

Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Octobre 2009

Plan de la séance

1 – Diagrammes de cordes

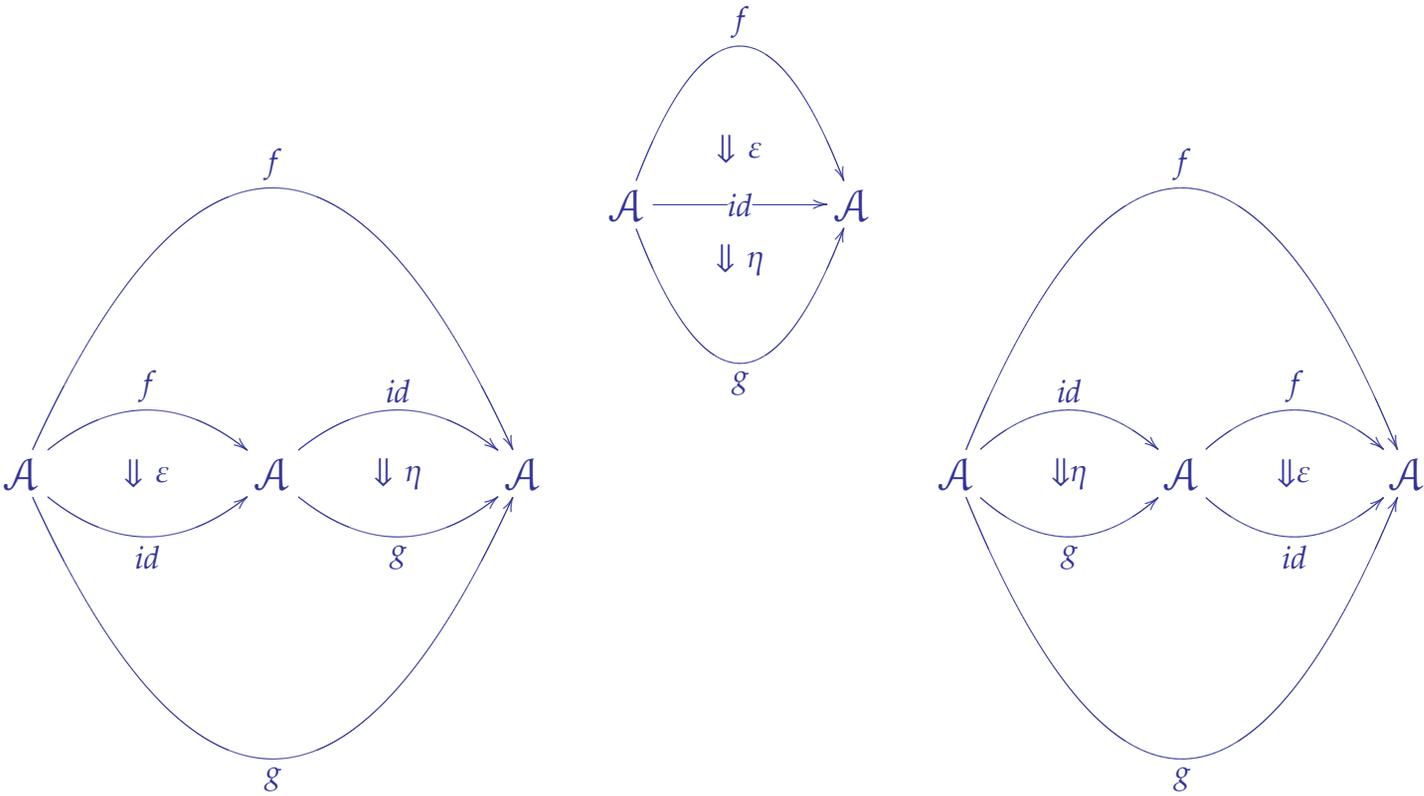
2 – Adjonctions

Première partie

Diagrammes de cordes

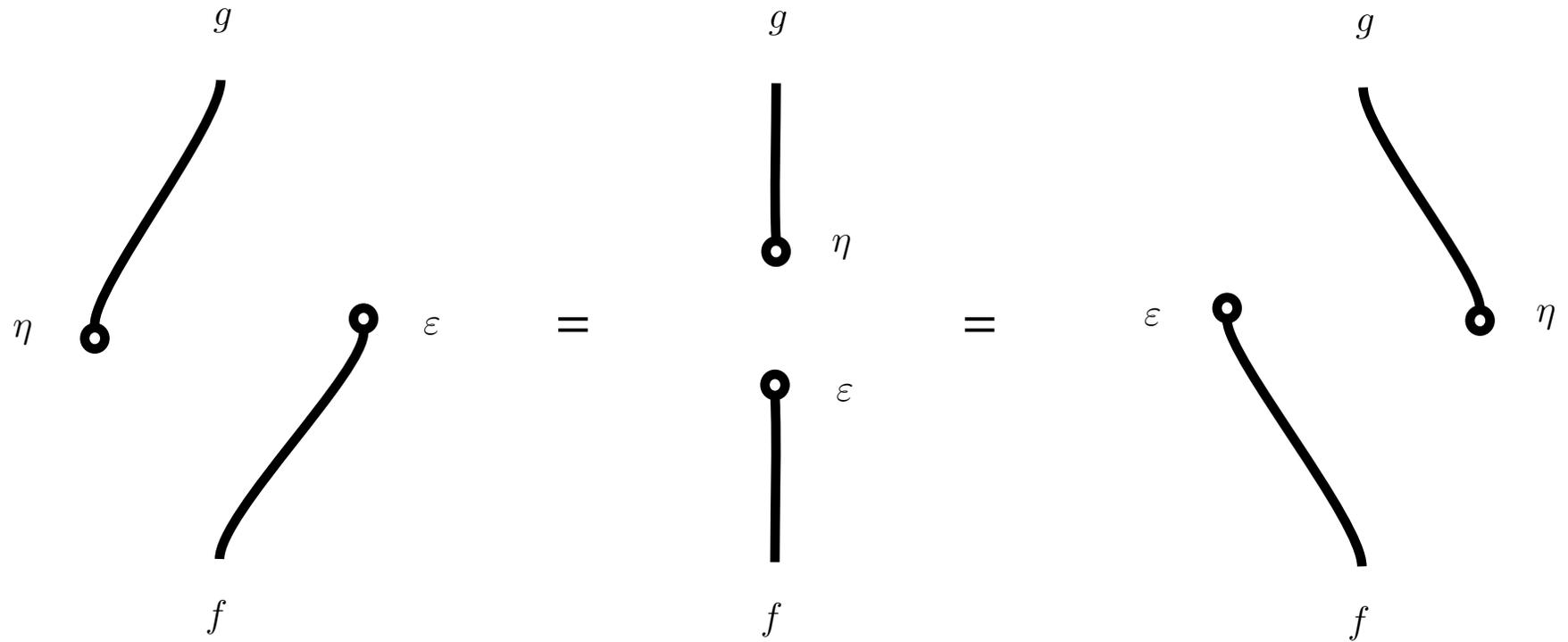
Une notation topologique pour les 2-cellules

Exemple



Ces trois cellules sont égales dans toute 2-catégorie...

Diagrammes de corde



Une représentation topologique obtenue par dualité de Poincaré

Deuxième partie

Adjonctions et monades

Adjonction

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories.

Une **adjonction** est un triplet (L, R, ϕ) où L et R sont deux foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets A dans \mathcal{A} et B dans \mathcal{B} ,

$$\phi_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \cong \mathcal{A}(A, RB)$$

naturelle en A et B . On écrit aussi:

$$\frac{LA \longrightarrow_{\mathcal{B}} B}{A \longrightarrow_{\mathcal{A}} RB} \quad \phi_{A,B}$$

Dans ce cas, on dit que L est **adjoint à gauche de** R , et on écrit $L \dashv R$.

La version 2-dimensionnelle d'isomorphisme.

La bijection ϕ est naturelle signifie ici...

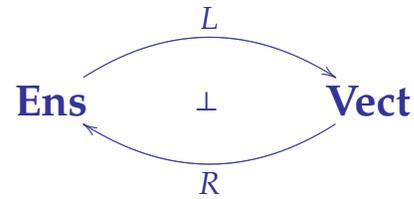
Naturelle en A et B signifie que la famille de bijections $\phi_{A,B}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{g} & B \\ \uparrow Lh_A & & \downarrow h_B \\ LA' & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_{A,B}(g)} & RB \\ \uparrow h_A & & \downarrow Rh_B \\ A' & \xrightarrow{\phi_{A',B'}(f)} & RB' \end{array}$$

Exemple: espace vectoriel libre



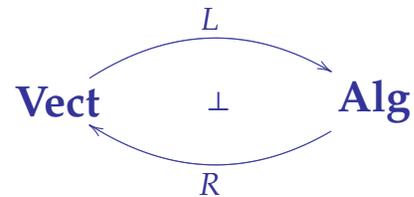
où

$\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$: la catégorie des ensembles et fonctions,
 $\mathcal{B} = \mathbf{Vect}$: la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k

R : le foncteur « d'oubli » $V \mapsto U(V)$
 L : le foncteur « libre » $X \mapsto kX$

$$kX := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in k \text{ presque partout nul.} \right\}$$

Exemple: algèbre libre



où

- $\mathcal{A} = \mathbf{Vect}$: la catégorie des espaces vectoriels
- $\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$: la catégorie des algèbres et morphismes d'algèbres,

- R : le foncteur « d'oubli » $A \mapsto U(A)$.
- L : le foncteur « libre » $V \mapsto TV$.

$$TV := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

Définition d'une algèbre de Lie

Espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'un crochet de Lie

Anti-symétrie:

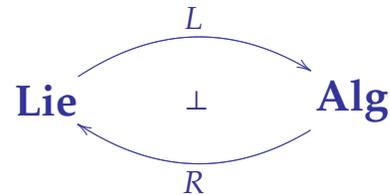
$$[x, y] = -[y, x]$$

Identité de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Exemple: l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur une variété lisse.

Exemple: algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie



où

$\mathcal{A} = \mathbf{Lie}$: la catégorie des algèbres de Lie,

$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$: la catégorie des algèbres,

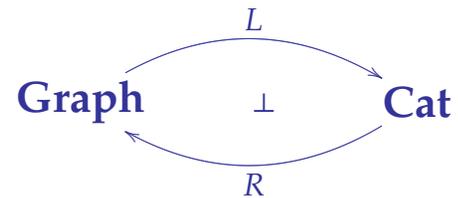
R : équivarient A du crochet de Lie $[a, b] = ab - ba$,

L : le foncteur « algèbre enveloppante » $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$.

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g} / I(\mathfrak{g})$$

où $I(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère engendré par $ab - ba - [a, b]$.

Exemple: catégorie libre

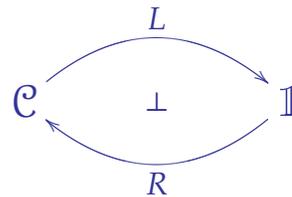


où

- $\mathcal{A} = \mathbf{Graph}$: la catégorie des graphes,
- $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$: la catégorie des catégories et foncteurs,

- R : le foncteur « d'oubli »,
- L : le foncteur « libre ».

Exemple : objet terminal



où

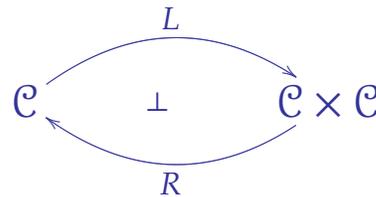
$\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal $\mathbb{1}$,

$\mathcal{B} = \mathbb{1}$: la catégorie singleton,

R : le foncteur dont l'image est l'objet terminal $\mathbb{1}$,

L : le foncteur canonique (et unique).

Exemple : catégorie cartésienne



où

- $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal 1 ,
- $\mathcal{B} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$: le produit cartésien de \mathcal{C} avec elle-même,

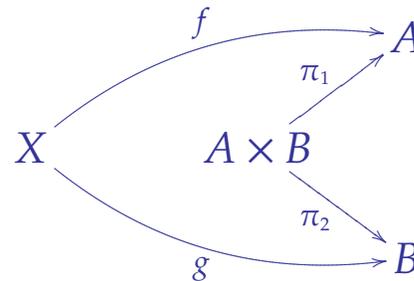
- R : le foncteur produit cartésien $(A, B) \mapsto A \times B$,
- L : le foncteur diagonal $A \mapsto (A, A)$.

Rappel: produit cartésien

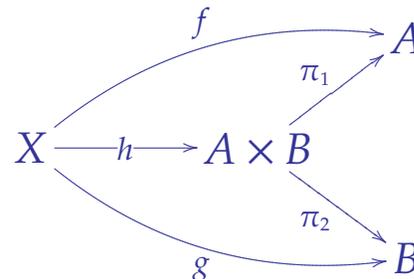
Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie \mathcal{C} , est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \quad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

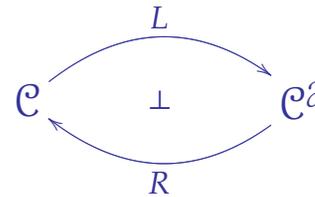


il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme



Exercice. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près.

Exemple : catégorie avec limites

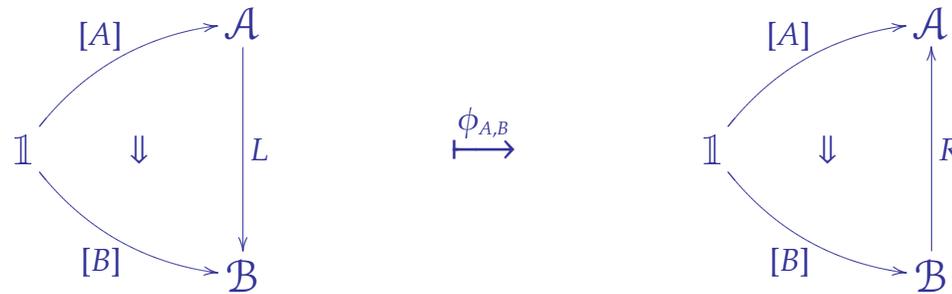


où

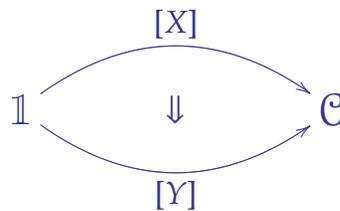
- $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: toute catégorie dotée d'un objet terminal 1 ,
- $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$: la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ des transformations naturelles de la catégorie d'indice \mathcal{J} dans la catégorie \mathcal{C} ,
- R : le foncteur limite $F \mapsto \mathbf{lim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)$,
- L : le foncteur diagonal $A \mapsto (j \mapsto A)$.

Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

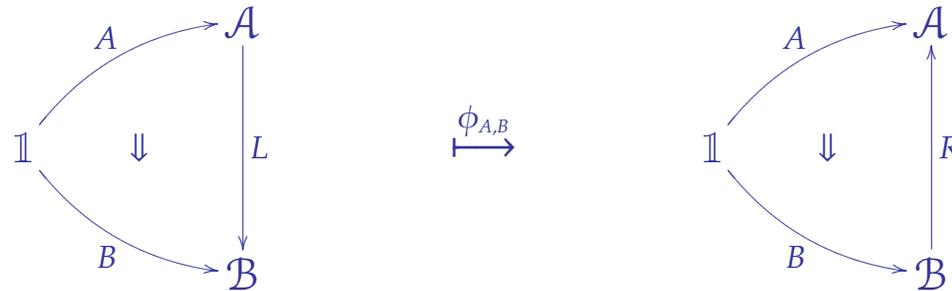


Ici, un morphisme $X \rightarrow Y$ dans la catégorie \mathcal{C} vu comme une transformation naturelle $[X] \rightarrow [Y]$.

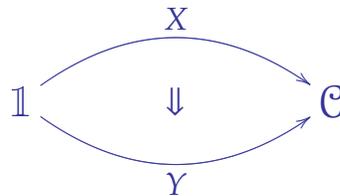


Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles



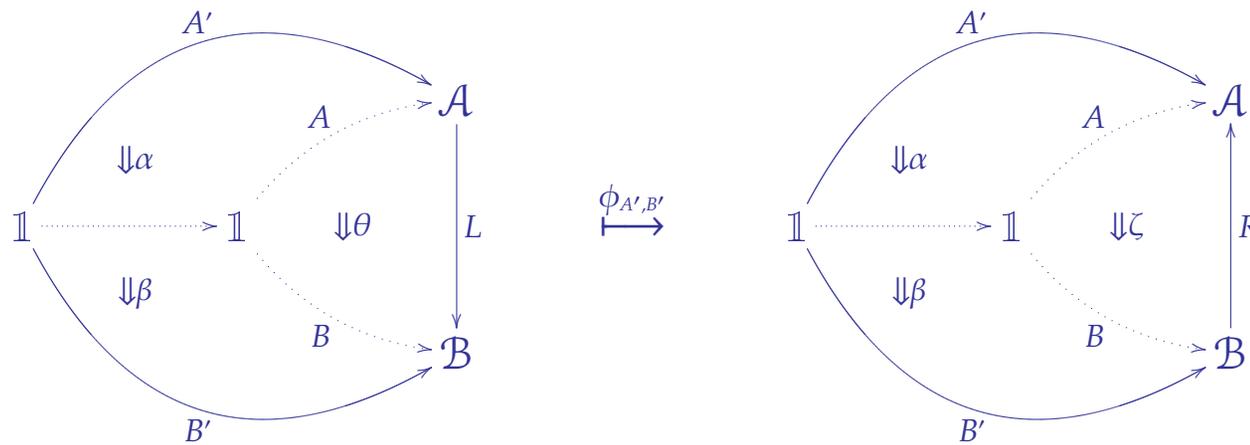
Ici, un morphisme $X \rightarrow Y$ dans la catégorie \mathcal{C}
vu comme une transformation naturelle $X \rightarrow Y$.



Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:

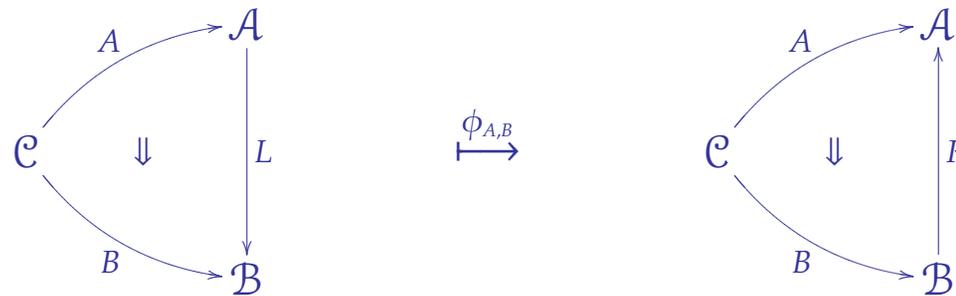
La bijection ϕ est naturelle en les transformations naturelles α et β .



Adjonction dans la 2-catégorie \mathbf{Cat}

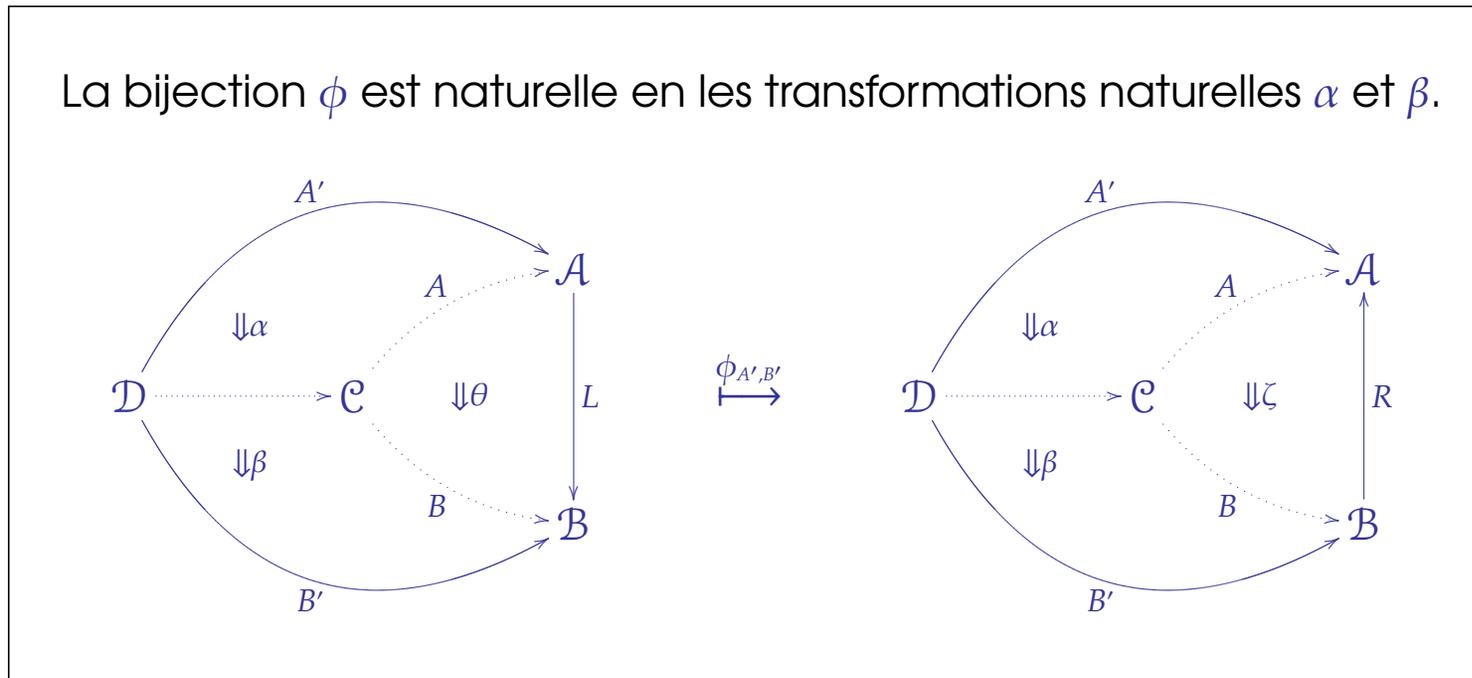
Ce point de vue 2-catégorique débouche sur une définition plus satisfaisante d'adjonction:

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles



Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:



Présentation algébrique de l'adjonction

Une **adjonction** est un quadruplet $(L, R, \eta, \varepsilon)$ où L et R sont des foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

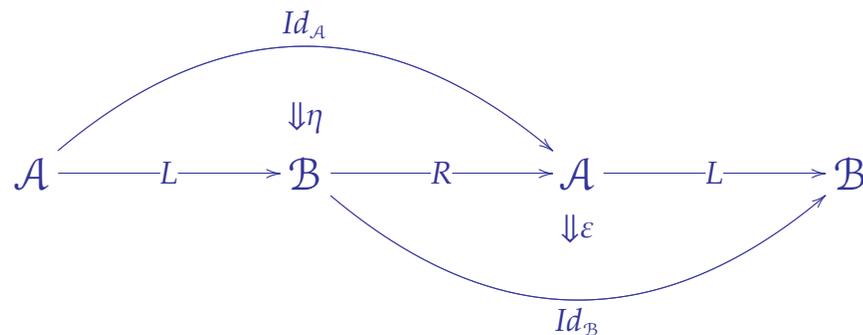
et η et ε des transformations naturelles:

$$\eta : Id_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cdot} RL \qquad \varepsilon : LR \xrightarrow{\cdot} Id_{\mathcal{B}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de L et R respectivement).

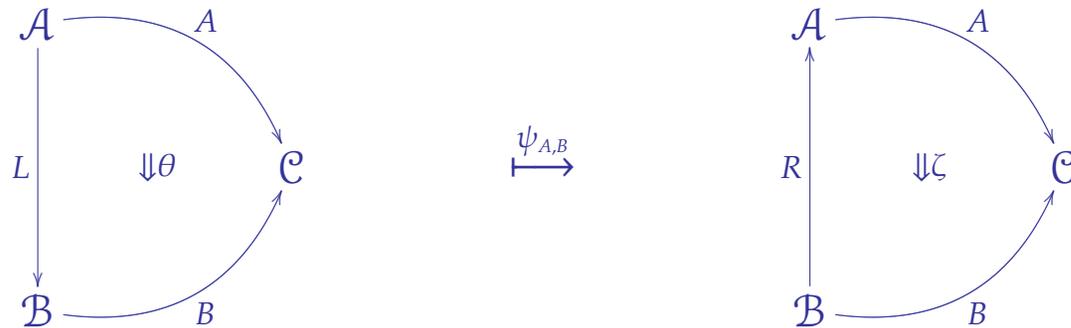
$$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R \qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$$

On dessine cette situation de la manière suivante:



Définition duale (mais équivalente) d'adjonction

Par dualité, la donnée d'une bijection ψ entre les ensembles de 2-cellules



bijection qu'on demande naturelle en A et B .

Exemple: dualité dans une catégorie monoïdale

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ une catégorie monoïdale.

Un objet A est dual à gauche d'un objet B lorsqu'il existe deux morphismes

$$\eta : e \longrightarrow B \otimes A \qquad \varepsilon : A \otimes B \longrightarrow e$$

tels que

$$A \xrightarrow{A \otimes \eta} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes A} A = A \xrightarrow{id_A} A$$

et

$$B \xrightarrow{\eta \otimes B} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{B \otimes \varepsilon} B = B \xrightarrow{id_B} B$$

A est dual à gauche à B dans \mathcal{C} ssi A est adjoint à gauche à B dans $\Sigma\mathcal{C}$.

Exemple: adjonctions dans la 2-catégorie \mathcal{Rel}

On peut appliquer la notion d'adjonction dans toute 2-catégorie.

Ainsi, toute adjonction dans \mathcal{Rel} est de la forme

$$\begin{array}{ccc} & f_* & \\ A & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \perp \\ \curvearrowleft \end{array} & B \\ & f^* & \end{array}$$

où

$$A \xrightarrow{f} B$$

est une fonction ensembliste, et

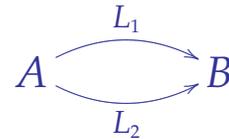
$$\begin{aligned} f_* &= \{ (a, b) \mid a = f(b) \} \\ f^* &= \{ (b, a) \mid b = f(a) \} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{array}{ll} \text{l'unité } \eta \text{ est inversible} & \text{ssi } f \text{ est injective.} \\ \text{la counité } \varepsilon \text{ est inversible} & \text{ssi } f \text{ est surjective.} \end{array}$$

Propriété

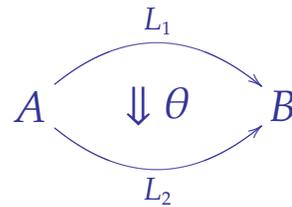
Supposons donnés deux morphismes



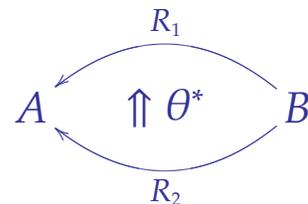
dans une 2-catégorie \mathcal{D} , adjoints à deux morphismes R_1 et R_2 :

$$L_1 \dashv R_1 \qquad L_2 \dashv R_2$$

Dans ce cas, toute cellule 2-dimensionnelle



définit une cellule 2-dimensionnelle



Exercice: définir l'opération $\theta \mapsto \theta^*$ en diagramme de cordes, et montrer que l'opération est fonctorielle, au sens où $(\theta_1 *_v \theta_2)^* = \theta_2^* *_v \theta_1^*$.