Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Septembre 2009

Plan de la séance

1 – Lambda-calcul

2 – Catégories et 2-catégories

Première partie

Lambda-calcul

Le calcul des fonctions

Church 1935: invention syntaxique du λ-calcul

Le λ**-calcul** est le calcul **syntaxique** ou **formel** des fonctions.

Les expressions du λ-calcul sont appelés des λ**-termes.**

Le λ-calcul est un calcul **plutôt bizarre** où tout λ-terme P est à la fois:

* une **fonction** qui s'applique à tous les λ-termes, **y compris lui-même,**
* un **argument** de n'importe quel λ-terme, **y compris lui-même.**

On a longtemps cru que le λ-calcul n'était qu'**un jeu d'écriture,** auquel on ne saurait pas donner de sens mathématique — jusqu'au modèle dénotationnel de Dana Scott (1976).

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Il est possible de typer certaines expressions du λ-calcul au moyen de types simples A, B construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle contexte de typage Γ une suite finie $\Gamma = (x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)$ où x_i est une variable et A_i est un type simple, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On appelle séquent un triplet:

$$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash P : B$$

où $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$ est un contexte de typage, P est un λ-terme et B est un type simple.

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Variable	$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$
Abstraction	$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$
Application	$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$
Affaiblissement	$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$
Contraction	$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$
Permutation	$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un λ-terme P est appelé simplement typé lorsqu'il existe un contexte de typage Γ et un type simple A tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des λ-termes simplement typés est clos par β-réduction:

Subject Reduction: Si $\Gamma \vdash P : A$ et $P \longrightarrow_\beta Q$, alors $\Gamma \vdash Q : A$.

Un λ-terme P est appelé fortement normalisable lorsque tous les chemins de β-réduction:

$$P \longrightarrow_\beta P_1 \longrightarrow_\beta P_2 \longrightarrow_\beta \cdots \longrightarrow_\beta P_n \longrightarrow_\beta \cdots$$

terminent.

Normalisation forte: Si P est simplement typé alors P est fortement normalisable.

En particulier, le λ-terme $\Delta\Delta$ qui boucle n'est pas simplement typé.

Curry-Howard (1)

Logique minimale intuitioniste

Variable

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$$

Curry-Howard (1)

$\boxed{\lambda\text{-calcul simplement typé}}$

Variable
$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application
$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement
$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction
$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation
$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Deuxième partie

Catégories et 2-catégories

Foncteurs et transformations naturelles

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A,B)$ de **morphismes** pour tout couple d'objets (A,B),

— d'une **loi de composition** $\circ : \mathbf{Hom}(B,C) \times \mathbf{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A,C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathbf{Hom}(A,A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative

$$\forall (f,g,h) \in \mathbf{Hom}(A,B) \times \mathbf{Hom}(B,C) \times \mathbf{Hom}(C,D) \qquad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de $\circ$

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A,B) \qquad f \circ id_A \;=\; f \;=\; id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A,B)$.

Foncteurs

Un **foncteur** F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée:

— d'un objet FA de $\mathcal{D}$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \qquad = \qquad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \qquad = \qquad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ définit une catégorie dont les objets sont les éléments de X, et dans laquelle:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \{*\} & \text{si } x \leq y \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, il existe au plus un morphisme entre deux objets.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

Un monoïde $(M, \cdot, e)$ est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

Associativité	$\forall x, y, z \in M,$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Unité	$\forall x \in M,$	$x \cdot e = x = e \cdot x.$

Un homomorphisme f de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ est une fonction $f : M \longrightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exercice. Identifier tout monoïde $(M, \cdot, e)$ à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de $(M, \cdot, e)$ dans $(N, \bullet, u)$ et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Exemple de catégorie et foncteur (3)

L'action d'un monoïde

$$(M, \cdot, e)$$

sur un ensemble

$$X$$

est la même chose qu'un foncteur

$$[M, \cdot, e] \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

La représentation d'un monoïde est la donnée d'un foncteur dans $\mathbf{Vect}$.

Transformations

Une **transformation**

$$\theta \quad : \quad F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$$

entre deux foncteurs

$$F, G \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est une famille de morphismes

$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in Obj(\mathcal{A})}$$

de la catégorie $\mathcal{B}$ indexée par les objets de la catégorie $\mathcal{A}$.

Composition verticale de transformations

Les transformations se composent verticalement

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\, \theta_1 {*} \theta_2"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=5ex, "\Downarrow\, \theta_1"] \arrow[r, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\, \theta_2"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

et définissent ainsi une catégorie

$$\textbf{Trans}\ (\ \mathcal{A}\ \ ,\ \ \mathcal{B}\ )$$

pour toutes catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Action à gauche sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

on définit l'**action à gauche** du foncteur H sur la transformation

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}$$

comme la transformation

$$H \circ_L \theta \quad : \quad H \circ F \quad \longrightarrow \quad H \circ G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$H \circ F(A) \xrightarrow{\quad H(\theta_A) \quad} H \circ G(A).$$

Propriétés de l'action à gauche (1)

Les deux équations

$$H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) \quad = \quad (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1) \qquad\qquad H \circ_L 1_F \quad = \quad 1_{H \circ F}$$

signifient diagrammatiquement que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, phantom, "\Downarrow \theta_1"]
\arrow[Rightarrow, from=M, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U}] \arrow[r, ""{name=M1}] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, no head] \\
\mathcal{A} \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=60, ""'{name=D}] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{C}
\arrow[from=U, to=M1, phantom, "\Downarrow \theta_1"]
\arrow[from=M2, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F", ""'{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"', ""{name=D}] & \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow 1_F"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "H \circ F", ""'{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "H \circ F"', ""{name=D}] & \mathcal{B}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow 1_{H \circ F}"]
\end{tikzcd}$$

Propriétés de l'action à gauche (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} H \circ_L - & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta & \mapsto & H \circ_L \theta \end{array}}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$(H_1 \circ H_2) \circ_L F \quad = \quad H_1 \circ_L (H_2 \circ_L F) \qquad\qquad 1_{\mathcal{A}} \circ_L F \quad = \quad F$$

expriment le fait que $\circ_L$ définit une action.

Action à droite sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

le foncteur H agit sur la transformation

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{B} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

et la transporte en la transformation:

$$H \circ_R \theta \quad : \quad F \circ H \quad \longrightarrow \quad G \circ H \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$F \circ H(A) \xrightarrow{\theta_{H(A)}} G \circ H(A).$$

Propriétés de l'action à droite (1)

Les deux équations

$$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R H \quad = \quad (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 *_R H) \qquad\qquad 1_F \circ_R H \quad = \quad 1_{F\circ H}$$

signifient diagrammatiquement que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \mathcal{C}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M1}] \arrow[d, dotted, no head] & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, no head] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{B} \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=60, ""{name=D, above}] & \mathcal{C}
\arrow[from=U, to=M1, phantom, "\Downarrow \theta_1"] \arrow[from=M2, to=D, phantom, "\Downarrow \theta_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "H"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "F"', ""{name=D, above}] & \mathcal{B}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow 1_F"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F\circ H", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "F\circ H"', ""{name=D, above}] & \mathcal{B}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow 1_{F\circ H}"]
\end{tikzcd}$$

Propriétés de l'action à droite (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} - \circ_R H & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{B},\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{Trans}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \\ & & \theta & \mapsto & \theta \circ_R H \end{array}}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$\theta \circ_R (H_2 \circ H_1) \quad = \quad (\theta \circ_R H_2) \circ_R H_1 \qquad\qquad F \circ_R 1_{\mathcal{B}} \quad = \quad F$$

expriment le fait que $\circ_R$ définit une action.

Compatibilité des actions à gauche et à droite

Dernière équation: dans la situation

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "H_1"] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

l'ordre dans lequel on fait agir H_1 et H_2 sur la transformation θ ne compte pas:

$$(H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1 \quad = \quad H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1)$$

Sesqui-catégories

Une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$ est une catégorie munie d'une structure de catégorie

$$\mathscr{D}(A,B)$$

pour toute paire d'objets (A,B) de la catégorie, telle que

les objets de $\mathscr{D}(A,B)$ = les morphismes de A dans B

munie d'une paire d'actions $\circ_L$ et $\circ_R$ satisfaisant les neuf équations évoquées:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} h \circ_L (\theta_2 * \theta_1) & = & (h \circ_L \theta_2) * (h \circ_L \theta_1) & & h \circ_L 1_f & = & 1_{h\circ f} \\ (h_1 \circ h_2) \circ_L f & = & h_1 \circ_L (h_2 \circ_L f) & & 1_A \circ_L f & = & f \\ (\theta_2 * \theta_1) \circ_R h & = & (\theta_2 \circ_R h) * (\theta_1 *_R h) & & 1_f \circ_R h & = & 1_{f\circ h} \\ \theta \circ_R (h_2 \circ h_1) & = & (\theta \circ_R h_2) \circ_R h_1 & & f \circ_R 1_B & = & f \end{array} \\ (\, h_2 \;\circ_L\; \theta\,) \;\circ_R\; h_1 \quad = \quad h_2 \;\circ_L\; (\,\theta \;\circ_R\; h_1\,)}$$

Les catégories, foncteurs et transformations forment une sesqui-catégorie.

La sesqui-catégorie des catégories et transformations

Soit deux transformations θ_1 et θ_2 dans la configuration suivante

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

La transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{A} \arrow[r, bend right, "G_1"'] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

diffère en général de la transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathcal{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{A} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend right, "G_2"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Transformations naturelles

Une transformation

$$\theta \quad : \quad F \stackrel{.}{\longrightarrow} G \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est **naturelle** lorsque le diagramme

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"] & GB \end{tikzcd}$$

commute pour tout morphisme

$$A \xrightarrow{f} B$$

On note $\mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des foncteurs et transformations naturelles

$$\theta \quad : \quad F \quad \longrightarrow \quad G \quad : \quad \mathcal{A} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}$$

Loi d'échange

On dit qu'une paire de 2-cellules θ_1 et θ_2 dans une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
$$

satisfait la loi d'échange lorsque l'égalité

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend right, "G_1"'] & B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend right, "G_2"'] & C
\end{tikzcd}
$$

est satisfaite.

Autrement dit, l'ordre dans lequel on compose θ_1 et θ_2 est sans importance.

Exercice

Dans une sesqui-catégorie $\mathscr{D}$, on appelle **centrale à gauche** toute 2-cellule θ_2 telle que la loi d'échange

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend right, "g_1"'] & B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[d, dotted, no head] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] \arrow[d, dotted, no head] & C \arrow[d, dotted, no head] \\
A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend right, "g_2"'] & C
\end{tikzcd}
$$

est satisfaite pour toute transformation θ_1.

Montrer que les transformations naturelles coïncident avec les 2-cellules centrales à gauche, dans la sesqui-catégorie des catégories, foncteurs et transformations.

En déduire l'existence d'un foncteur:

$$\mathbf{Nat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

2-catégories

Une 2-catégorie $\mathscr{D}$ est une sesqui-catégorie telle que **la loi d'échange** est satisfaite par toute paire de 2-cellules

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & B \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & C \end{tikzcd}$$

2-catégories (définition alternative)

Une 2-catégorie $\mathscr{D}$ est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'une catégorie $\mathscr{D}(A,B)$ pour tout couple d'objets (A,B),

— d'un **foncteur** de composition $\circ : \mathscr{D}(B,C) \times \mathscr{D}(A,B) \longrightarrow \mathscr{D}(A,C)$

— d'une identité **identité** $id_A : \mathbb{1} \longrightarrow \mathscr{D}(A,A)$ pour tout objet A,

1— tel que $\circ$ soit associative, au sens où les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(C,D) \times \mathscr{D}(B,C) \times \mathscr{D}(A,B) \arrow[r, "\circ \times \mathscr{D}(A,B)"] \arrow[d, "\mathscr{D}(C,D) \times \circ"'] & \mathscr{D}(B,D) \times \mathscr{D}(A,B) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathscr{D}(C,D) \times \mathscr{D}(A,C) \arrow[r, "\circ"] & \mathscr{D}(A,D)
\end{tikzcd}$$

commute.

2— tel que id soit élément neutre de $\circ$ au sens où les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(A,B) \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\cong"'] & & \mathscr{D}(A,B) \\
\mathscr{D}(A,B) \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\mathscr{D}(A,B) \times id_A"] & & \mathscr{D}(A,B) \times \mathscr{D}(A,A) \arrow[u, "\circ"']
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(A,B) \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\cong"'] & & \mathscr{D}(A,B) \\
\mathbb{1} \times \mathscr{D}(A,B) \arrow[rr, "id_B \times \mathscr{D}(A,B)"] & & \mathscr{D}(B,B) \times \mathscr{D}(A,B) \arrow[u, "\circ"']
\end{tikzcd}$$

commutent pour tout A et B.

Notation: on écrit

$$\theta \quad : \quad f \quad \Rightarrow \quad g \quad : \quad A \longrightarrow B$$

quand

$$\theta \quad : \quad f \longrightarrow g$$

est un morphisme de la catégorie $\mathscr{D}(A,B)$.

Loi d'échange de Godement

Dans une 2-catégorie $\mathscr{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, les deux manières canoniques de composer les 2-cellules

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "f_1"] \arrow[r, "g_1" description] \arrow[r, bend right=60, "h_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\alpha_1"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\beta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, "f_2"] \arrow[r, "g_2" description] \arrow[r, bend right=60, "h_2"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\alpha_2"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\beta_2"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

commutent:

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1) \quad = \quad (\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

Suspension

$\boxed{\text{Nous verrons dans une prochaine séance la notion de catégorie monoïdale.}}$

Toute catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}$ peut être vue comme la 2-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$

— qui ne contient qu'une seule 0-cellule,

— dont les 1-cellules sont les 0-cellules de $\mathcal{C}$

— dont les 2-cellules sont les 1-cellules de $\mathcal{C}$

avec les lois de composition induites.

Une sesqui-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$ à un objet définit une catégorie prémonoidale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$.

Exemple: la 2-catégorie des ensembles et des relations

La 2-catégorie $\mathscr{Rel}$ est définie comme suit:

– ses 0-cellules (ou objets) sont les ensembles,

– ses 1-cellules (ou morphismes) sont les relations entre ensemble,

$$A \xrightarrow{f \cdot g} B \quad = \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

composées relationnellement:

$$a\,[f \cdot g]\,c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists b \in B, \qquad a\,[f]\,b \quad \text{et} \quad b\,[g]\,c.$$

– ses 2-cellules (ou cellules) sont données par inclusion:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \end{tikzcd} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \subseteq g$$

En particulier, les catégories $\mathscr{Rel}(A, B)$ sont des catégories de préordre.