe où les noeuds sont les états et les arêtes sont des transitions possibles lorsque l'automate lit un symbole s. Chaque arête est étiquetée par un tel symbole s tel que $q.s.q'$ soit une transition. L'exemple précédent a 4 états $\{0, 1, 2, 3\}$ et l'état 4 est l'état qui permet de compléter l'automate pour que la fonction δ soit toujours définie. On obtient alors la *complétion* de l'automate.

Un mot $w = w_1, ...w_n$ est accepté par l'automate s'il existe une séquence d'états $q_1, ...q_n \in Q$ tels que:

- $\delta(q_0, w_1) = q_1$,

- $\delta(q_i, w_{i+1}) = q_{i+1}$, pour $i = 1...n-1$,
- $q_n \in F$.

Dans l'exemple ci-dessus, l'automate est déterministe. Si q_2 est le seul état final, le langage accepté est :

$$L = \{1\} \cup \{01^n0 \quad : \quad n = 0, 1, 2....\}$$

Soit Λ le mot vide.

Dnition 3. *Si w est un mot, alors w^* est l'ensemble des mots $\{\Lambda, w, w^2, w^3, ...w^n...\}$. Si L est un langage (ensemble de mots), L^* est l'ensemble des mots $\{\Lambda, w_1, w_2, w_3, ...w_n...\}$ tels que $w_i \in L^i$.*

3.2 Expressions régulières

Une expression régulière est un ensemble de mots défini par:

- un mot fini est une expression régulière.
- l'union, la concaténation et l'opérateur * appliqués à des expressions régulières, définissent une nouvelle expression régulière.

Les expressions: 0^*11^*, ou $(0^*11^* + (O(11)^*)^*$ sont des expressions régulières.

Les langages acceptés par des automates finis sont dits *réguliers*, car ils correspondent précisément à des expressions régulières.

Etant donné une expression régulière, on peut construire un automate équivalent et réciproquement étant donné un automate on peut construire une expression régulière équivalente.

Deux constructions importantes existent pour les automates:

- la déterminisation, qui consiste à transformer un automate non déterministe en automate déterministe équivalent.
- la minimisation, qui consiste à transformer un automate déterministe en automate déterministe minimum, avec un nombre minimum d'états..

3.3 Tester un mot

Soit w un mot de longueur n et r une expression régulière. L'automate lit le mot et décide si $w \in r$ ou $w \notin r$ en $O(n)$ étapes.

Peut-on décider approximativement si $w \in r$ en $O(\log n)$ étapes ou même $O(1)$ étapes, soit un nombre d'étapes constant, indépendant de n?

Pour la distance d'édition et même pour la distance de Hamming, la réponse est positive. Il existe un algorithme A très simple tel que:

- Si $x \in r$, alors $A(x) = 1$,

- Si x est ε-loin de r, alors $Prob[A(x) = 0] > 2/3$,

Exemple: soit $r = (ab) * b*$ et un mot w sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et C. Soit $\varepsilon = 10\%$. Un échantillon est un sous-mot ou facteur de longueur 10, d'une position aléatoire $1 \leq i \leq n$. Le Testeur procède ainsi:

On repète 100 fois la procédure:

- tirer deux facteurs: u_1 qui précède u_2.
- décider s'ils sont compatibles avec $(ab) * b*$. Rejeter s'ils ne le sont pas.
- accepter si on n'a pas rejeté au cours des tests.

Un facteur u est compatible avec $(ab)*$ s'il est du type $abab...ab$ ou $baba...ba$. Il est compatible avec $b*$ s'il c'est $bbb...b$. On dit que (u_1, u_2) est compatible avec $(ab) * b*$ si soit u_1 et u_2 sont compatibles avec $(ab)*$ ou avec $b*$, ou u_1 est compatible avec $(ab)*$ et u_2 est compatible avec $b*$, ou u_1 a un prefixe compatible avec $(ab)*$ et un suffixe compatible avec $b*$ et u_2 est compatible avec $b*$.

3.4 Text Mining

Le but de la fouille de texte (Text Mining) est de pouvoir classifier des mots à partir d'exemples. On parle alors d'apprentissage et on distingue:

- l'apprentissage supervisé où les exemples sont étiquetés par des classes,
- l'apprentissage non supervisé où les exemples n'ont pas d'étiquetés et il faut donc trouver des classes.

3.4.1 Classer pour la distance d'édition

Soit w un mot et deux expressions régulières représentant des classes différentes. Par exemple $r_1 = (ab) * b*$ et $r_2 = (aba)*$. On demande alors de quelle expression w est-il le plus proche. Si on prend la distance d'édition avec déplacement, on peut obtenir un testeur encore plus simple que le testeur précédent.

Pour un mot donné w, $\mathsf{ustat}_k(w)$ est la densité des sous-mots de longueur k. Par exemple si $k = 2$ et $\Sigma = \{a, b\}$, on a quatre sous-mots possibles: aa, ab, ba, bb. Il suffit alors de compter le nombre de chaque sous-mot et de normaliser. Si $w = aaabb$ alors

$$\mathsf{ustat}_2(w) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix} \tag{1}$$

Il y a 4 sous-mots possibles, 2 fois aa, 1 fois ab, 0 fois ba et 1 fois bb.

Par extension $\mathsf{ustat}_k((ab)*) = lim_{n\to\infty}\, \mathsf{ustat}_k((ab)^n)$. On obtient alors:

$$\mathsf{ustat}_2((ab)*) = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} \tag{2}$$

On introduit alors $s_1 = \mathsf{ustat}_2((ab)*), s_2 = \mathsf{ustat}_2(a*), s_3 = \mathsf{ustat}_2((aba)*)$. On note $Hull(s_1, s_2, s_3)$ la fermeture convexe des points s_1, s_2, s_3, c'est-à-dire tous les points $s = a_1.s_1 + a_2.s_2 + a_3.s_3$, où $a_i \geq 0 et \sum a_i = 1$. Soit $H_1 = Hull(s_1, s_2)$ et $H_2 = Hull(s_3)$. Ce sont les représentations statistiques de r_1 et r_2, et cette methode se généralise à toute expression régulière.

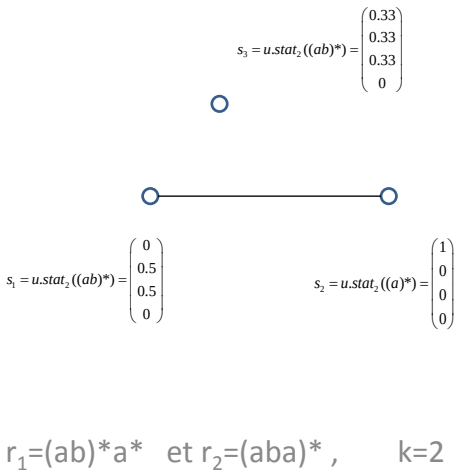


Figure 3: Représentation statistique: $H_1 = Hull(s_1, s_2)$ et $H_2 = Hull(s_3)$.

Le test d'appartenance pour décider ε-approximativement si $w \in r$ est alors: construire H_r pour $k = 1/\varepsilon$. Estimer $y = \mathsf{ustat}_k(w)$ et calculer la distance géométrique entre y et H_r. Accepter si cette distance est inférieure à ε.

Pour classifier w, on choisit une séquence géométrique de $\varepsilon = 0.5, 0.25, 0.125, ...$ et on applique le test de $w \in r_1$ et de $w \in r_2$. On finira par trouver un ε tel que les deux tests diffèrent et on saura alors si w doit être classifié par r_1 ou par r_2. On peut aussi calculer directement la distance de y à H_1 et à H_2 et prendre la plus petite distance.

3.4.2 Apprentissage supervisé

Supposons que nous ayons des mots étiquetés par deux classes 0 et 1, qui servent d'exemples pour des classes inconnues que l'on modélise par des expressions régulières. On représente les mots par leurs vecteurs ustat_k et on peut alors construire les plus grandes fermetures convexes consistantes. On groupe ainsi les mots par des fermetures qui contiennent uniquement des mots de la même étiquette.

On approxime ainsi chaque classe par l'union de fermetures convexes. Chaque fermeture convexe peut elle-même être approximée par une expression régulière. Etant donné un nouveau mot, w

Statistiques des exemples étiquetés

Figure 4: Fermeture convexe des stastistiques d'exemples

comment le classifier? On applique simplement le testeur précédent, ou on calcule la distance du point $y = \mathsf{ustat}_k(w)$ aux deux polytopes H_0 et H_1, et on choisit la classe qui est la plus proche.

3.4.3 Apprentissage non-supervisé

Dans ce cas, nous avons des exemples de mots mais aucune classe ne les étiquette. Il faut donc trouver les meilleures classes qui structurent ces mots.

Un exemple est *Google news*. Un programme parcourt toutes les nouvelles publications des journaux et les classifie sans connaitre au départ les différentes classes (Politique, Business, Sport, etc...).

On peut utiliser les statistiques précédentes et rechercher les partitions de fermetures convexes, c'est-à-dire les fermetures convexes qui n'ont pas d'intersection. Chacune représentera une classe.

4 Modèle XML

XML est un langage générique qui permet d'unifier la manipulation de données sur des serveurs diférents. Les fonctions essentielles sont:

- la transmission de données semi-structurées entre Client et Serveur. C'est la fonction des Web services qui utilisent le protocole SOAP.
- l'interrogation de données semi-structurées (XPATH, XQUERY)
- la transformation de données (XSL, XSLT),
- l'intégration de données.

Ce langage est important dans l'usage du Web, car XML (eXtensible Markup Language) est une recommendation du W3C, l'organisme de normalisation de logiciels pour le Web.

Un fichier XML distingue clairement trois parties indépendantes:

- la structure du document, aussi appelée DTD (Document Type Definition).
- la feuille de style XSL (eXtensible Style Sheet) pour afficher le document,
- le document XML lui-même.

Considérons le fichier s2.xml ci-dessous.

```
<?xml version='1.0' ?>
<!DOCTYPE livre SYSTEM 'livre.dtd' [
  <!ENTITY ionesco SYSTEM 'ionesco.xml'>]>

<?xml:stylesheet
  type="text/xsl"
  href="s2.xsl"?>

<livre>
&ionesco;
</livre>
```

Ce fichier utilise la DTD livre.dtd ci dessous:

```
<?xml version='1.0' ?>

<!ELEMENT livre (chapitre*,titre,auteur)>
<!ELEMENT chapitre (titre,para*)>
<!ELEMENT titre (#PCDATA)>
<!ELEMENT para (#PCDATA)>
<!ELEMENT auteur (#PCDATA)>
```

qui organise la structure des balises.

La feuille de style s2.xsl ci-dessous:

```
  <?xml version="1.0" ?>
- <xsl:stylesheet xmlns:xsl="http://www.w3.org/1999/XSL/Transform" version="1.0">
- <xsl:template match="/">
  <xsl:apply-templates />
  </xsl:template>
- <xsl:template match="chapitre/titre">
- <h1>
  <xsl:value-of select="." />
  </h1>
  </xsl:template>
  </xsl:stylesheet>
```

décrit comment afficher le fichier ionesco.xml qui peut varier selon le type de terminal (écran ordinateur, WAP, téléphone mobile).

Pour un économiste, il permet l'analyse de données à grande échelle. Une norme XMLA généralise ainsi l'approche OLAP pour intégrer des fichiers d'origines différentes. Il permet aussi l'introduction de modèles de valeur de l'information, basée sur les distances entre documents et entre un document et un langage (ensemble de documents), aussi appelé DTD.

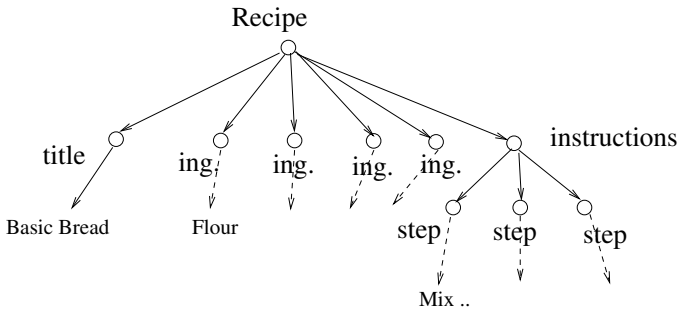
4.1 Arbres étiquetés

Un fichier XML est une séquence de balises imbriquées, définies par l'utilisateur. Chaque balise peut avoir des attributs.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>

<Recipe name="bread" prep_time="5 mins" cook_time="3 hours">
  <title>Basic bread</title>
  <ingredient amount="3" unit="cups">Flour</ingredient>
  <ingredient amount="0.25" unit="ounce">Yeast</ingredient>
  <ingredient amount="1.5" unit="cups">Warm Water</ingredient>
  <ingredient amount="1" unit="teaspoon">Salt</ingredient>
  <Instructions>
   <step>Mix all ingredients together, and knead thoroughly.</step>
   <step>Cover with a cloth, and leave for one hour in warm room.</step>
   <step>Knead again, place in a tin, and then bake in the oven.</step>
  </Instructions>
</Recipe>
```

Dans cet exemple la balise $< Recipe >$ a les attributs name, prep.time et cook.time, qui ont les valeurs *bred, 5 mins, 3 hours*. Le texte entre deux balises conjugées (ouvrante et fermante) est appelé *PCDATA*. On peut représenter le fichier par un arbre étiqueté par les balises (tags), les attributs et les PCDATA.



Un arbre XML.

Cette représentation est le *DOM* (Document Object Model), associé à un fichier XML $F.xml$. La sérialisation d'un arbre étiqueté est l'opération inverse qui associe un fichier XML à un arbre.

4.2 DTD: Data Type Definition

La DTD est l'élément structurel qui définit une classe d'arbres organisés selon une structure. La DTD ci-dessous décrit comment est organisé un livre et prend la forme d'une séquence de règles de deux types:

- $t : r$ où r est une expression régulière sur les tags,
- $t : PCDATA$ indiquant que t peut se terminer sur une feuille de l'arbre.

Un fichier est *bien formé* si la séquence de tags ouvrant/fermant est bien imbriquée, c'est-à-dire qu'un tag se ferme lorque tous les tags internes sont bien imbriqués. La séquence suivante $< a >< b >< /a >< /b >$ n'est pas bien formée car la séquence interne au tag <a> n'est pas bien formée.

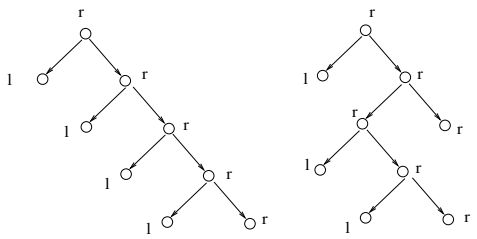
Un fichier est *valide* lorsque l'arbre associé suit la DTD, c'est-à-dire que chaque noeud de tag t suit les deux conditions suivantes:

- si le noeud a des fils dont la séquence de tags est $l_1, l_2.....l_k$, il existe une règle $t : r$ telle que $l_1, l_2.....l_k \in r$,
- si le noeud est une feuille, il existe une règle $t : PCDATA$.

Un automate d'arbre $\mathcal{A}$ est directement associé à une DTD. Il procède bottom-up est décide si un fichier F est accepté. Un fichier F est valide ssi il est accepté par l'automate.

```
<?xml version='1.0' ?>

<!ELEMENT  r  (l,r) >
<!ELEMENT r (#PCDATA)>
<!ELEMENT l (#PCDATA)>
```



Un arbre valide et un arbre non valide pour la DTD.

4.2.1 Distance à une DTD

La distance d'Edition avec déplacements comprend les opérations élémentaires suivantes:

- la modification de tags et attributs,
- l'insertion et la suppression de noeuds et d'arêtes,
- le déplacements de sous-arbres entiers.

La distance entre deux documents XML $\mathsf{dist}(F, F')$ est le nombre minimum d'opérations élémentaires qu'il faut appliquer pour faire correspondre F et F'. La distance d'un fichier F à une DTD $\mathsf{dist}(F, DTD)$ est la distance minimum $\mathsf{dist}(F, F')$ pour F' valide, c'est-à-dire $F' \in DTD$.

4.3 XSL et XSLT

XSL (eXtended Style Sheet) est une feuille de style, adaptée à XML. Son extension XSLT (Transformation) permet de transformer un fichier XML dans un format cible qui peut être HTML ou XML.

L'exemple suivant donne un fichier XML source, puis un programme XSLT, qui transforme le fichier source en fichier cible.

```
Fichier Source:
<persons>
  <person username="MP123456">
    <name>John</name>
    <family_name>Smith</family_name>
  </person>
  <person username="PK123456">
    <name>Morka</name>
    <family_name>Ismincius</family_name>
  </person>
</persons>

Programme XSLT de transformation:

<?xml version="1.0"?>
<xsl:stylesheet xmlns:xsl="http://www.w3.org/1999/XSL/Transform" version="1.0">
<xsl:output method="xml" indent="yes"/>
 <xsl:template match="/">
    <transform>
       <xsl:apply-templates/>
    </transform>
 </xsl:template>
 <xsl:template match="person">
     <record>
        <username>
```

```
            <xsl:value-of select="@username" />
          </username>
          <name>
            <xsl:value-of select="name" />
          </name>
      </record>
  </xsl:template>
</xsl:stylesheet>

Fichier Cible résultant:


<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<transform>
   <record>
      <username>MP123456</username>
      <name>John</name>
   </record>
   <record>
      <username>PK123456</username>
      <name>Morka</name>
   </record>
</transform>
```

4.4 Automates sur les arbres (Tree automata)

(facultatif)

A *ranked ordered tree* with n nodes is a structure $T_m = (D_n, \{Child_i\}_{i \leq m}, root)$ where the domain $D_n = \{1, ..., n\}$ is the set of nodes, $Child_i$ is a binary relation such that $Child_i(u, v)$ if u is the ith child of v for $i \leq m$ and a fixed m and *root* is a distinguished element of D_n with no predecessors. For each $i \neq i' \leq m$ such that $Child_i(u, v)$ and $Child_{i'}(u, v')$ then $v \neq v'$ and for each i there is at most one v such that $Child_i(u, v)$. In addition, the graph whose edges are in $Child_i$ for $i \leq m$ backwards or forwards does not contain any circuits. A *Binary Tree* is a ranked ordered tree with $m = 2$ where each node which is not a leaf has a left and a right child.

Dnition 4. *A tree-automaton on binary trees, is a 4-tuple $A = (Q, \delta, q_0, F)$ where Q is the finite set of states, q_0 the initial state, F the set of accepting states and δ a finite set of transition $(q_i, q_j) \to q_l$.*

The transition function allows one to assign the state q_l to a node v whose left child is in state q_i and right child in state q_j. A *run* starts on the leaves of the tree in state q_0, proceeds bottom-up assigning states to the nodes of the tree and accepts if the root is in an accepting state. The *language defined by a tree automaton* is the set of accepted trees.

> **Exemple.** The automaton $A = (\{q_0, q_1\}, \delta, \{q_1\})$ with initial state q_0, accepting state q_1 and whose transitions δ are : $(q_0, q_0) \to q_1$ and $(q_0, q_1) \to q_1$ accepts the language L_r of right-branch trees. In the completed automaton there is always a *sink state* q_s such that $(q_1, q_0) \to q_s$ and $(q_1, q_1) \to q_s$, although we do not represent it. We draw the transitions with dashed lines for the left branch and solid lines for the right branch.

Figure 5: A tree-automaton for L_r the language of right-branch trees and a tree $t \in L_r$.

Tree automata can be non-deterministic and define the class of *regular trees*. They have a deterministic equivalent automaton. In the case of *top-down* automata, the non-deterministic and deterministic versions are different.

4.4.1 Automata on unranked trees

An unranked tree is a tree where each node has an arbitrary number of successors, which are ordered.

Every unranked tree T can be coded as a binary tree $e(T)$ but many encodings are possible. Consider the classical encoding where each node v of the unranked tree is a node v in the binary encoding, the left successor of v in the binary tree is its first successor in the unranked tree, the right successor of v in the binary tree is its first sibbling in the unranked tree. New nodes with labels $\perp$ are added to complete the binary tree when there are no successor or no sibling in the unranked tree.

An *unranked tree automaton* generalizes the transition function to $\delta : Q \times \Sigma \to 2^{Q^*}$ such that $\delta(q, a)$ is a regular language on Q.

A run λ is generalized such that if u is a node with successors $v_1, ..., v_l$ in states $\lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_l)$ and there is a q such that $\lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_l) \in \delta(q, l(u))$, then $\lambda(u) = q$.

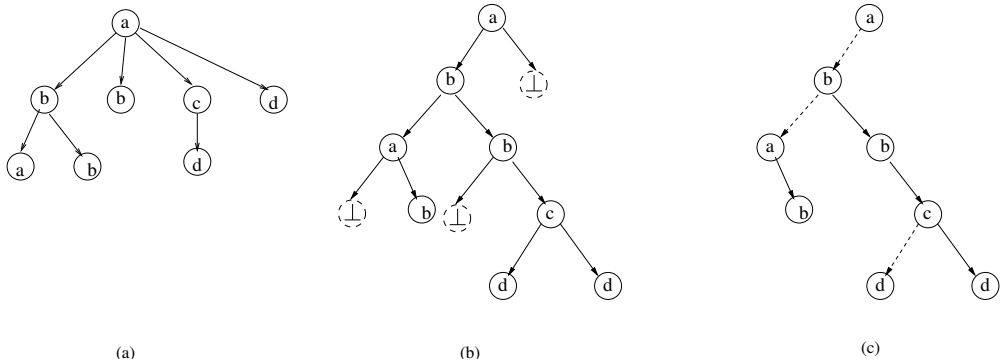


Figure 6: An unranked tree, coded as a binary tree and as an extended binary tree.

A DTD is a spacial case of a tree automaton when $Q = \Sigma$. It is defined as a set of rules $a \quad : \quad r$, where $a \in \Sigma$ and r is a regular expression.

```
<?xml version='1.0' ?>

<!ELEMENT livre (chapitre*,titre,auteur)>
<!ELEMENT chapitre (titre,para*)>
<!ELEMENT titre (#PCDATA)>
<!ELEMENT para (#PCDATA)>
<!ELEMENT auteur (#PCDATA)>
```

In this case $\Sigma = \{livre, titre, chapitre, auteur, para\}$. The first rule is:

$$livre \quad : \quad chapitre^* \; titre \; auteur$$

It specifies that a node labelled *livre* is followed by many nodes labelled *chapitre*, followed by a node labelled *titre* and a node labelled *auteur*.

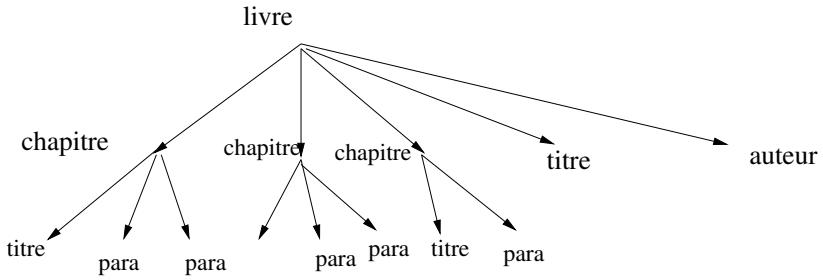


Figure 7: A valid tree for the livre DTD.

5 Modèle relationnel

Un des modèles de données les plus importants est le *modèle relationnel* où les données sont représentées par des tables. Une table est constituée de plusieurs colonnes appelées *attributs* et de lignes appelées *enregistrements* ou *tuples*.

Une *requête* est une fonction qui associe à un ensemble de tables une nouvelle table. C'est la représentation mathématique d'une question posée à une base de donnée.

La définition des différentes tables constitue le *Schéma*. Pour concevoir un schéma, il est utile d'isoler des entités et des relations entre entités. Une entité décrit un objet muni d'attributs.

5.1 Entité-Relations

La conception d'un schéma est facilitée par un *diagramme Entité-Relations*, qui décrit de manière graphique des entités munies d'attributs et des relations entre entités. On distingue:

- les entités dans des rectangles,
- les attributs des entités dans des cercles,

- les relations dans des losanges.

Un diagramme Entité Relations.

5.2 Schéma relationnel

Soit $\mathbf{U} = (D, R_1, ..., R_k, c_1, ..., c_m)$ une structure relationnelle, où:

- D est l'union de différents domaines $\bigcup_i D_i$. Chaque D_i peut être un domaine à n éléments et on écrit $D_i = \{a_1, ...a_n\}$, ou un ensemble comme les entiers N ou les réels R.
- chaque R_i pour $i = 1, ...k$ est une relation d'arite r_i sur D, i.e. $R_i \subseteq D^{r_i}$. Dans le cas où $r_i = 1$, on parle de relation unaire $R_i \subseteq D$, et où $r_i = 2$, on parle de relation binaire $R_i \subseteq D^2$,
- chaque c_j pour $j = 1, ...m$ est un élément distingué.

Chaque relation peut être considérée comme une table avec un nombre de colonnes égal à l'arité de la relation. Un *attribut* est le nom d'une colonne dont les valeurs sont dans un domaine D_i. La *signature* de la structure est la séquence $r_1, ..., r_k, m$ ainsi que l'information spécifiant le domaine de chaque attribut définit le schéma.

Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble de toutes les structures $\mathbf{U}$.

Exemple d'un mauvais schéma : $Suppliers(Sname, Saddress, Item, Price)$.

Sname	Saddress	Item	Price
IBM	New-York	PC	1000
IBM	New-York	Mainframe	1 000 000
IBM	New-York	Service	100 000
Microsoft	Seattle	Windows	100
Microsoft	Seattle	Office	100

Supposons que certains tuples soient modifiés, effacés ou insérés. On observera alors des problèmes de:

- Redondance
- Inconsistance
- Anomalies insertion/Effacement

Des exemples de requêtes sont:

- Quelle est l'adresse d'IBM ?
- Est-ce que Microsoft est un fournisseur?
- Quel est le produit le plus vendu?
- Quel sont les produits et leur fournisseur des produits les plus vendus en 2000 ?

Exemple d'un bon schéma : $Sa(Sname, Saddress)$, $Sip(Sname, Item, Price)$. Chaque relation décrit les entités. Par contre, certaines requêtes peuvent nécessiter plus de calculs.

5.3 Algèbre relationnelle et Langage SQL

Considérons les opérateurs suivants, c'est-à-dire des fonctions qui prennent des relations comme arguments et définissent une nouvelle relation.

- Union: $S \cup R$, qui définit l'ensemble des tuples de R et de S,
- Différence: $S - R$, qui définit l'ensemble des tuples de S qui ne sont pas dans R,
- Produit cartésien: $S \times R$ qui définit l'ensemble des paires (s_i, t_j) où $s_i \in S$ et $t_j \in R$,
- Projection: $\pi_{A_1,...A_k}(R)$ qui définit la projection des tuples de R sur les attributs $A_1, ...A_k$,
- Sélection: $\sigma_{\Theta(A_1,...A_k)}(R)$ qui définit la sélection des tuples de R sur la condition $\Theta(A_1, ...A_k)$, composition booléenne de formules atomiques sur les attributs $A_1, ...A_k$.

Un autre opérateur est la Θ-jointure, $R_\Theta S$ et la jointure simple RS. Dans le cas de la jointure simple, on prend le produit cartésien, puis l'égalité des attributs communs et enfin la sélection pour éliminer les colonnes identiques.

Dnition 5. *L'algèbre relationnelle est l'ensemble des expressions obtenues par composition des opérateurs d'union, de différence , de produit, de projection et de sélection.*

Une formule logique sur un schéma est composée de:

- de formules atomiques $R(x_1, ..., x_k)$, $x_i = x_j$, $x_i = a$, et $x_i \leq a$,
- de formules $\neg\psi(x)$, $\psi_1(x) \vee \psi_2(x)$, $\psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$,
- de formule $\exists y\psi(x, y)$, et $\forall y\psi(x, y)$,

Dnition 6. *Une formule du 1er ordre sur un schéma est la composition de formules atomiques à l'aide des opérateurs booléens et des quantificateurs.*

Th 1. *Une requête est définissable par une expression de l'algèbre universelle ssi elle est définissable par une formule du 1er ordre.*

5.3.1 Syntaxe SQL

Le langage SQL permet trois types d'opérations:

- Manipulation de tables: création, effacement, modification,
- Transactions: insertion, effacement, modifications de tuples,
- Requêtes: création de nouvelles tables ou de vues.

Syntaxe du SELECT en SQL L'expression standard est:

$$Select \;\; A, B \;\; from \;\; R \;\; where \;\; conditions$$

Exemples:

- Select Saddress from Suppliers where Sname='IBM' ;
- Select Sname from Suppliers where Sname='Microsoft' ;
- Select Item, Sname from Suppliers where date='2000' ; en supposant un nouvel attribut date sur le schéma précédent.

Correspondances entre formule logique, expression SQL et algèbre relationnelle

- $\exists x, z, t$ Suppliers$(x, y, z, t) \wedge x =' IBM'$; Select Saddress from Suppliers where Sname='IBM' ; $\pi_{Sadress}(\sigma_{Sname='IBM'})$.
- $\exists y, z, t$ Suppliers$(x, y, z, t) \wedge x =' Microsoft'$; Select Sname from Suppliers where Sname='Microsoft' ; $\pi_{Sname}(\sigma_{Sname='IBM'})$.
- $\exists x, y, t, d$ Suppliers$(x, y, z, t, d) \wedge d =' 2000'$; Select Item, Sname from Suppliers where date='2000' ; $\pi_{Item,Sname}(\sigma_{date='2000'})$.

5.4 Conception de Schémas

5.4.1 Dépendances fonctionnelles

Une dépendance fonctionnelle entre un ensemble d'attributs $\{A_1, ..., A_n\}$ et un attribut B indique que si les valeurs des atributs $A_1A_2, ...A_n$ sont fixées, alors la valeur de B est fixée. On écrit:

$$A_1A_2, ...A_n \rightarrow B$$

Certaines dépendances fonctionnelles impliquent d'autres dépendances: par exemple $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ impliquent $A \rightarrow C$. Si F est un ensemble de dépendances, F^+ est l'ensembles des conséquences logiques.

Dnition 7. *Soit $R(A_1, A_2, ...A_n)$ une relation et F un ensemble de dépendances fonctionelles. Un sous ensemble X de $A_1, A_2, ...A_n$ est une clé si c'est le plus petit ensemble tel que $X- > A_1, A_2, ..., A_n$ est dans F^+.*

5.4.2 Décomposition en schémas relationnels

Il existe de nombreuses décompositions possibles et il est important de comprendre les avantages et inconvénients de chaque décomposition.

Décomposition sans perte d'information. Soit r est une instance de

$$Suppliers(Sname, Saddress, Item, Price)$$

$rSA(r)$ et $rSIP(r)$ les instances projection de r. Alors $r = join(rSA(r), rSIP)$. Si deux relations rSA et $rSIP$ sont données, alors si $s = (rSA(r), rSIP)$, la décomposition est est sans perte si $s = r$. Sinon on ne peut pas retrouver r de manière unique.

Préservation des dépendances fonctionnelles. Si F est l'ensembles des dépendances fonctionnelles, alors $pSA(F)$ est l'ensemble des dépendances concernant les attributs S et A. La décomposition préserve les dépendances fonctionnelles si l'union des $pSA(F)$ pour toutes les projections implique logiquement F.

Exemple : City (C), Street (S), Zip (Z). Dépendances sont: $CS- > Z$ et $Z- > C$.Les clés sont $\{C, S\}$ et $\{Z, S\}$. Décomposition en SZ et CZ est sans perte mais ne préserve pas la dépendance $CS- > Z$.

S	Z
a	b
a	b'

C	Z
c	b
c	b'

La jointure ne respecte pas la dépendance fonctionnelle $CS->Z$.

C	S	Z
c	a	b
c	a	b'

5.5 Formes normales

Les formes normales caractérisent les bons schémas relationnels, du point de vue des dépendances fonctionnelles.

5.5.1 Boyce-Codd

Si $X->A$ est une dépendance fonctionnelle de R, A n'étant pas dans X, alors X contient une clé. Le schéma ($CSZ, CS->Z$ et $Z->C$) n'est pas en forme normale de Boyce-Codd. En effet Z ne contient pas de clé !

5.5.2 3ème forme normale

Un attribut est premier s'il appartient à une clé. Dans l'exemple, tous les attibuts sont premiers. Un schéma est en 3ème forme normale si pour toute dépendance fonctionnelle $X->A$, A n'étant pas dans X , alors X contient une clé ou A est premier. Si le schéma ne satisfait pas cette forme normale, alors soit :

- X est un sous-ensemble strict d'une clé (dépendance partielle) ou
- X un sous-ensemble strict d'aucune clé (dépendance transitive).

6 Modèle OLAP

Le modèle OLAP permet de répondre à des questions de gestionnaires et d'économistes, pour analyser des données. Par exemple:

- Quels sont les produits les plus vendus en 2005?
- Quels sont les magasins et les produits les plus vendus entre 2004 et 2005 en Europe?

Ces requêtes généralisent le GROUP BY de SQL mais en l'intégrant à plusieurs attributs. Les requêtes OLAP étendent SQL dans ce sens. Le type de question posée sous-entend des bases de données beaucoup plus frandes qui rassemblent plusieurs bases de données. Se pose alors l'intégration de ces données, au sein d'une même structure.

L'intégration de données est un problème plus vaste qui concerne les économistes. Comment en effet passer de l'analyse de données réalisée à partir d'une source comme l'INSEE ou l'Eurostat à une analyse concernant toutes les sources du Web sur un même sujet?

6.1 Intégration des informations

Le besoin : collecter des informations à partir des plusieurs sources dans le but d'exploiter leur synthèse.

Le problème : les sources peuvent être autonomes et hétérogènes autorisations nécessaires pour l'extraction utilisation de plusieurs langages pour la définition de l'information à extraire.

La solution : utiliser un schéma fédérateur, avec ou sans données, que les utilisateurs manipulent comme s'il s'agissait d'une base de données habituelle.

- avec données courantes provenant d'une seule source (vues matérialisées) ou de plusieurs sources autonomes et éventuellement hétérogènes (base de données intégrée)
- besoin d'outils pour la conception du schéma, transformation/chargement de données et propagation de changements
- avec données historiques (entrepôt de données, données en avance), c'est notre cas
- besoin d'outils pour la conception du schéma, transformation/chargement de données, propagation de changements et rafraîchissement périodique
- sans données, au sein d'une seule source (vues virtuelles) ou lié à plusieurs sources autonomes et éventuellement hétérogènes (médiateurs, données à la demande)
- besoin d'outils pour la récriture/évaluation des requêtes et la fusion des résultats dans tous les cas, l'accès aux données se fait presque exclusivement en lecture

6.2 Constitution d'un entrepôt de données

Architecture à trois niveaux : sources - entrepôt - data mart. Un data mart est un 'petit' entrepôt orienté sujet, dont les données sont dérivées de l'entrepôt.

Extraction, Transformation, Chargement de données sont réalisés à l'aide d'outils ETL.
Propriétés d'un Extracteur :

- traduction vers le langage source, évaluation, traduction vers le langage de l'entrepôt
- détection de changements aux sources

Propriétés d'un Intégrateur :

- réconciliation /correction d'erreurs/filtrage/estampillage pour conformer au schéma de l'entrepôt,
- chargement de données, rafraîchissement,

6.3 Caractéristiques principales des entrepôts de données

Un entrepôt de données est l'endroit où les données intégrées sont stockées et exploitées à l'aide d'un système de gestion de bases de données. Par conséquent, un entrepôt de données est avant tout une base de données, même si les caractéristiques suivantes le distinguent clairement des bases de données transactionnelles habituelles.

Utilisation : les utilisateurs principaux sont les décideurs de l'entreprise qui ont besoin des schémas faciles a lire (pas de schémas normalisés) (schéma dimensionnel).

Mode d'accès : souvent à travers un data mart, en lecture uniquement. Certains index qui ne sont pas efficaces pour le transactionnel le deviennent pour les entrepôts.

Volume : de l'ordre de tera octets d'où un besoin d'algorithmes efficaces pour le chargement de données et l'évaluation des requêtes.

Maintenance : les mises à jour sont propagées des sources vers l'entrepôt:

- immédiatement ou périodiquement (suivant la nature de l'application)

- par reconstruction ou de manière incrémentale.

Rafraîchissement :les données qui deviennent 'obsolètes' sont supprimées.

Metadonnées : Les métadonnées d'un entrepôt sont plus complexes et plus volumineuses que celles d'une base de données transactionnelle, et sont souvent gérées en dehors de l'entrepôt.

6.4 Utilisation d'un entrepôt de données

OLAP : Online Analytic Processing permet de définir des requêtes et d'effectuer résumés/agrégations selon plusieurs critères et sur plusieurs dimensions, et de générer des rapports.

Extraction de connaissances à partir de données (Fouille de données, 'Data Mining') est une autre application.

6.5 Algèbre fonctionnelle

Rappelons d'abord qu'une fonction est désignée par f : X→Y, où f est le nom de la fonction, X son ensemble de départ et Y son ensemble d'arrivée. Nous noterons def(f) l'ensemble des éléments de X pour lesquels f est définie et range(f) l'ensemble des valeurs prises par f. Une fonction f est appelée :

- fonction totale (ou application) si def(f)= X (sinon, f est appelée fonction partielle)
- fonction injective (ou injection) si $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$, pour tous x,x' dans def(f)
- fonction surjective (ou surjection) si range(f)= Y
- fonction bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions totales,
et l'algèbre fonctionnelle dont nous aurons besoin comportera quatre opérations :

- Composition : prend en argument deux fonctions, f et g, telles que range(f) $\subseteq$ def(g), et renvoie

  une fonction gof : def(f)→range(g) définie par gof (x)= g(f(x)), x(def(f)
- Couplage : prend en argument deux fonctions, f et g, telles que def(f)=def(g), et renvoie une fonction f∧g : def(f)→range(f)(range(g) définie par $f(g(x) =< f(x), g(x) >$, x∈def(f)
- Projection : l'opération habituelle sur le produit de deux ou plusieurs ensembles
- Restriction : prend en argument une fonction f : X→Y et un ensemble E $\subseteq$ def(f), et renvoie une fonction f/E : E→Y définie par f/E(x)= f(x) pour tout x dans E

Propriétés des inverses. Rappelons d'abord que l'inverse (ou réciproque) d'une fonction f : X→Y, noté f^{-1}, est définie comme suit : $f^{-1}(y) = \{x/f(x) = y\}$; la fonction inverse associe chaque élément y de range(f) à l'ensemble des éléments x de def(f) ayant y comme image (et donc chaque élément y n'appartenant pas a range(f) à l'ensemble vide).

Voici quelques propriétés des inverses :

composition : $(gof)^{-1}(z) = \{f^{-1}(y)/y \in g^{-1}(z)$, pour tout z∈ range(gof),

couplage : $(f)^{-1}((y, z)) = f^{-1}(y) \cap g^{-1}(z)$,

restriction : $(f/E)^{-1}(y) = E^{-1}(y)$, pour tout y∈range(f/E),

6.6 Expressions de chemin et langage OLAP

Un schéma dimensionnel aussi appelé *Schéma Etoile* est un graphe connexe, orienté, acyclique, étiqueté tel que : une seule racine, appelé l'origine et notée O. Chaque noeud a une étiquette (dimension) et chaque arête (flèche) a une étiquette. Toutes les flèches ont des étiquettes distinctes. Les flèches de source O sont d'un de deux types, dimension ou mesure.

Terminologie : la notation f : X$\rightarrow$ Y indiquera une flèche avec étiquette f, source X et cible Y dans le schéma; de même, on parlera de la source et de la cible d'un chemin dans le schéma.

- Chaque sommet autre que l'origine est appelé attribut,
- les valeurs du domaine de O sont appelées des objets,
- la distinction entre dimensions et mesures est faite par le concepteur.
- Tout schéma dimensionnel doit contenir au moins une mesure. Un *chemin dimensionnel* est un chemin de source O finissant par une dimension. Tout attribut d'un tel chemin est appelé un niveau d'agrégation.
- Un *chemin de mesure* : tout chemin de source O finisant par une mesure
- Tout attribut d'un tel chemin est appelé un niveau de mesure.

Base de données dimensionnelle (bdd) Etant donné un schéma dimensionnel S, une bdd sur S est une fonction δ qui associe chaque sommet A de S à un sous-ensemble fini $\delta(A)$ du domaine de A, chaque autre flèche f : X$\rightarrow$Y de S à une fonction totale $\delta(f) : \delta(X) \rightarrow \delta(Y)$ telle que:

- les fonctions d'une bdd peuvent être données de manière explicite ou implicite
- dans la suite, nous omettrons le symbole (, le contexte indiquant s'il s'agit d'une flèche ou d'une fonction
- le fait que les fonctions d'une bdd soient totales entraîne la contrainte suivante :
  contrainte référentielle : range(f) $\subseteq$ def(g) pour toutes fonctions f : X$\rightarrow$Y et g : Y$\rightarrow$Z
- le passage à un niveau supérieur induit un regroupement ou "agrégation" au niveau inférieur

Expression de chemin Etant donné un schéma dimensionnel S, une *expression de chemin* sur S est une expression bien formée dont les opérandes sont des flèches de S et dont les opérateurs sont ceux de l'algèbre fonctionnelle.

Une *expression dimensionnelle sur S* : toute expression de chemin constituée uniquement de flèches figurant sur des chemins dimensionnels. Une *expression de mesure sur S* : toute expression de chemin constituée uniquement de flèches figurant sur un chemin de mesure.

Une *évaluation* d'une expression de chemin e par rapport a une base (bdd) δ sur S : se fait en remplaçant chaque flèche f figurant dans e par la fonction $\delta(f)$ qui lui est associée par δ, et

en effectuant les opérations de l'algèbre fonctionnelle. Le résultat étant toujours une fonction, par propriété de fermeture, comme en relationnel.

Une *vue sur S* : schéma dimensionnel S' dont chaque sommet est un sommet de S et donc chaque flèche est une expression de chemin sur S. Un *data mart* est défini comme une vue sur S, pouvant être virtuelle ou matérialisée suivant les besoins de l'application.

Requête OLAP Etant donné un schéma dimensionnel S, un 'OLAP Pattern' sur S est un couple $P = (u, v)$, où u est une expression dimensionnelle, v une expression de mesure et source(u)= source(v)= O. La cible de u est appelée le niveau d'agrégation de P et la cible de v le niveau de mesure de P.

Notons que, si u comporte des couplages, alors A peut être le produit de plusieurs attributs, c'est-à-dire, le niveau d'agrégation peut être composé de plusieurs autres niveaux 'simples' (et de même pour M).

Une requête OLAP sur S est alors un couple Q= <P, op>, où P est un OLAP pattern et op est une opération applicable sur le domaine du niveau de mesure de P. Si A est le niveau d'agrégation de P et M son niveau de mesure, alors la réponse à Q par rapport à une base δ sur S est définie comme une fonction *ans* qui associe à chaque élément a de A un ensemble de mesures $op(M_A)$ où M_a est l'ensemble des mesures associés aux objets ayant comme valeur a sur les attributs A.

Ce calcul est assez complexe et suit plusieurs procédures qui selon l'algèbre fonctionnelle.

Exemple OLAP Considérons un entrepôt qui regroupe toutes factures emises par une chaine de magasin. Le schéma pourrait être défini par l'arbre suivant:

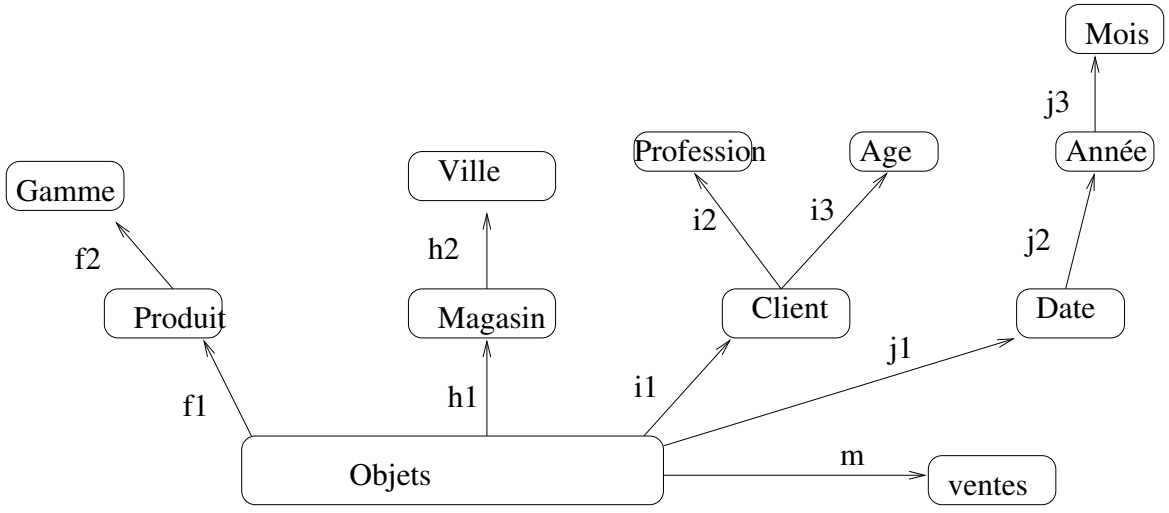


Figure 8: Un schéma Etoile.

On peut analyser le nombre de ventes par gamme de produits et par ville. Les dimensions de cette requête sont Gamme,Ville. On peut exprimer cette requête par les chemins: $f2of1$ pour

Gamme et $h2oh1$ pour Ville. La mesure est Ventes et l'opérateur est la somme.

On peut aussi donner des conditions de sélection: par exemple Année=2004, Région=Europe.

L'outil Mondrian (http://dup2.dyndns.org:8080/mondrian/) permet de décrire des requêtes OLAP en procédant comme suit:

- Choix des conditions, ou du filtre,
- Choix des dimensions,
- Choix des mesures.

On affiche alors un tableau ordonné selon les valeurs des attributs. Dans le cas de l'analyse Gamme, Ville, où Gamme a les valeurs (A,B,C) et Ville les valeurs (NY, Paris, Berlin) on aura par exemple un tableau:

Résultat T:
$A, NY, 100$
$A, Paris, 200$
$A, Berlin, 300$
$B, NY, 100$
$B, Paris, 400$
$B, Berlin, 500$
$C, NY, 10$
$C, Paris, 200$
$C, Berlin, 30$

Une représentation graphique par histogramme est aussi fournie.

Exercice Un distributeur (grossiste) approvisionne plusieurs magasins en produits, en effectuant au plus une livraison par jour et par magasin. Les informations qui figurent sur chaque bon de livraison sont les suivantes : le numéro du bon de livraison, la date de livraison, la référence du magasin, et pour chaque type de produit livré sa référence et la quantité livrée (le nombre d'articles). Ces informations sont stockées chez le distributeur, et accumulées pendant des longues périodes afin de les analyser pour améliorer le service de distribution.

Les analyses se font suivant plusieurs axes, et à plusieurs niveaux, en analysant les mouvements des produits par jour et par mois, par ville et par région, par fournisseur et par catégorie de produit.

On supposera qu'un fournisseur peut fournir au distributeur des produits dans plusieurs catégories et qu'une catégorie de produit peut être fournie par plusieurs fournisseurs.

Nota : Souvent, la référence du magasin contient l'information sur la ville et la région où se trouve le magasin, et de même, la référence du produit contient l'information sur le fournisseur et la catégorie du produit.

1/ Se convaincre que le schéma dimensionnel S vu en cours (voir figure 2) convient comme interface pour les analystes.

2/ Pour chacune des expressions de chemin suivantes sur S, dire si elle est bien formée (on dit aussi bien typée),
et si oui, donner la source, la cible, et le résultat de son évaluation sur la base dimensionnelle:

e1= $f \wedge g \wedge h$

e2= $g1o(g))$

e3= $(g1og)$

e4= $(g1og) \wedge (f1of) \wedge (ho(h12))$

3/ Définir et évaluer les requêtes OLAP suivantes (pour le schéma de la figure 2 et la base de la table 1) :

Q1 : Les totaux de quantités livrées par type de produit

Q2 : Les totaux de quantités livrées par catégorie

Q3 : Les minimaux de quantités livrées par ville

Q4 : Les moyennes de quantités livrées par ville et type de produit

Q5 : Les totaux de quantités livrées par catégorie et ville

Q6 : Les maximaux de quantités livrées par date et catégorie

Q7 : Les totaux de quantités livrées par région et par mois

Q8 : Les totaux de quantités livrées par fournisseur, magasin et mois

Q9 : La somme de toutes les quantités livrées

4/ Définir le schéma d'un data mart permettant des analyses mensuelles par ville et catégorie de produits,
et concernant uniquement les villes de Paris et de Lyon. Dans le contexte de ce data mart, définir la requête suivante
et donner sa traduction en une requête sur l'entrepôt.

Q10 : Les totaux de quantités livrés par catégorie de produits, pendant le premier trimestre

7 Data-Mining

Le terme Data-Mining est utilisé dans de nombreux contextes avec un sens différent. Dans son interprétation la plus simple, il s'agit de trouver une fonction f sur la base d'échantillons de valeurs $x_i, y_i = f(x_i)$.

Considérons les exemples suivants:

- f est une fonction booléenne: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$.
- f est une fonction de $D^2 \rightarrow \{0,1\}$ où $D = [1,...N]$ est un segment réel.
- f est une fonction de $\Sigma^* \rightarrow \{0,1\}$ où Σ est un alphabet fini.
- f est une fonction de $D_1 \times D_2 \times ... D_k \rightarrow \{0,1\}$ où chaque D_i est un domaine discret de valeurs.

Ces exemples sont représentatifs de problèmes théoriques et pratiques importants.

- Dans le premier cas, on peut imaginer un circuit booléen composé de portes logiques qui prend n bits en entrée et fournit une sortie y de 1 bit. Si l'on considère le circuit C comme une boite noire, on cherchera alors à connaitre f à partir de mesures. Une mesure est l'observation d'un $x_i \in \{0,1\}^n$ et de la valeur de sortie y_i.

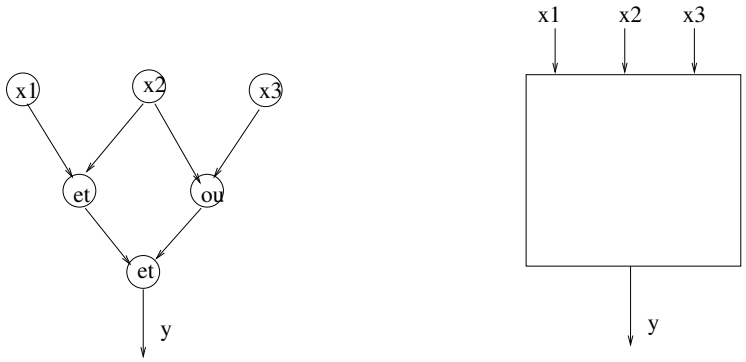
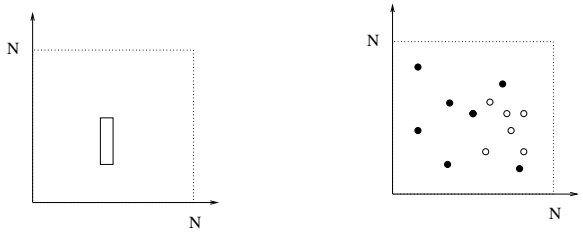


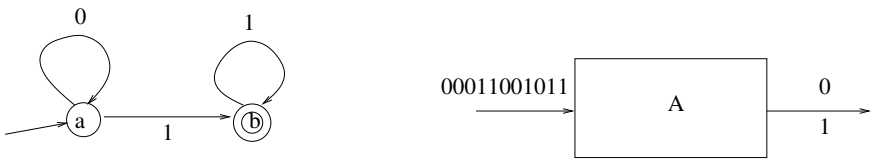
Figure 9: Un circuit décrivant la fonction $f = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$ et un circuit décrivant une fonction inconnue.

- Si f est une fonction de $D^2 \rightarrow \{0,1\}$ où $D = [1,...N]$ est un segment réel, alors f décrit une figure géométrique dans l'espace à deux dimensions. On peut chercher à connaitre cette figure sur la base d'échantillons.



Une fonction $f : D^2 \rightarrow \{0,1\}$ où $D = [1,...N]$ est un segment réel et une fonction g inconnue dont on ne connait que des échantillons.

- Si f est une fonction de $\Sigma^* \to \{0,1\}$ où Σ est un alphabet fini, alors f décrit un langage, i.e. $L = \{x \in \Sigma^*, \quad f(x) = 1\} \subseteq \Sigma^*$.



Une fonction $f : D^2 \to \{0,1\}$ où $D = [1,...N]$ décrit une figure (rectangle) et une fonction g inconnue dont on ne connait que des échantillons.

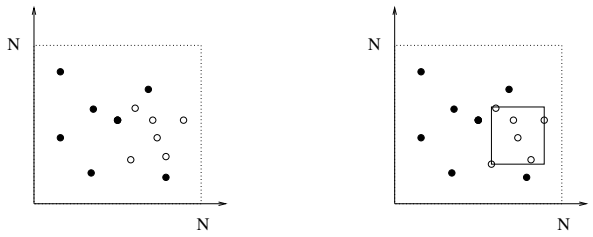
- Si f est une fonction de $D_1 \times D_2 \times ...D_k \to \{0,1\}$ où chaque D_i est un domaine discret de valeurs, on peut imaginer f comme une table:

D_1	D_2	...	D_k	Val
a	b	..	h	1
a	b'	..	h'	0
a	b"	..	h'	1

  Par contre, on peut aussi imaginer les lignes de la table comme des échantillons d'une fonction f inconnue que l'on cherche à apprendre.

Une caractéristique générale est que l'on va proposer une fonction g approximativement proche de f sur la base d'échantillons. Une question fondamentale est de trouver la bonne distance entre deux fonctions. La distance semble assez naturelle dans le cas de l'exemple géométrique où on dira que f est ε proche de g si tout point x tel que $f(x) = 1$ est à distance euclidienne inférieure à $\varepsilon.N$ de x' tel que $g(x') = 1$ et symétriquement si tout point x tel que $g(x) = 1$ est à distance euclidienne inférieure à $\varepsilon.N$ de x'' tel que $f(x'') = 1$.

Si on tire M échantillons x_i au hasard tels que $f(x_i) = 1$ et tels que $f(x_i) = 0$ soient obtenus avec une probabilité constante, alors certaines figures géométriques peuvent être apprises très efficacement.



Si $f : D^2 \to \{0,1\}$ est un rectangle, alors la fonction g définie par les points extrêmes sera une bonne approximation de f.

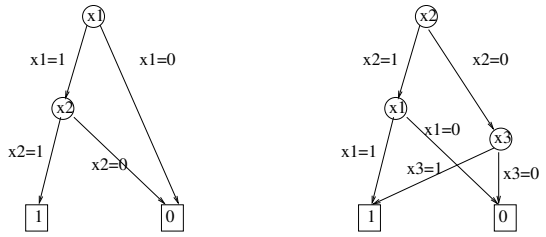
Dans le cas d'un langage régulier, la distance entre deux mots peut être la distance d'Editions avec déplacements. Dans ce cas tout langage régulier est facilement apprenable.

Dans la suite, on considère un tableau qui peut être un entrepôt de données, comme on l'a vu dans le modèle OLAP. On cherche alors à prédire la valeur d'un champs appelé TARGET, à partir d'une phase d'apprentissage et donc à apprendre la fonction f sur la base d'échantillons. On pourra alors prédire la valeur de ce champs, connaissant les valeurs des autres champs. Cette procédure est la base du Data-Mining et son utilisation est au coeur du *Business Intelligence*.

7.1 Arbres de décision

Un arbre de décision est une représentation succincte d'une fonction. Dans le cas d'une fonction booléenne, on imagine un arbre dont les noeuds sont les variables et dont les arêtes représentent les valeurs des variables.

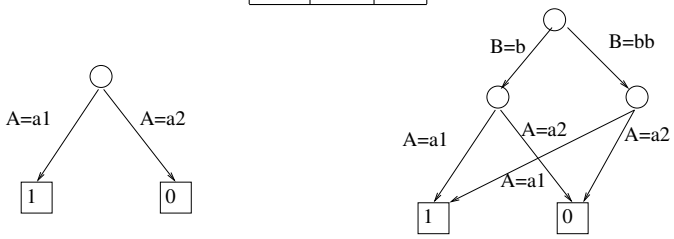
Deux noeuds terminaux correspondent aux valeurs de la fonction. L'arbre de décision est déterminé par l'ordre des variables.



Deux arbres de décision pour la fonction $f = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$, selon deux ordres différents: x_1, x_2, x_3 et x_2, x_1, x_3.

Dans le cas d'une table T avec les attributs A, B, C, supposons que la 3ème colonne soit la valeur de la fonction. On peut donc représenter la table suivante par plusieurs arbres possibles:

A	B	C
a1	b	1
a1	bb	1
a2	b	0
a2	bb	0



Deux arbres de décision pour la fonction f définie par la table précédente.

La réalité d'un entrepôt de données est que les échantillons sont bruités, c'est-à-dire que l'on peut avoir à la fois $(a1, b, 1)$ et $(a1, b, 0)$. D'autre part le domaine de certains attributs peut être continu et non plus discret et la valeur de la fonction f est continue et non plus 0 ou 1. Il s'agit donc de trouver un arbre de décision qui va approximer une fonction inconnue dont on observe des échantillons bruités.

Dnition 8. *Un arbre de décision associé à une table R ayant un attribut target T est un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des attributs, les arêtes sortantes par les valeurs de ces attributs, et les feuilles par les valeurs de la fonction ou par un symbole indéterminé.*

On souhaite définir précisément quand un arbre de décision approxime une table R.

7.1.1 Sélection parmi les Attributs dans un arbre de décision

Il est important d'obtenir très rapidement un arbre qui soit une bonne approximation. Un algorithme standard (ID3) implémenté dans tous les outils de Business Intelligence procède par sélection d'attributs selon le Gain d'Information de chaque attribut.

L'entropie $Ent(S) = -\sum_i p_i \log p_i$ d'une distribution mesure le degré d'incertitude. Le minimum 0 est atteint pour une distribution de Dirac, pour laquelle la situation est certaine. Une valeur $p_i = 1$ et les autres $p_j = 0$ pour j. Le maximum $\log n$ est atteint pour la distribution uniform où chaque $p_i = 1/n$.

Soit S la distribution de la table T précédente, correspondant au fichier test.txt ci-dessous, c'est-à-dire la distribution où un tuple est tiré au hasard selon la distribution uniforme. Dans ce cas, il y a 4 tuples et chacun est tiré avec la probabilité $p_i = \frac{1}{4}$.

```
T: A,B,C

a1,b,1;

a1,bb,1;

a2,b,0;

a2,bb,00;
```

La Source S associée à cette table génère un tuple aléatoirement et révèle la valeur C, soit 1, soit 0. Le nombre d'enregistrements où $C = 1$ est 2 et le nombre d'enregistrements où $C = 0$ est également 2. On a donc deux observations, chacune avec probabilité $\frac{1}{2}$. $Ent(S) = -\sum_i p_i \log p_i = \sum_i \frac{1}{2} \log 2 = \log 2$.

Soit S_{a1} la distribution selon $A = a1$, c'est-à-dire les enregistrements où la valeur de A est $a1$.

Le *Gain d'Information*, aussi appelé Gain d'Entropie, est une mesure de l'information d'un attribut pour la source S.

$$Gain(S, A) = Ent(S) - \sum_{\nu \in A} \frac{|S_\nu|}{|S|} . Ent(S_\nu)$$

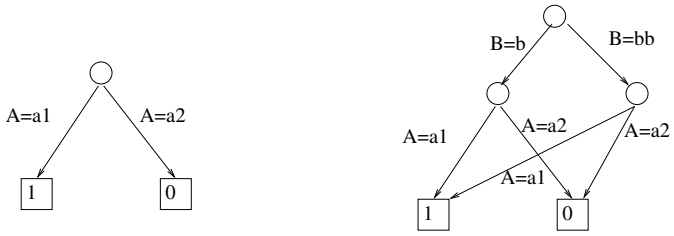
On soustrait à $Ent(S)$, l'Entropie conditionnelle $Ent(S|A) = \sum_{\nu \in A} \frac{|S_\nu|}{|S|} . Ent(S_\nu)$.

Dans l'exemple précédent, il y a deux valeurs possibles pour l'attribut A, soit $A = a1$, soit$A = a2$. $Ent(S_{a1}) = 0$ car la source vaut 1 avec probabilité 1 et $Ent(S_{a2}) = 0$ car la source vaut 0 avec probabilité 1. Dans les deux cas la source est certaine, car $A \to C$, il existe une dépendance fonctionnelle entre A et C. On a donc $Ent(S|A) = \log 2$.

Similairement $Gain(S, B) = Ent(S) - \sum_{\nu \in B} \frac{|S_\nu|}{|S|}$ et $Ent(S_b) = Ent(S_{bb}) = \log 2$ car chaque source prend la valeur 1 ou 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On a aussi $\frac{|S_b|}{|S|} = \frac{|S_{bb}|}{|S|} = \frac{1}{2}$ et $Ent(S|B) = \sum_{\nu \in B} \frac{|S_\nu|}{|S|} . \log 2 = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \log 2$ et finalement $Gain(S, B) = Ent(S) - Ent(S|B) =$

$\log 2 - \log 2 = 0$

L'algorithme ID3 calcule pour chaque noeud le gain pour chaque attribut A_i. Dans cet exemple, on choisit A qui maximise le gain et on décompose le noeud avec autant de fils que de valeurs de A. D'autres critères peuvent être choisis: le *rapport de gain* qui compense le gain pour tenir compte du nombre de valeurs, le *coefficient de Gini* ou le coefficient du χ^2.

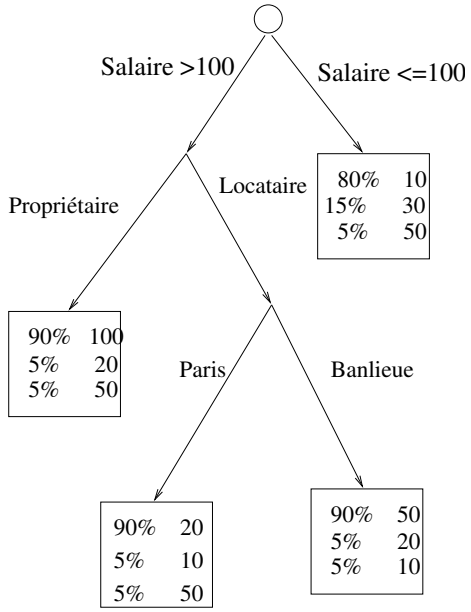


Deux arbres de décision obtenus pour le fichier test.txt.

7.1.2 Approximations et arbre de décision

Dans un cas réel, on peut imaginer 30 attributs, des valeurs cibles discrètes, par exemple $10, 20, 50, 100$ au lieu de 0 et 1 et 10^6 tuples. On recherche alors un arbre de profondeur minimum et chaque feuille correspond à une valeur prépondérante. Par exemple, la feuille gauche correspond à la valeur prépondérante de 100, à 90%.

Chaque feuille est une distribution de valeurs, qui permet de prédire une valeur et une confiance. Ainsi la feuille gauche correspondra à la prédiction 100 avec la confiance 90% ou la valeur 20 avec la confiance 10%, ou la valeur 50 avec la confiance 10%.



Un arbre de décision pour le fichier test1.txt.

Chaque arbre va donc approximer la fonction f en prédisant pour chaque tuple $a_1, ...a_n$, la valeur majoritaire de la feuille obtenue en suivant l'arbre. L'erreur est toujours la proportion de mauvaises prédictions.

7.2 Régression linéaire et logistique

Une régression linéaire est une interpolation de N points en dimension n associés une fonction $y = f(x_1, ...x_n)$ à l'aide d'une équation linéaire $a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + ...a_n.x_n = 0$. Cette situation est adaptée aux attributs numériques, par opposition aux attributs discrets.

Etant donnés N points que l'on peut interpréter comme des tuples $(t_1, ..., t_N)$ on recherche les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ qui minimisent un critère général, qui peut être pris comme la somme des distances de chaque point à l'hyperplan défini par l'équation linéaire.

Soit A matrice représentant la table qui donne la liste des tuples, chaque tuple étant une ligne de dimension $n+1$, car la 1ère valeur est un 1. A_i est la ligne i. On a donc N lignes et $n+1$ colonnes. Soit b le vecteur de dimension N dont les valeurs sont celles de la fonction$f$ et α un vecteur dont la valeur sur la ligne i est a_i. On recherche alors un vecteur α de dimension $n+1$ tels que:

$$A.\alpha \approx_\varepsilon b$$

L'erreur considérée est:

$$\sum_{i=1,...N} \frac{(A_i.\alpha - b_i)^2}{2.N}$$

soit la somme pondérée pour chaque tuple des écarts au carré, entre la valeur prédite $A_i.\alpha$ et la valeur réelle b_i. Dire que $A.\alpha \approx_\varepsilon b$, c'est garantir que l'erreur relative est alors inférieure à ε. Le vecteur α détermine l'hyperplan recherché.

Exemple: Considérons une fonction qui donne le prix d'appartements (1 unité=10^6 Euros) en fonction de critères comme les m2, le nombre de pièces, les quartiers, etc...Pour $n = 1, N = 3$, des données possibles seraient:

$100, 1$
$200, 2$
$300, 2.2$

Le premier tuple indique qu'un appartement de 100m2 vaut 1 million d'Euros. La matrice A est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 200 \\ 1 & 300 \end{pmatrix}$$

La 1ère colonne est toujours une colonne de 1. Le vecteur b est:

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

Une solution possible est $0.3 + 0.009.x_1$ et l'erreur serait de 0.04 pour le premier tuple, 0.01 pour le second tuple et 0.64 pour le troisième tuple. L'erreur globale serait de 0.106 .

Pour $n = 2, N = 3$, des données possibles seraient:

$100, 5, 1$

$200, 7, 2$
$300, 10, 2.2$

Le premier tuple indique qu'un appartement de 100m2 et de 5 pièces vaut 1 million d'Euros. Les valeurs numériques du 1er attribut sont bien supérieures à celles du 2ème. Il est alors utile de normaliser toutes les valeurs numériques pour obtenir des valeurs entre 0 et 1. Une solution possible serait alors

$$a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2$$

Comment obtenir la solution optimale? Le vecteur α est solution de l'équation:

$$\alpha = (A^t.A)^{-1}.A^t.b$$

On appliquant cette formule, on trouve:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.006 \end{pmatrix}$$

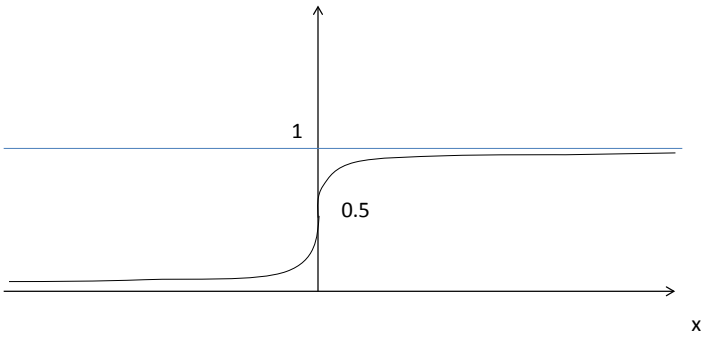
L'équation optimale est donc $0.53 + 0.006.x_1$. L'erreur est alors de 0.015.

Il est souvent plus efficace d'appliquer un algorithme de gradient, qui part d'une solution et la modifie pour l'améliorer à chaque étape, dès que les valeurs de N ou n dépassent 10^4. En effet l'inverse d'une matrice de cette taille pose des problèmes de précision et de temps de calcul.

7.2.1 Régression logistique

Une régression logistique suit une approche similaire pour *classifier* des objets. Dans le cas le plus simple, on suppose deux classes différentes et les échantillons indiquent s'ils sont de la classe 1 ou de la classe 0. On cherche alors une fonction linéaire $\alpha^t.x = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_2 + ...a_n.x_n = 0$ qui séparent au mieux les échantillons de la classe 1 de ceux de la classe 0. Plus généralement on peut aussi rechercher une fonction polynomiale, par exemple $2 + 3x_1 - 4x_2 + 5x_1.x_2 + 6x_1^2 - 7x_2^3$, dans le cas où la frontière entre les points n'est pas un hyperplan.
On utilise une fonction non linéaire spécifique, appelée sigmoide, pour ramener entre 0 et 1 les grandes valeurs possibles positives ou négatives de $\alpha^t.x$. La définition d'une sigmoide est:

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Une sigmoide $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

La classification est alors basée sur le test $g(\alpha^t.x) \geq 1/2$ ce qui est équivalent à $\alpha^t.x \geq 0$. La fonction de potentiel associée est:

$$J(\alpha) = 1/m \sum_{i=1...m} -y^i.\log(g(\alpha^t.x)) - (1-y^i).\log(1-g(\alpha^t.x))$$

Un algorithme de gradient cherche à minimiser cette fonction, en réalisant des petites variations à partir d'une solution α. Cette fonction admet des variantes, en particulier *la régularisation* qui rajoute un terme

$$\lambda. \sum_{i=1...n} a_i^2$$

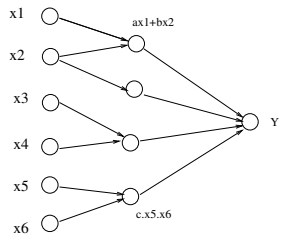
afin de privilégier des petits coefficients des a_i.

7.3 Réseaux de neurones

Un réseau de neurones généralise la régression logistique en considérant plusieurs niveaux de variables y_i, associées à des régressions logistiques. On représente cette fonction par un circuit dont les portes élémentaires sont:

- des additions pondérées : $a.x_i + b.x_j$,
- des sigmoides: $f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$
- des fonctions de seuil : $1 \quad si \quad x_i \geq d, \quad 0 \quad sinon.$

La sortie du circuit est la valeur de la fonction. On recherche alors tous les coefficients du circuit qui minimisent l'erreur.



Un réseau de neurones.

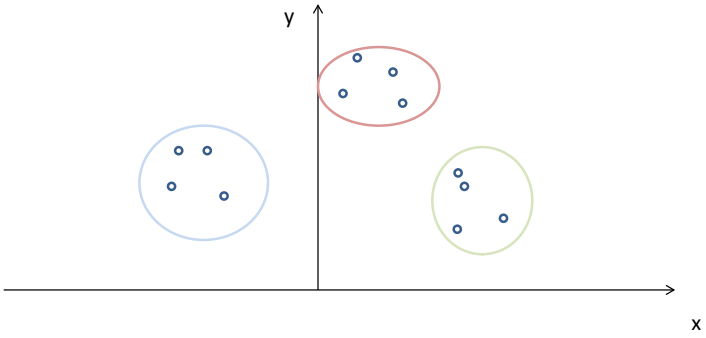
7.4 Apprentissage non supervisé: k-Means

Dans ce cas, les échantillons sont des points dans un espace de dimension d si le tableau de données a d colonnes.

L'algorithme k-Means fixe un nombre de classes (clusters) k à l'avance. Il procède en itérant deux étapes à partir de k points aléatoires $c_1, ...c_k$, pris parmi les échantillons:

- Colorer chaque point c par l'index i du c_i le plus proche.
- Définir les barycentres des points de la même couleur, $c_1^1, ...c_k^1$

En itérant ces deux opérations, on obtient une séquence $c_1^1, ...c_k^1$, puis $c_1^2, ...c_k^2$, puis $c_1^3, ...c_k^3$,.... puis $c_1^j, ...c_k^j$ après j itérations. On arrête l'algorithme quand les distances entre c_i^j et c_i^{j+1} sont inférieures à some ε pour $i = 1, ...k$.



Clusters trouvés par 3-Means pour $d = 2$.

7.5 Graph Mining

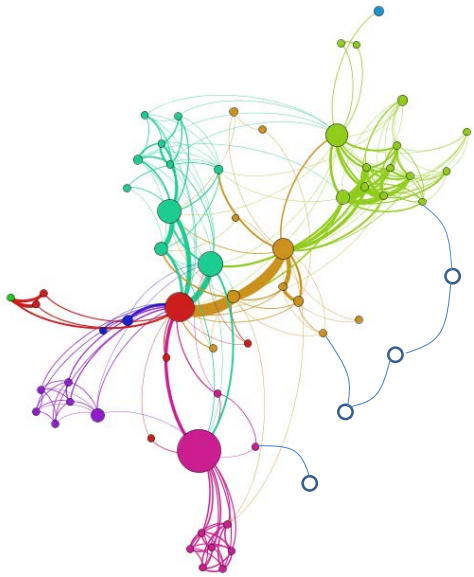
Les réseaux sociaux comme Facebook ou Twitter générent des graphes $G = (V, E)$ où $E \subseteq V.V$ en identifiant des noeuds (utilisateurs pour FB, tags pour Twitter) et des arêtes (amis pour FB)

et liens par message pour Twitter. Si un tweet est envoyé par @x et contient @y et z (parmi les 140 caractères), alors on a deux arêtes: @x E @y et @x E z. Ces graphes ont des caractéristiques remarquables:

- les graphes sont connexes et de petit diamètre (Environ 6 pour Facebook, comme dans l'expérience de Milgram),
- la distribution des degrès est un une loi $1/n^k$) (power law).

Beaucoup d'autres propriétés sont aussi importantes. Un problème des réseaux sociaux est la détection de communauté, c'est-à-dire le regroupement des noeuds en classes (par couleur). Pour cela on utilise des variantes du problème Mincut, la coupure minimale pour deux classes.

On peut utiliser la programmation linéaire et la méthode de Ford-Fulkerson pour trouver la coupe Minimum entre deux points s, t. On peut aussi utiliser l'algorithme randomisé de Karger qui réduit le graphe par étape en éliminant des arêtes aléatoires.



Réseau social avec ses communautés

Le logiciel Gephi est utilisé pour visualiser des graphes sociaux en distinguant 3 étapes:

- spatialisation: placer les noeuds dans l'espace,
- le ranking: la taille des noeuds est lié à leur degré
- la détection de communauté.

Un expérience classique est de se brancher au flux Twitter à partir de mots-clés (Naoyun) puis d'observer le graphe. La description des noeuds capture le contenu des tweets et toutes les informations sur leurs auteurs.

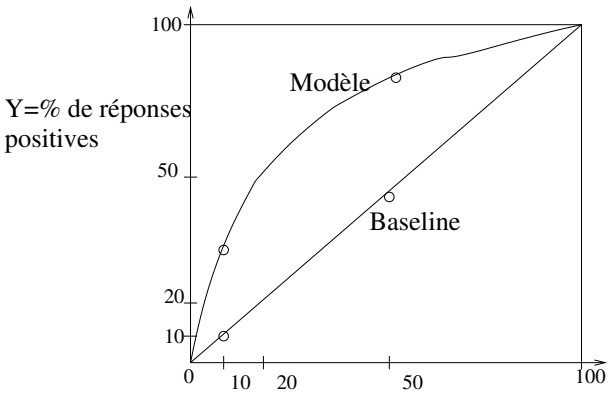
7.6 Qualité de l'approximation

Le principal critère d'une technique prédictive est le taux de bonne réponse, d'erreur et de non prédiction.

Des critères plus précis distinguent une qualité de prédiction. En effet dans le cas d'un arbre de décision partiel, c'est-à-dire dont les noeuds ne sont:

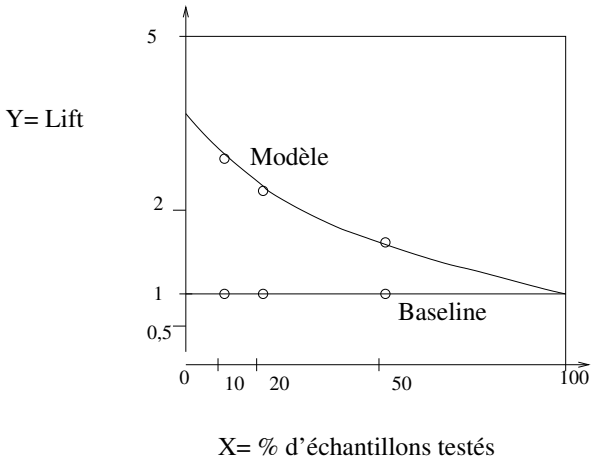
- la courbe de Gains (Cumulative Gains Chart)
- la courbe de Lift (Lift Chart)

La courbe de Gains donne le pourcentage Y de bonnes réponses pour les $X\%$ meilleures prédictions, lorsque $X = 10, 20, ...100$. On compare Y à la valeur Y' correspondant à une décision aléatoire, appelée *Baseline*.



Une courbe de Gains.

Le Lift est défini comme le rapport des pourcentages de bonne réponse entre le modèle et la Baseline.



Une courbe de Lift.

7.7 Logiciels de Fouille de Données

Nous décrivons trois logiciels qui implémentent les techniques de fouilles de données.

7.7.1 Dtree

Ce logiciel très simple construit des arbres de décision, à partir d'un fichier de données, sur des valeurs discrètes.

7.7.2 SAS/Entreprise Miner

Ce module de SAS intègre les trois principaux modèles et permet de les comparer, en sortant des courbes de lift.

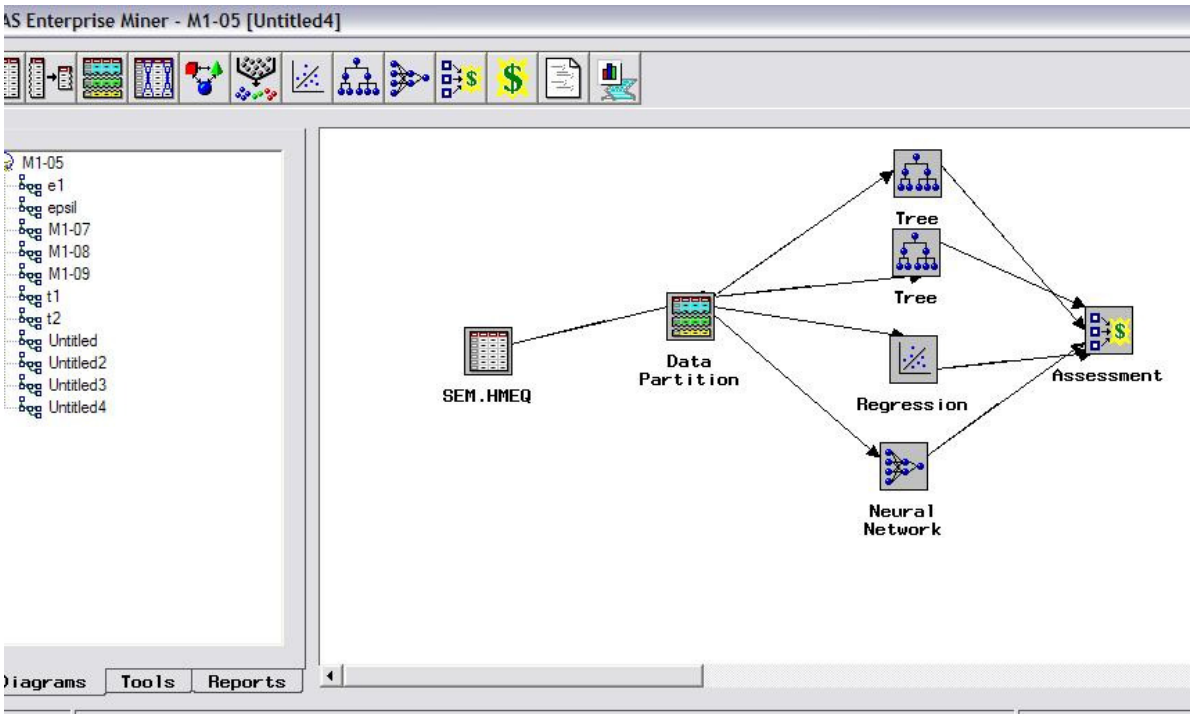


Figure 10: La construction de modèles dans SAS/Entreprise Miner

7.7.3 Weka

Ce logiciel libre a une interface, largement inspirée de celle de SAS/Entreprise Miner. De très nombreux modèles sont disponibles, ce qui rend le logiciel plus difficile à utiliser.

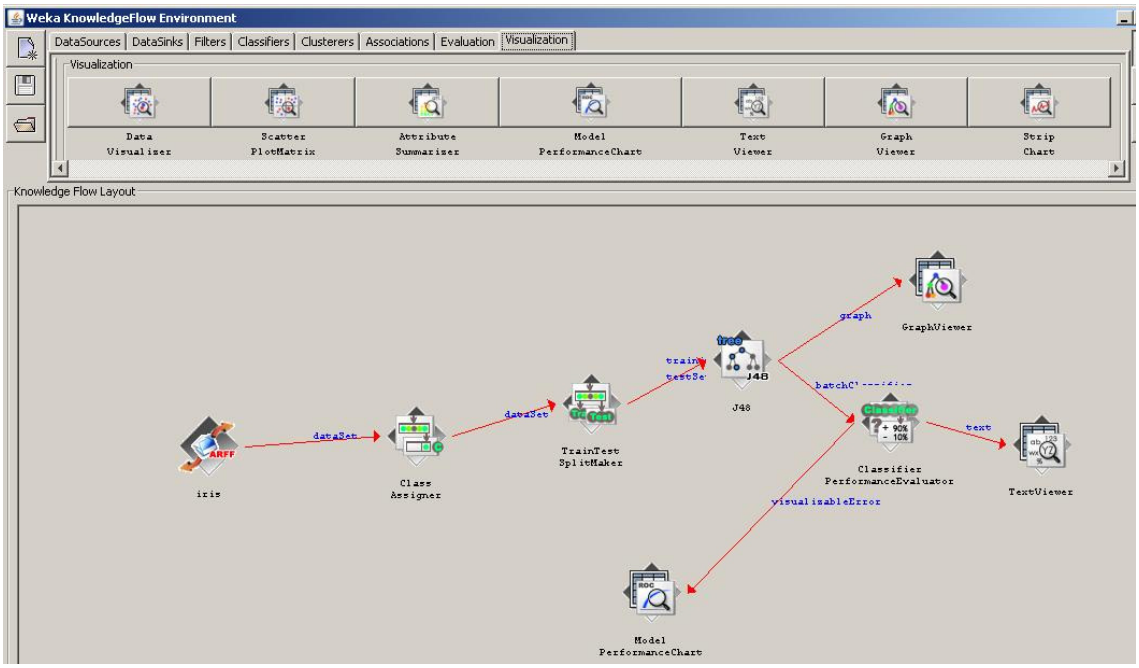


Figure 11: La construction de modèles dans Weka

8 Mécanismes

Le modèle OLAP considéré suppose des données sur un serveur spécifique. On souhaite généraliser ce modèle lorsque les données se trouvent sur des serveurs distincts, générées par des clients distincts.

Le standard d'échange est XML, les données sont décrites par une DTD et stockées sur un serveur. Supposons plusieurs entrepôts de données stockant des enregistrements proches sur des serveurs différents. Il faut donc trouver une représentation statistique qui fait l'union de différentes représentations statistiques sur chaque serveur afin de répondre à des analyses OLAP. C'est un domaine de la recherche actuelle sur *l'Intégration de Données*. La conception de modules ETL (Extract Transform Load) présents dans les principaux outils de Business Intelligence (SAS, SPSS, Business Object) s'inspire directement des recherches actuelles. Certains outils du logiciel libre commencent à apparaitre, tels Pentaho sur *http://www.pentaho.org*, à partir de Mysql et Mondrian.

On peut supposer que N sources de données doivent être intégrées sur un serveur cible (target), et le problème est alors de comprendre l'interaction possible entre N acteurs. La théorie des jeux et des mécanismes présentent un point de vue important pour des économistes, car il permet d'introduire des notions d'utilité, de prix au sein des systèmes informatiques.

8.1 Jeux à N joueurs

Différents clients qui interagissent avec des serveurs peuvent être considérés comme des agents indépendants qui cherchent à réaliser des tâches particulières. Le modèle de jeu définit une *utilité* pour chaque décision élémentaire des N joueurs et un des problèmes classiques est de trouver des équilibres de Nash, stables. Si chaque client souhaite maximiser sa bande passante, c'est-à-dire la

quantité d'information qu'il peut échanger, sur le réseau Internet, un équilibre de Nash déterminera le traffic possible pour chaque client.

Les réseaux informatiques sont donc de bons exemples de jeux où le nombre de joueurs est grand et où la possibilité de trouver de bons équilibres devient un enjeu économique.

For a natural number n, we denote by $[n]$ the set $\{1, \ldots, n\}$. For an integer $r \geq 2$, an *r-players game in normal form* is specified by a set of *pure strategies* S_p, and a *utility* or *payoff* function $u_p : S \to R$, for each player $p \in [r]$, where $S = S_1 \times \cdots \times S_r$ is the set of *pure strategy profiles*. For $s \in S$ the value $u_p(s)$ is the payoff of player p for pure strategy profile s. Let $S_{-p} = S_1 \times \cdots \times S_{p-1} \times S_{p+1} \times \cdots \times S_r$, the set of all pure strategy profiles of players other than p. For $s \in S$, we set the *partial* pure strategy profile s_{-p} to be $(s_1, \ldots s_{p-1}, s_{p+1}, \ldots, s_r)$, and for s' in S_{-p}, and $t_p \in S_p$, we denote by (s'_{-p}, t_p) the *combined* pure strategy profile $(s'_1, \ldots, s'_{p-1}, t_p, s'_{p+1}, \ldots, s'_r) \in S$. We will suppose that $S_p = [n]$ for all $p \in [r]$.

A *mixed strategy* for player p is a probability distribution over S_p, that is a vector $x_p = (x_p^1, \ldots x_p^n)$ such that $x_p^i \geq 0$, for all $i \in [n]$, and $\sum_{i \in [n]} x_p^i = 1$. We define *support*$(x_p)$, the *support* of the mixed strategy x_p as the set of indices i for which $x_p^i > 0$. We denote by Δ_p the set of mixed strategies for p, and we call $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_r$ the set of *mixed strategy profiles*. For a mixed strategy profile $x = (x_1, \ldots, x_r)$ and pure strategy profile $s \in S$, the product $x^s = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_r^{s_r}$ denotes the probability of s in x. The payoff functions naturally extend from S to Δ by setting $u_p(x) = \sum_{s \in S} x^s u_p(s)$. The set Δ_{-p}, the partial mixed strategy profile x_{-p} for $x \in \Delta$, and the combined mixed strategy profile (x', x_p) for $x' \in \Delta_{-p}$ and $x^p \in \Delta_p$ are defined analogously to the pure case. The pure strategy s_p is a *best response* for player p against the partial mixed strategy profile x_{-p} if it maximizes $u_p(x_{-p}, \cdot)$. We will denote by *best*(x_{-p}) the set of best responses against x_{-p}.

A *Nash equilibrium* is a mixed strategy profile x^* such that for all $p \in [r]$, and for all $x_p \in \Delta_p$,

$$u_p(x^*_{-p}, x_p) \leq u_p(x^*).$$

An equivalent condition is $u_p(x^*_{-p}, s_p) \leq u_p(x^*)$ for every $s_p \in best(x^*_{-p})$. Nash has shown in the 1950s that for games with a finite number of players there exists always an equilibrium. It is immediate that the set of Nash equilibria is invariant by translation and positive scaling of the utility functions. Therefore we will suppose that they take values in the interval $[0, 1]$.

Computing a Nash equlibrium is not an easy task. It was proven recently in a series of papers [DGP09], that this computation is complete for the class PPAD, even when the number of players is restricted to two, and therefore it is unlikely to be feasible in polynomial time.

Several relaxations of the notion of equilibrium have been considered in the form of additive and multiplicative approximations. Let $\varepsilon > 0$. An *additive ε-approximate equlibrium* is a mixed strategy profile x^* such that for all $p \in [r]$, and for all $x^p \in \Delta_p$,

$$u_p(x^*_{-p}, x_p) \leq u_p(x^*) + \varepsilon.$$

A *multiplicative ε-approximate equlibrium* is a mixed strategy profile x^* such that for all $p \in [r]$, and for all $x^p \in \Delta_p$,

$$u_p(x^*_{-p}, x_p) \leq (1 + \varepsilon) u_p(x^*).$$

Since by our convention $0 \leq u_p(x^*) \leq 1$, a multiplicative ε-approximate equilibrium is always an additive ε-approximate equilibrium, but the converse is not necessarily true.

The input size of a r-players game is the length of the description of rn^r rational numbers. Here we will consider the computational model where arithmetic operations and comparisons have unit cost.

8.1.1 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Dans ce cas, on note A la matrice de gain du joueur I et $B = -A$ la matrice de gain du joueur II. Il existe un algorithme polynomial, utilisant la programmation linéaire, pour trouver un équilibre de Nash, qui correspond aux meilleures stratégies de chaque joueur.

8.1.2 Jeux à deux joueurs

Dans le cas général, il n'existe pas d'algorithme polynomial pour trouver un équilibre de Nash.

8.2 Mécanismes

Dans l'approche des mécanismes, on observe un équilibre et on cherche un jeu dont l'équilibre est l'équilibre recherché. Ce jeu décrit l'interaction d'un joueur avec ses voisins et une fonction d'utilité. L'informatique distribuée s'intéresse aux interactions mais ne donne pas de vision économique des situations possibles.

8.3 Le Mécanisme Adwords

Un des mécanismes récents les plus célèbres est *Adwords* introduit par Google, pour gérer la publicité ciblée, c'est-à-dire les encarts publicitaires attachés aux réponses du moteur de recherche. Une nouvelle industrie est née sur ce modèle et de nouveaux services dont le modèle économique sera inspiré de celui de Google vont sans-doute se développer.

Des annonceurs parient sur des ensembles de mots-clés en fixant un prix pour chaque ensemble de mots clés et un budget journalier. Par exemple 1$ pour *hôtel, Paris*, 2$ pour *hôtel, Paris, centre*, 1/2$ pour *hôtel, Marseille* et un budget de 50$ par jour, pour une chaîne hotelière qui auraient des offres sur Paris et Marseille. L'aspect innovant est le côté Multilingues et Multimarché. On peut mélanger des mots de plusieurs langues (anglais et chinois par exemple) et viser des marchés particuliers. Le marché chinois sur *http://www.google.com/intl/zh-CN/* ou le marché indien sur *http://www.google.co.in/*.

Le moteur de recherche répond à des milliers de demande par seconde et propose pour chaque ensemble de mots A, B, C un ensemble d'encarts ordonnés de 1 à 10 (de haut en bas) et un prix pour un Click potentiel sur l'encart, appelé CPC (Cost-Per-Click).

L'algorithme utilisé a les caractéristiques suivantes:

- Il est en-ligne (Online), c'est-à-dire qu'il répond immédiatement à partir de l'état du système,
- Il cherche à maximiser le profit de Google.

On peut imaginer une enchère de Vickrey, qui allouerait l'espace aux meilleurs annonceurs pour le prix de la seconde meilleure annonce. Le système Adwords s'inspire de ce mécanisme mais le raffine.

Chaque encart a en effet une probabilité de Click qui lui est propre et qui est estimée à l'aide des statistiques de Click. Celles-ci sont très précises et permettent de prédire le traffic d'un ensemble de mots clé tels que A, B, C. Si l'encart E_1 a une probabilité de click $p_1 = 0,1$ et un pari de 2$, l'encart E_2 peut avoir une probabilité de click $p_2 = 0,5$ et un pari de 1$, et E_2 est alors plus intéressant que E_1. Il faut donc remplacer le pari d'un encart E_i de probabilité de click p_i et de pari de v_i, par son espérance, $p_i.v_i$.

Il faut aussi choisir les encarts et en utilisant aussi le budget journalier des clients. Supposons que deux clients A et B parient 1 pour deux ensembles de mots x et y avec un budget journalier

de 4. Si B a une meilleure probabilité de Click, une allocation possible gloutonne (*greedy*) à la séquence de requêtes $xxxyyyy$ serait $BBBB$ et rapporterait 4. Pourtant l'allocation $AAAABBBB$ rapporterait 8, soit deux fois plus. Le rapport d'approximation de la technique gloutonne est alors de 1/2 et c'est le pire cas.

Une autre technique, appelée *Balance* analysée en 2004 alloue en priorité le client qui a le moins dépensé son budget. Dans ce cas l'allocation serait: $ABABBB$ et le rapport d'approximation est supérieur à 3/4. En général le rapport d'approximation est supérieur à $1 - 1/e$ mais est optimal parmi tous les algorithmes en ligne.

References

[DGP09] Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, and Christos H. Papadimitriou. The complexity of computing a nash equilibrium. *Commun. ACM*, 52(2):89–97, 2009.

[MR95] R. Motwani and P. Raghavan. *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press, 1995.