

# Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Septembre 2009

# Plan de la séance

1 – Lambda-calcul

2 – Catégories et 2-catégories

# Première partie

## Lambda-calcul

Le calcul des fonctions

## Church 1935: invention syntaxique du $\lambda$ -calcul

Le  $\lambda$ -calcul est le calcul **syntaxique** ou **formel** des fonctions.

Les expressions du  $\lambda$ -calcul sont appelés des  **$\lambda$ -termes**.

Le  $\lambda$ -calcul est un calcul **plutôt bizarre** où tout  $\lambda$ -terme  $P$  est à la fois:

- \* une **fonction** qui s'applique à tous les  $\lambda$ -termes, **y compris lui-même**,
- \* un **argument** de n'importe quel  $\lambda$ -terme, **y compris lui-même**.

On a longtemps cru que le  $\lambda$ -calcul n'était qu'**un jeu d'écriture**, auquel on ne saurait pas donner de sens mathématique — jusqu'au modèle dénotationnel de Dana Scott (1976).

## Curry 1958: le $\lambda$ -calcul simplement typé

Il est possible de **typer** certaines expressions du  $\lambda$ -calcul au moyen de types simples  $A, B$  construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle **contexte de typage**  $\Gamma$  une suite finie  $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)$  où  $x_i$  est une variable et  $A_i$  est un type simple, pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

On appelle **séquent** un triplet:

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash P : B$$

où  $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$  est un contexte de typage,  $P$  est un  $\lambda$ -terme et  $B$  est un type simple.

# Curry 1958: le $\lambda$ -calcul simplement typé

Variable	$\frac{}{x:A \vdash x:A}$
Abstraction	$\frac{\Gamma, x:A \vdash P:B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$
Application	$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x:A \vdash P : B}$
Contraction	$\frac{\Gamma, x:A, y:A \vdash P : B}{\Gamma, z:A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\frac{\Gamma, x:A, y:B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y:B, x:A, \Delta \vdash P : C}$

# Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un  $\lambda$ -terme  $P$  est appelé **simplement typé** lorsqu'il existe un contexte de typage  $\Gamma$  et un type simple  $A$  tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des  $\lambda$ -termes simplement typés est clos par  $\beta$ -réduction:

**Subject Reduction:** Si  $\Gamma \vdash P : A$  et  $P \longrightarrow_{\beta} Q$ , alors  $\Gamma \vdash Q : A$ .

Un  $\lambda$ -terme  $P$  est appelé **fortement normalisable** lorsque tous les chemins de  $\beta$ -réduction:

$$P \longrightarrow_{\beta} P_1 \longrightarrow_{\beta} P_2 \longrightarrow_{\beta} \cdots \longrightarrow_{\beta} P_n \longrightarrow_{\beta} \cdots$$

terminent.

**Normalisation forte:** Si  $P$  est simplement typé alors  $P$  est fortement normalisable.

En particulier, le  $\lambda$ -terme  $\Delta\Delta$  qui boucle n'est pas simplement typé.

# Curry-Howard (1)

Logique minimale intuitioniste

Variable

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$$



# Curry-Howard (1)

$\lambda$ -calcul simplement typé

Variable

$$\frac{}{x:A \vdash x:A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash P:B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x:A \vdash P : B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, x:A, y:A \vdash P : B}{\Gamma, z:A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, x:A, y:B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y:B, x:A, \Delta \vdash P : C}$$

# Deuxième partie

## Catégories et 2-catégories

Foncteurs et transformations naturelles

# Catégories

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble  $\mathbf{Hom}(A, B)$  de **morphismes** pour tout couple d'objets  $(A, B)$ ,

— d'une **loi de composition**  $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme **identité**  $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$  pour tout objet  $A$ ,

1— tel que  $\circ$  soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes  $id$  soient éléments neutre de  $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B) \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

**Notation:** on écrit  $f : A \longrightarrow B$  quand  $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$ .

# Foncteurs

Un **foncteur**  $F$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  vers une catégorie  $\mathcal{D}$  est la donnée:

— d'un objet  $FA$  de  $\mathcal{D}$  pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,

— d'une fonction  $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$  pour tout couple d'objets  $(A, B)$  de  $\mathcal{C}$ .

On demande que  $F$  préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \quad = \quad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \quad = \quad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

## Exemple de catégorie et foncteur (1)

Tout ensemble ordonné  $(X, \leq)$  définit une catégorie dont les objets sont les éléments de  $X$ , et dans laquelle:

$$\mathbf{Hom}_c(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, il existe au plus un morphisme entre deux objets.

## Exemple de catégorie et foncteur (2)

Un monoïde  $(M, \cdot, e)$  est un ensemble  $M$  muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

$$\begin{array}{ll} \text{Associativité} & \forall x, y, z \in M, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ \text{Unité} & \forall x \in M, \quad x \cdot e = x = e \cdot x. \end{array}$$

Un homomorphisme  $f$  de  $(M, \cdot, e)$  dans  $(N, \bullet, u)$  est une fonction  $f : M \rightarrow N$  qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exercice. Identifier tout monoïde  $(M, \cdot, e)$  à une catégorie  $[M, \cdot, e]$  à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de  $(M, \cdot, e)$  dans  $(N, \bullet, u)$  et les foncteurs de  $[M, \cdot, e]$  dans  $[N, \bullet, u]$ .

## Exemple de catégorie et foncteur (3)

L'action d'un monoïde

$$(M, \cdot, e)$$

sur un ensemble

$$X$$

est la même chose qu'un foncteur

$$[M, \cdot, e] \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

La représentation d'un monoïde est la donnée d'un foncteur dans **Vect**.

# Transformations

Une **transformation**

$$\theta : F \longrightarrow G$$

entre deux foncteurs

$$F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est une famille de morphismes

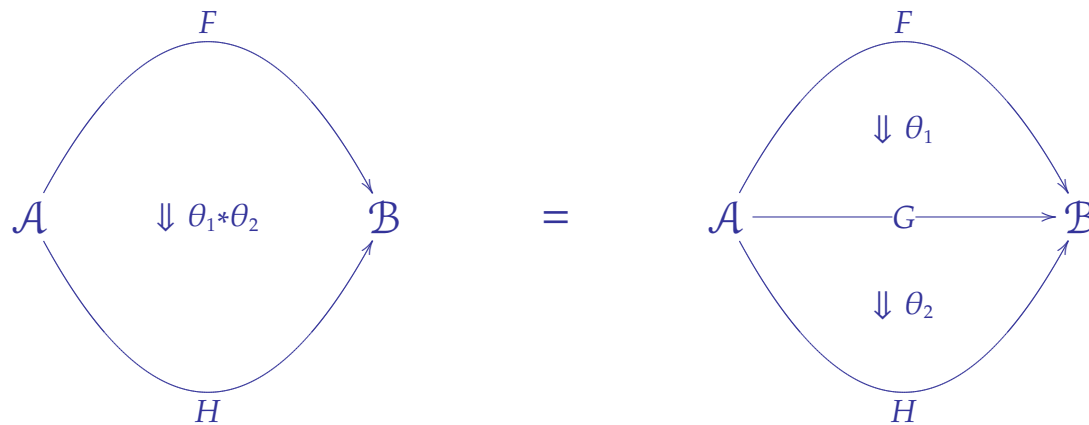
$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \text{Obj}(\mathcal{A})}$$

de la catégorie  $\mathcal{B}$  indexée par les objets de la catégorie  $\mathcal{A}$ .



# Composition verticale de transformations

Les transformations se composent verticalement



et définissent ainsi une catégorie

**Trans** (  $\mathcal{A}$  ,  $\mathcal{B}$  )

pour toutes catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

# Action à gauche sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{A} & & & & \mathcal{B} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C} \\ & \searrow & \Downarrow \theta & \nearrow & \\ & & G & & \end{array}$$

on définit l'**action à gauche** du foncteur  $H$  sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

comme la transformation

$$H \circ_L \theta : H \circ F \longrightarrow H \circ G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet  $A$  est définie par le morphisme

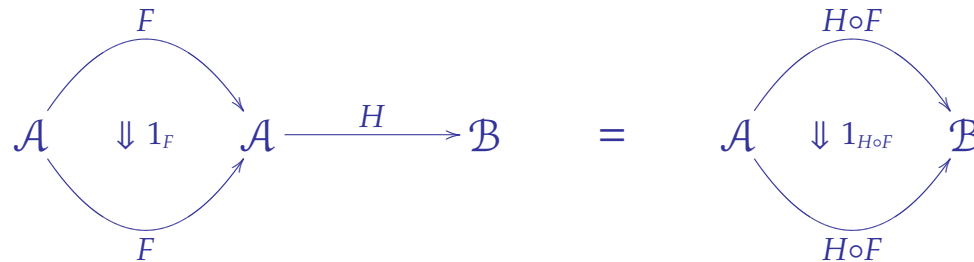
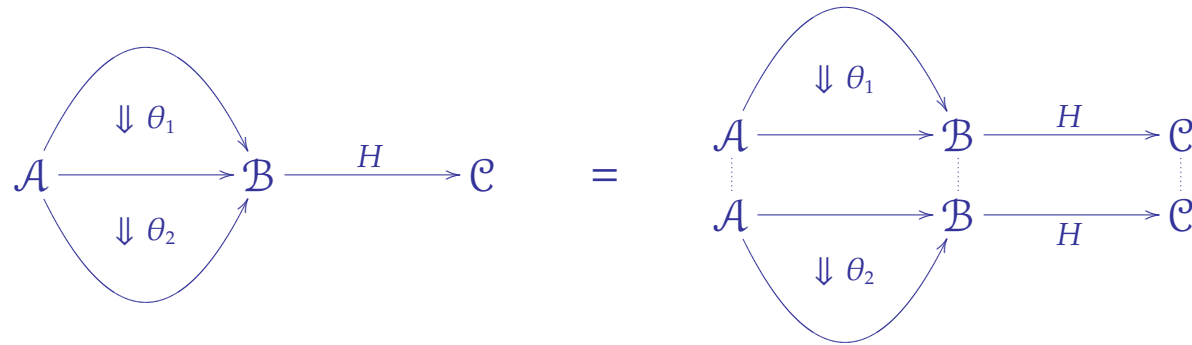
$$H \circ F(A) \xrightarrow{H(\theta_A)} H \circ G(A).$$

# Propriétés de l'action à gauche (1)

Les deux équations

$$H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) = (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1) \qquad H \circ_L 1_F = 1_{H \circ F}$$

signifient diagrammatiquement que



## Propriétés de l'action à gauche (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{ccc} H \circ_L - & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & \theta & \mapsto H \circ_L \theta \end{array}$$

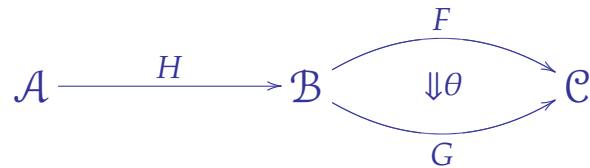
définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$(H_1 \circ H_2) \circ_L F = H_1 \circ_L (H_2 \circ_L F) \qquad 1_{\mathcal{A}} \circ_L F = F$$

expriment le fait que  $\circ_L$  définit une action.

# Action à droite sur les transformations

Dans la situation suivante



le foncteur  $H$  agit sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et la transporte en la transformation:

$$H \circ_R \theta : F \circ H \longrightarrow G \circ H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet  $A$  est définie par le morphisme

$$F \circ H(A) \xrightarrow{\theta_{H(A)}} G \circ H(A).$$

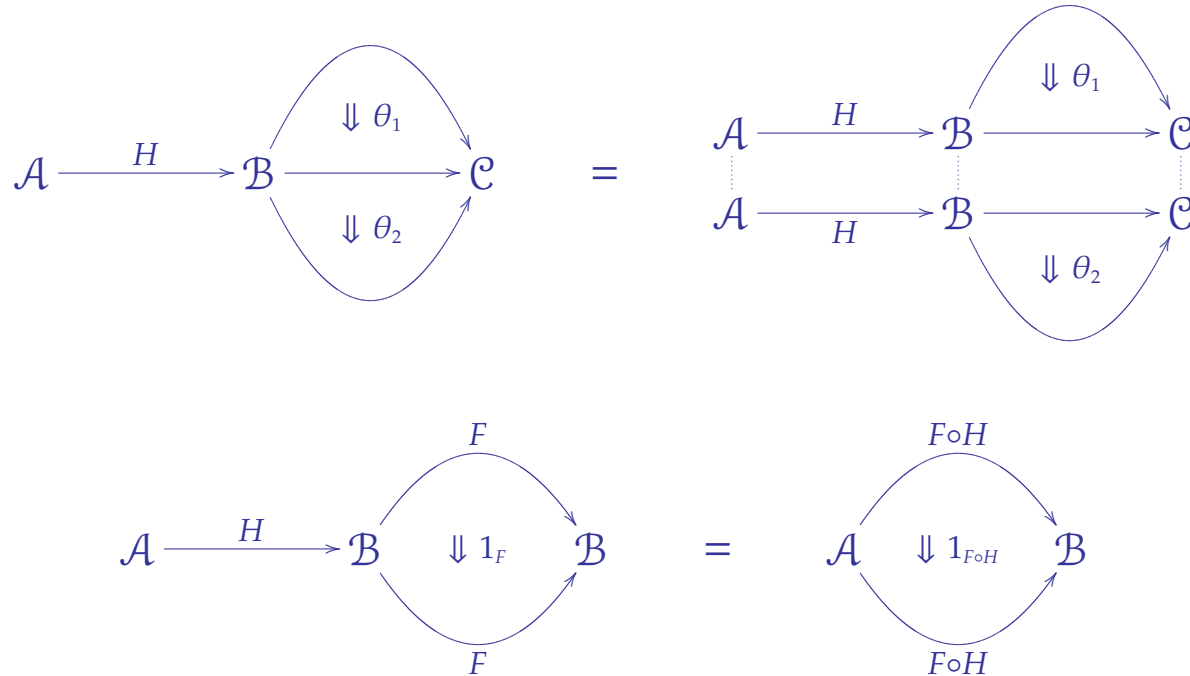
# Propriétés de l'action à droite (1)

Les deux équations

$$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R H = (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 *_R H)$$

$$1_F \circ_R H = 1_{F \circ H}$$

signifient diagrammatiquement que



## Propriétés de l'action à droite (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{lcl} - \circ_R H & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta \longmapsto \theta \circ_R H \end{array}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$\theta \circ_R (H_2 \circ H_1) = (\theta \circ_R H_2) \circ_R H_1 \qquad F \circ_R 1_{\mathcal{B}} = F$$

expriment le fait que  $\circ_R$  définit une action.

# Compatibilité des actions à gauche et à droite

Dernière équation: dans la situation

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{H_1} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{H_2} \mathcal{B}'$$

l'ordre dans lequel on fait agir  $H_1$  et  $H_2$  sur la transformation  $\theta$  ne compte pas:

$$(H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1 = H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1)$$



# Sesqui-catégories

Une sesqui-catégorie  $\mathcal{D}$  est une catégorie munie d'une structure de catégorie

$$\mathcal{D}(A, B)$$

pour toute paire d'objets  $(A, B)$  de la catégorie, telle que

$$\text{les objets de } \mathcal{D}(A, B) = \text{les morphismes de } A \text{ dans } B$$

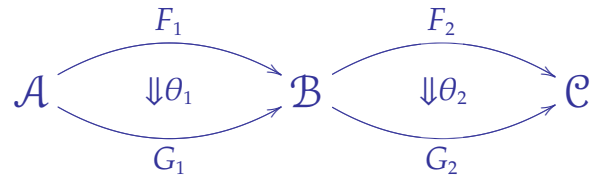
munie d'une paire d'actions  $\circ_L$  et  $\circ_R$  satisfaisant les neuf équations évoquées:

$h \circ_L (\theta_2 * \theta_1)$	$=$	$(h \circ_L \theta_2) * (h \circ_L \theta_1)$	$h \circ_L 1_f$	$=$	$1_{h \circ f}$
$(h_1 \circ h_2) \circ_L f$	$=$	$h_1 \circ_L (h_2 \circ_L f)$	$1_A \circ_L f$	$=$	$f$
$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R h$	$=$	$(\theta_2 \circ_R h) * (\theta_1 \circ_R h)$	$1_f \circ_R h$	$=$	$1_{f \circ h}$
$\theta \circ_R (h_2 \circ h_1)$	$=$	$(\theta \circ_R h_2) \circ_R h_1$	$f \circ_R 1_B$	$=$	$f$
	$(h_2 \circ_L \theta) \circ_R h_1$	$=$	$h_2 \circ_L (\theta \circ_R h_1)$		

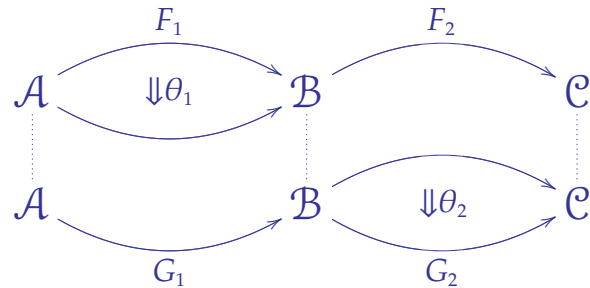
Les catégories, foncteurs et transformations forment une sesqui-catégorie.

# La sesqui-catégorie des catégories et transformations

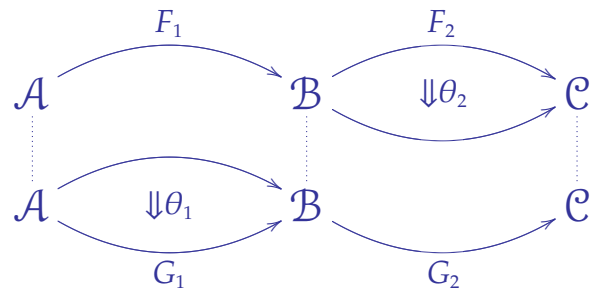
Soit deux transformations  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans la configuration suivante



La transformation obtenue en appliquant  $\theta_1$  puis  $\theta_2$



diffère en général de la transformation obtenue en appliquant  $\theta_1$  puis  $\theta_2$ .



# Transformations naturelles

Une transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est **naturelle** lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\theta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\theta_B} & GB \end{array}$$

commute pour tout morphisme

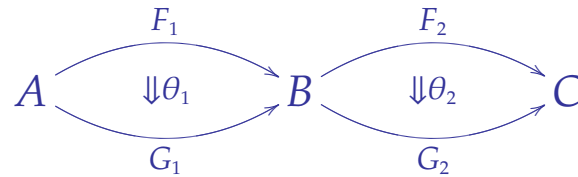
$$A \xrightarrow{f} B$$

On note  $\mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  la catégorie des foncteurs et transformations naturelles

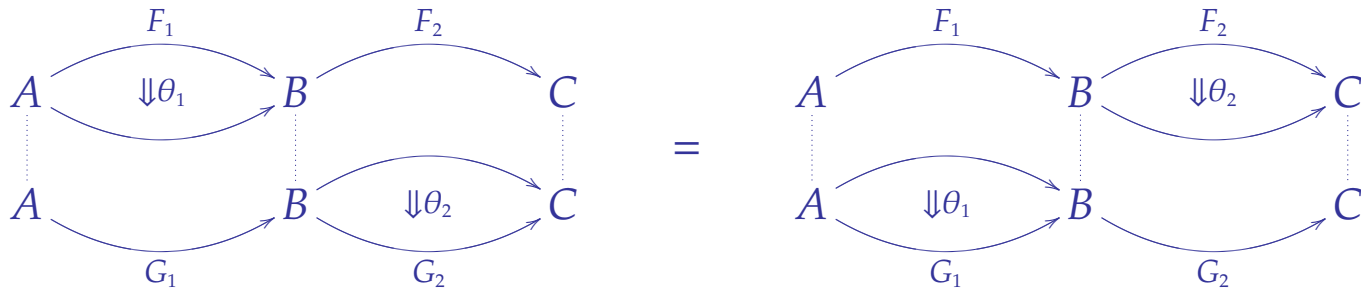
$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

# Loi d'échange

On dit qu'une paire de 2-cellules  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans une sesqui-catégorie  $\mathcal{D}$



satisfait la loi d'échange lorsque l'égalité

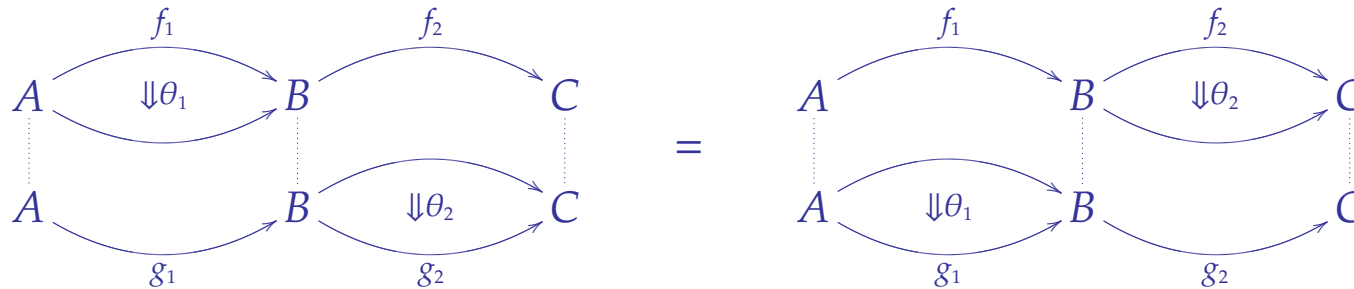


est satisfaite.

Autrement dit, l'ordre dans lequel on compose  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est sans importance.

# Exercice

Dans une sesqui-catégorie  $\mathcal{D}$ , on appelle **centrale à gauche** toute 2-cellule  $\theta_2$  telle que la loi d'échange



est satisfaite pour toute transformation  $\theta_1$ .

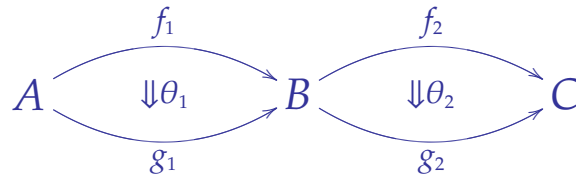
Montrer que les transformations naturelles coïncident avec les 2-cellules centrales à gauche, dans la sesqui-catégorie des catégories, foncteurs et transformations.

En déduire l'existence d'un foncteur:

$$\mathbf{Nat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

## 2-catégories

Une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  est une sesqui-catégorie telle que **la loi d'échange** est satisfaite par toute paire de 2-cellules



## 2-catégories (définition alternative)

Une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'une catégorie  $\mathcal{D}(A, B)$  pour tout couple d'objets  $(A, B)$ ,

— d'un **foncteur** de composition  $\circ : \mathcal{D}(B, C) \times \mathcal{D}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(A, C)$

— d'une identité **identité**  $id_A : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{D}(A, A)$  pour tout objet  $A$ ,

1— tel que  $\circ$  soit associative, au sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(C, D) \times \mathcal{D}(B, C) \times \mathcal{D}(A, B) & \xrightarrow{\circ \times \mathcal{D}(A, B)} & \mathcal{D}(B, D) \times \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \mathcal{D}(C, D) \times \circ & & \downarrow \circ \\
 \mathcal{D}(C, D) \times \mathcal{D}(A, C) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{D}(A, D)
 \end{array}$$

commute.

2— tel que  $id$  soit élément neutre de  $\circ$  au sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(A, B) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \cong & & \uparrow \circ \\
 \mathcal{D}(A, B) \times \mathbb{1} & \xrightarrow{\mathcal{D}(A, B) \times id_A} & \mathcal{D}(A, B) \times \mathcal{D}(A, A)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(A, B) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \cong & & \uparrow \circ \\
 \mathbb{1} \times \mathcal{D}(A, B) & \xrightarrow{id_B \times \mathcal{D}(A, B)} & \mathcal{D}(B, B) \times \mathcal{D}(A, B)
 \end{array}$$

commutent pour tout  $A$  et  $B$ .

**Notation:** on écrit

$$\theta : f \Rightarrow g : A \longrightarrow B$$

quand

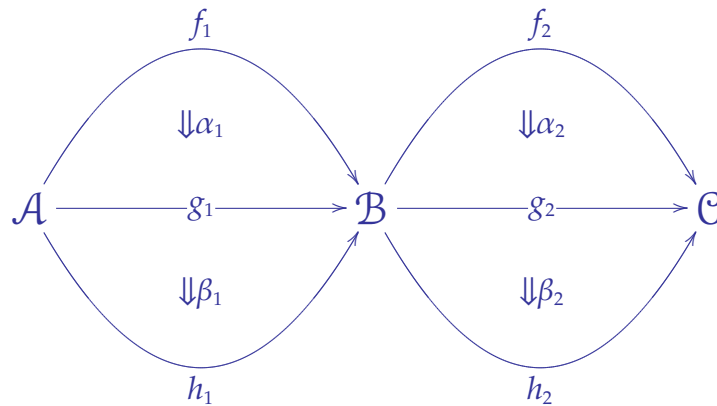
$$\theta : f \longrightarrow g$$

est un morphisme de la catégorie  $\mathcal{D}(A, B)$ .



# Loi d'échange de Godement

Dans une 2-catégorie  $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , les deux manières canoniques de composer les 2-cellules



commutent:

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

# Suspension

Nous verrons dans une prochaine séance la notion de catégorie monoïdale.

Toute catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{C}$  peut être vue comme la 2-catégorie  $\Sigma(\mathcal{C})$

— qui ne contient qu'une seule 0-cellule,

— dont les 1-cellules sont les 0-cellules de  $\mathcal{C}$

— dont les 2-cellules sont les 1-cellules de  $\mathcal{C}$

avec les lois de composition induites.

Une sesqui-catégorie  $\Sigma(\mathcal{C})$  à un objet définit une catégorie prémonoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ .

# Exemple: la 2-catégorie des ensembles et des relations

La 2-catégorie  $\mathcal{Rel}$  est définie comme suit:

- ses 0-cellules (ou objets) sont les ensembles,
- ses 1-cellules (ou morphismes) sont les relations entre ensemble,

$$A \xrightarrow{f \cdot g} B = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

composées relationnellement:

$$a [f \cdot g] c \iff \exists b \in B, \quad a [f] b \text{ et } b [g] c.$$

- ses 2-cellules (ou cellules) sont données par inclusion:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & & B \\ & \Downarrow & \\ & \curvearrowleft & \\ & g & \end{array} \iff f \subseteq g$$

En particulier, les catégories  $\mathcal{Rel}(A, B)$  sont des catégories de préordre.