Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Novembre 2009

Plan de la séance

1 – Lambda-calcul avec effets

2 – Théorie formelle des monades

3 – Monades fortes

Première partie

Lambda-calcul avec effets

Un langage avec effets de bord

Lambda-calcul avec effets

Une notion de type étendue:

$$A, B ::= \alpha \mid A \rightharpoonup B \mid A \times B \mid T(A).$$

Deux nouvelles formes de séquents:

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : \; A$$

qui signifie que P et Q sont égaux et de type A, et

$$\Gamma \vdash P \downarrow \; A$$

qui signifie que P est sans effet de bord et de type A.

Conditions de bonne formation

A noter les conditions de bonne formation suivantes:

1. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

ne peut être valide que si les séquents

$$\Gamma \vdash P : A \qquad \text{et} \qquad \Gamma \vdash Q : A$$

sont valides.

2. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

ne peut être valide que si le séquent

$$\Gamma \vdash P : A$$

est valide.

Lambda-calcul avec effets

Variable	$\dfrac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightharpoonup B}$
Application	$\dfrac{\Gamma \vdash P : A \rightharpoonup B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\dfrac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$
Contraction	$\dfrac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\dfrac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

Lambda-calcul avec effets

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1\ P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2\ P : B}$$

Unité

$$\frac{}{\Gamma \vdash * : 1}$$

Lambda-calcul avec effets

Let
$$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash let\ x = P\ in\ Q : B}$$

[−]
$$\frac{\Gamma \vdash P : A}{\Gamma \vdash [P] : TA}$$

μ
$$\frac{\Gamma \vdash P : TA}{\Gamma \vdash \mu(P) : A}$$

Règles générales

$$\frac{}{x : A \vdash x \downarrow A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P : B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P \downarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] \downarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P_1 \equiv P_2\ B}{\Gamma, \Delta \vdash P_1[x := Q] \equiv P_2[x := Q]\ : B}$$

Règles pour la substitution

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x = P\ in\ x \quad \equiv \quad P \quad : \quad A$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x_2 = (let\ x_1 = Q_1\ in\ Q_2)\ in\ P \quad \equiv \quad let\ x_1 = Q_1\ in\ (let\ x_2 = Q_2\ in\ P) \quad : \quad A$$

lorsque la variable x_1 n'est pas libre dans P.

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x_1 = x_2\ in\ P \quad \equiv \quad P[x_1 := x_2] \quad : \quad A$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad P\vec{Q} \quad \equiv \quad let\ \vec{x} = \vec{Q}\ in\ P\vec{x} \quad : \quad A$$

Règles pour les types calculatoires

$$\Gamma \quad \vdash \quad [P] \;\downarrow\; TA$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad \mu([P]) \;\equiv\; P \quad : \quad A$$

$$x : A \quad \vdash \quad [\mu(x)] \;\equiv\; x \quad : \quad TA$$

Règles pour l'unité

$$\vdash \quad * \downarrow 1$$

$$x : 1 \quad \vdash \quad * \equiv x \quad : \quad 1$$

Règles pour le produit cartésien

$$x : A, y : B \quad \vdash \quad \langle x, y \rangle \;\downarrow\; A \times B$$

$$\Gamma, x : A \quad \vdash \quad \langle P, Q \rangle \;\equiv\; let\ x, y = P, Q\ in\ \langle x, y \rangle \quad : \quad A \times B$$

$$x : A_1 \times A_2 \quad \vdash \quad \pi_i(x) \;\downarrow\; A_i$$

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2 \quad \vdash \quad \pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) \;\equiv\; x_i \quad : \quad A_i$$

$$x : A \times B \quad \vdash \quad \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \;\equiv\; x \quad : \quad A \rightharpoonup B$$

Règles pour le λ-calcul

$$\Gamma \quad \vdash \quad (\lambda x.P) \quad \downarrow \quad A \rightharpoonup B$$

$$\Gamma, x : A \quad \vdash \quad (\lambda x.P)x \quad \equiv \quad P \quad : \quad B$$

$$x : A \rightharpoonup B, y : A \quad \vdash \quad \lambda y.xy \quad \equiv \quad x \quad : \quad A \rightharpoonup B$$

Deuxième partie

Théorie formelle des monades

Catégorie de Kleisli, catégorie d'Eilenberg-Moore

Monade formelle

Soit A une 0-cellule dans une 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Une monade s sur la 0-cellule A est une 1-cellule

$$s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une multiplication

$$\mu \quad : \quad s \circ s \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

et d'une unité

$$\eta \quad : \quad Id_A \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

satisfaisant les lois d'associativité et d'unité.

Autrement dit, une monade s est un monoïde de la catégorie monoïdale $\mathcal{B}(A, A)$.

Toute adjonction définit une monade

(démonstration graphique)

Algèbre

Une algèbre de la monade (T, μ, η) est une paire (A, h) constituée

— d'un objet A morphisme

— d'un morphisme

$$h \quad : \quad TA \longrightarrow A$$

faisant commuter

$$\begin{tikzcd} & TA \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[rr, "id"'] & & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "Th"'] & TA \arrow[d, "h"] \\ TA \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

Morphismes d'algèbre

Un morphisme d'algèbre

$$f \quad : \quad (A, h_A) \longrightarrow (B, h_B)$$

est un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

entre les objets sous-jacents dans la catégorie $\mathcal{C}$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_A"'] & TB \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute.

Catégorie de Kleisli

La catégorie de Kleisli $\mathcal{C}_T$ d'une monade (T, μ, η) sur une catégorie $\mathcal{C}$ a

— pour objets les objets de $\mathcal{C}$,

— pour morphismes $A \to B$ les morphismes de $A \longrightarrow TB$ dans la catégorie $\mathcal{C}$,

Les identités $A \to A$ sont données par les morphismes

$$\eta_A \quad : \quad A \longrightarrow TA.$$

On compose $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de la manière suivante:

$$g \circ_K f \quad := \quad \begin{tikzcd} & & & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ & & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \\ & A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Exercice

Montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Remarque: la démonstration d'associativité de la loi de composition amène à considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & T^3D \arrow[d, "T\mu"'] \\
 & & T^2C \arrow[ur, "T^2h"] \arrow[d, "\mu"'] & T^2D \arrow[d, "\mu"] \\
 & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \arrow[ur, "Th"] & TD \\
A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & C \arrow[ur, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\mathcal{C}$, et de vérifier que les deux morphismes de A à TD coincident.

Principe de représentation

Toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X,t) \quad : \quad \mathcal{B}(X,A) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(X,A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \qquad \mapsto \qquad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Vérifier que $\mathcal{B}(X,t)$ définit bien une monade sur $\mathcal{B}(X,A)$.

Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t, X) \quad : \quad \mathcal{B}(A, X) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A, X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \qquad \mapsto \qquad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Montrer que $\mathcal{B}(t, X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$.

Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens 2-catégorique)

$$s \;:\; A \longrightarrow A \qquad t \;:\; B \longrightarrow B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s,t) \quad : \quad \mathcal{B}(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \mapsto \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[u, "s"] & B \end{tikzcd}$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Objet de Eilenberg-Moore

Le 2-foncteur

$$\boxed{X \quad \mapsto \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A \quad)^{\mathcal{B}(A,t)} \quad : \quad \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{Cat}}$$

est 2-représentable par un objet A^t de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\boxed{\phi_{X,A} \quad : \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A \quad)^{\mathcal{B}(X,t)} \quad \cong \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A^t \quad)}$$

2-naturel en X.

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 1-cellule

$$X \xrightarrow{f} Y$$

le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A^t)"] \\
\mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t)
\end{tikzcd}$$

commute.

$\mathcal{B}(f,t)$ désigne ici le morphisme de monade $\mathcal{B}(Y,t) \longrightarrow \mathcal{B}(X,t)$ induit par f

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 2-cellule

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & Y \end{tikzcd}$$

les transformations naturelles induites

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A)^{\mathcal{B}(g,t)}"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow"] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A^t)"] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A^t)"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A^t)"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow"] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \end{tikzcd}$$

coincident.

Objet de Eilenberg-Moore

L'isomorphisme ϕ_{A^t,A^t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A^t} \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

une 1-cellule

$$u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd} & t \circ u^t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{u}"] & \\ u^t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & u^t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \circ t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "t\circ\tilde{u}"'] & t \circ u^t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{u}"] \\ t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{u}"'] & u^t \end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur d'oubli u^t et la transformation naturelle $\tilde{u}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{f}$ munissant la 1-cellule f d'une structure de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$X \xrightarrow{\overline{f}} A^t$$

telle que $\tilde{f}$ se décompose en $\overline{f}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{u}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[r, "\overline{f}"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Remarque: la 1-cellule $\overline{f}$ est définie comme l'image de $(f, \tilde{f})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad f \quad \Rightarrow \quad g \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre entre $(f,\tilde{f})$ et $(g,\tilde{g})$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, ""'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[d, no head, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{g}"] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, bend right, "g"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, no head, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{f}"] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{f} \quad \Rightarrow \quad \overline{g} \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A^t$$

telle que θ se décompose en $\overline{\theta}$ suivi de la 1-cellule u^t

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\overline{f}"] \arrow[r, bend right, "\overline{g}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\theta}"] & A^t \arrow[r, "u^t"] & A \end{tikzcd}$$

Remarque: la 2-cellule $\overline{\theta}$ est l'image de $\theta : (f,\tilde{f}) \Rightarrow (g,\tilde{g})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(A^t, t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

la caractérisent comme objet de Eilenberg-Moore associé à la monade t.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Noter que la 2-cellule $\tilde{u}$ fait bien partie de la définition d'objet d'Eilenberg-Moore: elle reflète la famille de foncteurs ϕ incluse dans la notion de 2-représentation.

Construction: le foncteur libre

La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(A,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A \xrightarrow{f^t} A^t$$

telle que

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & \\ & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[r, "f^t"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur f^t coïncide avec le foncteur libre.

Adjonction $f^t \dashv u^t$ associée

L'unité η de l'adjonction $f^t \dashv u^t$ est définie par l'unité de la monade t

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & A \\ & A^t \arrow[ur, "u^t"'] & \end{tikzcd} \quad := \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[rr, bend right=80, "t"'] & \Downarrow \eta & A \end{tikzcd}$$

tandis que la counité ε est définie comme l'unique 2-cellule

$$\varepsilon \quad : \quad f^t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad id \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

satisfaisant l'égalité

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f^t"] & & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "t"] & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & A \end{tikzcd}$$

Egalités triangulaires (1)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "f^t"] & & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & A
\end{tikzcd}
$$

et cette seconde égalité de la définition de f^t

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "id"'] & & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\mu"] & A
\end{tikzcd}
$$

On en déduit que la 2-cellule considérée au départ vaut l'identité, et on conclut par propriété de relèvement (unique) sur la 2-cellule u^t

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "f^t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A^t
\end{tikzcd}
\quad = \quad id
$$

Egalités triangulaires (2)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f^t"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & A \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \eta"] \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[r, "id"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "t"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & A \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \eta"] \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[r, "u^t"'] & A \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}
$$

On conclut que

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f^t"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & A \arrow[dl, phantom, "\Downarrow \eta"] \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[r, "id"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad id
$$

par le fait que la 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définit une algèbre de la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$.

Décomposition de la monade t

L'adjonction

$$f^t \dashv u^t$$

a la monade t pour monade associée.

Démonstration: tout d'abord,

$$t \qquad = \qquad f^t \quad \circ \quad u^t$$

par définition de f^t. Ensuite, l'unité η de l'adjonction coïncide par définition avec l'unité de la monade t. Pour finir, la multiplication

$$u^t \circ f^t \circ u^t \circ f^t \quad \Rightarrow \quad u^t \circ f^t$$

induite par l'adjonction s'écrit

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

et coïncide bien avec la multiplication de la monade, par définition de f^t.

1-cellule entre monades

Une 1-cellule entre deux monades

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "s"'] & \longrightarrow & B \arrow[d, "t"] \\ A & & B \end{tikzcd}$$

est la donnée d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute

1-cellule entre monades

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] \arrow[d, phantom, "\eta \Rightarrow"'] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] \arrow[d, phantom, "\eta \Rightarrow"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "s"] & B \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[dr, "s"'] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & & \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "s"'] & & B \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & B \arrow[dr, "t"] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & \\
& A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

Notion élémentaire de morphisme entre monade.

1-cellule entre adjonctions

Une 1-cellule entre deux adjonctions

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
Y \arrow[u, bend right, "r"']
\end{tikzcd}
\qquad \longrightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
B \arrow[u, bend right, "u"']
\end{tikzcd}
$$

est la donnée de deux 1-cellules

$$h_1 \quad : \quad X \longrightarrow A \qquad\qquad h_2 \quad : \quad Y \longrightarrow B$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "l"'] & A \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h_2"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "l"'] & B \arrow[d, "u"] \\
X \arrow[r, "h_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

1-cellule entre adjonctions

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "id"'] & & A \arrow[dr, "f"] & \\
\arrow[r, phantom, "\eta \Rightarrow"] & Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"] & & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] & & A &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[dd, "id"'] & A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "id"'] & \\
& \arrow[r, phantom, "\eta \Rightarrow"] & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[r, "h_1"] & A &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] & & B \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"'] & & A \arrow[dr, "f"] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Rightarrow"] & \\
& Y \arrow[rr, "h_2"] & & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] \arrow[dd, "id"] & B \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[dr, "l"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Rightarrow"] & & \\
& Y \arrow[r, "h_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

Toute 1-cellule d'adjonction induit une 1-cellule de monade.

Propriété universelle de l'objet d'Eilenberg-Moore

Réciproquement, supposons donnée une adjonction

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "l"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Y \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Pour toute 1-cellule entre monades

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r \circ l"'] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule entre adjonctions

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & A \arrow[d, bend right, "f^t"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ Y \arrow[u, bend right, "r"'] \arrow[rr, "h_2"] & & A^t \arrow[u, bend right, "u^t"'] \end{tikzcd}$$

telle que la 1-cellule h_1 coïncide avec la 1-cellule h.

Extension de Kan à droite

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Cat} & \\
\mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f^t \dashv u^t"']
\end{tikzcd}$$

Monades	:	2-catégorie théorie des monades
Adjonctions	:	2-catégorie théorie des adjonctions
t	:	2-foncteur associé à la monade t
$f^t \dashv u^t$	:	2-foncteur associé à l'adjonction $f^t \dashv u^t$

Objet de Kleisli

Le 2-foncteur

$$\boxed{X \quad \mapsto \quad \mathcal{B}(\quad A \quad , \quad X \quad)^{\mathcal{B}(t,X)} \quad : \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Cat}}$$

est 2-représentable par un objet A_t.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\boxed{\psi_{A,X} \quad : \quad \mathcal{B}(\quad A \quad , \quad X \quad)^{\mathcal{B}(t,X)} \quad \cong \quad \mathcal{B}(\quad A_t \quad , \quad X \quad)}$$

2-naturel en X.

Objet de Kleisli

L'isomorphisme ψ_{A_t,A_t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A_t} \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad A_t$$

une 1-cellule

$$f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad f_t \circ t \quad \Rightarrow \quad f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(t, A_t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd} & f_t \circ t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{f}"] & \\ f_t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & f_t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_t \circ t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f} \circ t"'] & f_t \circ t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f}"] \\ f_t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"'] & f_t \end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur libre f_t et la transformation naturelle $\tilde{f}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{g}$ munissant la 1-cellule g d'une structure de $\mathcal{B}(t,X)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "g"] & & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{g}"] & & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$\begin{tikzcd}
A_t \arrow[r, "\overline{g}"] & X
\end{tikzcd}$$

telle que $\tilde{g}$ se décompose en $\overline{g}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{f}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{g}"] & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "f_t"] & & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & A_t \arrow[r, "\overline{g}"] & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "f_t"'] & &
\end{tikzcd}$$

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad g_1 \quad \Rightarrow \quad g_2 \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad X$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre entre $(g_1, \tilde{g}_1)$ et $(g_2, \tilde{g}_2)$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \tilde{g}_2"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \tilde{g}_1"] & X
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{g}_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{g}_2 \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad X$$

telle que θ se décompose en la 1-cellule u^t suivie de $\overline{\theta}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "\overline{g}_1"] \arrow[r, bend right, "\overline{g}_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_t"] & A_t \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \overline{\theta}"] & X
\end{tikzcd}$$

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(t, A_t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rd, bend left, "f_t"] & \\
 & A_t \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ru, bend right, "f_t"'] \arrow[ru, phantom, shift left=6ex, "\Downarrow \tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

la caractérisent comme objet de Kleisli associé à la monade t.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Ici encore, noter que la 2-cellule $\tilde{f}$ fait partie de la définition d'objet de Kleisli.

Construction: le foncteur d'oubli

La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(t,A)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, bend left, "t"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\ & A \\ A \arrow[ur, bend right, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A_t \xrightarrow{u_t} A$$

telle que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, bend left, "t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\ & A \\ A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "t"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[dr, bend left, "f_t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{f}"] & & \\ & A_t \arrow[r, "u_t"] & A \\ A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "f_t"'] & & \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur u_t coïncide avec le foncteur d'oubli.

Extension de Kan à gauche

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Cat} & \\
\mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f_t \dashv u_t"']
\end{tikzcd}$$

Monades	:	2-catégorie théorie des monades
Adjonctions	:	2-catégorie théorie des adjonctions
t	:	2-foncteur associé à la monade t
$f_t \dashv u_t$	:	2-foncteur associé à l'adjonction $f_t \dashv u_t$

Troisième partie

Monades fortes

Interprétation catégorique du lambda-calcul avec effets

Monade forte

Une monade est forte lorsqu'elle est équippée d'une famille de morphismes

$$t_{A,B} \quad : \quad A \times TB \quad \longrightarrow \quad T(A \times B)$$

naturelle en A et B, et telle que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times TC \arrow[rr, "t_{A\times B,C}"] \arrow[dr, "A\times t_{B,C}"'] & & T(A \times B \times C) \\
& A \times T(B \times C) \arrow[ur, "t_{A,B\times C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \times TA \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "t"'] & & TA \\
& T(1 \times A) \arrow[ur, "T\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

Monade forte

$$
\begin{tikzcd}
A \times TTB \arrow[r, "t"] \arrow[d, "A\times\mu"'] & T(A \times TB) \arrow[r, "Tt"] & TT(A \times B) \arrow[d, "\mu"] \\
A \times TB \arrow[rr, "t"] & & T(A \times B)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "id"] \arrow[d, "A\times\eta"'] & A \times B \arrow[d, "\eta"] \\
A \times TB \arrow[r, "t"] & T(A \times B)
\end{tikzcd}
$$

Modèle catégorique du λ-calcul avec effets

Une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$ munie d'une monade forte

$$(T, \mu, \eta, t)$$

avec une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "A\times-"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C}_T \arrow[ll, bend left, "A\Rightarrow T(-)"] \end{tikzcd}$$

pour tout objet A, ceci induisant une bijection

$$\varphi_{A,B,C} \quad : \quad \mathcal{C}_T(A \times B, C) \quad \cong \quad \mathcal{C}(B, A \Rightarrow TC)$$

naturelle en B et C.

Interprétation des types du λ-calcul avec effets

$$\begin{aligned}
[\![A \rightharpoonup B]\!] &= [\![A]\!] \Rightarrow T\,[\![B]\!] \\
[\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![TA]\!] &= T\,[\![A]\!]
\end{aligned}$$

Interprétation des séquents

Tout séquent

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \quad \vdash \quad P \quad : \quad B$$

est interprété par un morphisme

$$[\![A_1 \times \cdots \times A_n]\!] \quad \longrightarrow \quad [\![B]\!]$$

de la catégorie de kleisli associée à la monade T, autrement dit,

$$[\![A_1 \times \cdots \times A_n]\!] \quad \longrightarrow \quad T\,[\![B]\!]$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de l'abstraction

Abstraction $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightharpoonup B}$

La règle transforme le morphisme

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$ en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi_{\Gamma,A,B}(f)} A \Rightarrow TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de l'application

La règle

$$\text{Application} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \rightharpoonup B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} A \Rightarrow TB$$

et

$$\Delta \xrightarrow{g} TA$$

en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{g \times f} TA \times (A \Rightarrow TB) \xrightarrow{t} T(A \times (A \Rightarrow TB)) \xrightarrow{T(eval)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation du let

La règle

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash let\ x = P\ in\ Q : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} TA$$

et

$$A \times \Delta \xrightarrow{g} TB$$

en le morphisme

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times \Delta} TA \times \Delta \xrightarrow{t} T(A \times \Delta) \xrightarrow{T(g)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de la paire

On doit choisir une ordre d'implémentation pour la paire

$$\langle P, Q\rangle$$

On choisit typiquement l'ordre gauche-droite, induit par le morphisme

$$TA \times TB \quad \longrightarrow \quad T(A \times TB) \quad \longrightarrow \quad TT(A \times B) \quad \xrightarrow{\mu} \quad T(A \times B).$$

Quatrième partie

Monade d’état

Une présentation algébrique

La monade d'état

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec les produits et les coproduits dénombrables, on définit

$$T \quad : \quad X \quad \mapsto \quad (S \otimes X)^S$$

avec

$$S \otimes X \quad := \quad \bigoplus_{s \in S} X \qquad\qquad Y^S \quad := \quad \prod_{s \in S} Y$$

où l'ensemble des états S est défini comme l'ensemble des fonctions

$$S \quad = \quad V^L$$

de l'ensemble des adresses mémoire L à l'ensemble des valeurs V.

La catégorie de kleisli associée

Rappel : un morphisme

$$X \xrightarrow{k} Y$$

dans la catégorie de kleisli est défini comme un morphisme

$$X \longrightarrow (S \otimes Y)^S$$

dans la catégorie $\mathcal{C}$, que l'on peut aussi voir comme un morphisme

$$S \otimes X \longrightarrow S \otimes Y$$

de cette même catégorie $\mathcal{C}$.

Un objet avec état global

Un objet A muni d'un morphisme de "lecture"

$$\texttt{lecture} \quad : \quad A^V \quad \longrightarrow \quad A^L$$

ainsi que d'un morphisme d' "écriture"

$$\texttt{ecriture} \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A^{L \times V}$$

qui vérifient une série de lois décrivant les propriétés algébriques de la lecture et de l'écriture dans l'espace mémoire.

Interaction 1

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\texttt{ecriture}"] \arrow[d, "A^{terminal}"'] & A^{L\times V} \arrow[r, "\cong"] & (A^V)^L \arrow[d, "\texttt{lecture}^L"] \\
A^L & A^{L\times L} \arrow[l, "A^{diag}"] & (A^L)^L \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

$$\texttt{lecture}_{loc}\,(v \mapsto \texttt{ecriture}_{loc,v}(x)) \quad = \quad x$$

Interaction 2

$$
\begin{tikzcd}
(A^V)^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}^V"] \arrow[d, "\cong"'] & (A^L)^V \arrow[r, "\cong"] & (A^V)^L \arrow[d, "\mathtt{lecture}^L"] \\
A^{V\times V} \arrow[dd, "A^{diag}"'] & & (A^L)^L \arrow[dd, "\cong"] \\
& & \\
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}"'] & A^L & A^{L\times L} \arrow[l, "A^{diag}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathtt{lecture}_{loc}\,(v' \mapsto \mathtt{lecture}_{loc}\,(v \mapsto t[v,v'])) \quad = \quad \mathtt{lecture}_{loc}\,(v \mapsto t[v,v])$$

Interaction 3

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathtt{ecriture}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}"'] & A^{L\times V} \arrow[r, "\mathtt{ecriture}^{L\times V}"] & (A^{L\times V})^{L\times V} \arrow[d, "\cong"] \\
A^{L\times V} \arrow[r, "A^{L\times \pi_1}"'] & A^{L\times V\times V} & A^{L\times L\times V\times V} \arrow[l, "A^{diag\times V\times V}"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathtt{ecriture}_{loc,v}\ (\mathtt{ecriture}_{loc,v'}\ (x)) \quad = \quad \mathtt{ecriture}_{loc,v'}(x)$$

Interaction 4

$$\begin{tikzcd}
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}^V"'] & A^L \arrow[r, "\mathtt{ecriture}^L"] & (A^{L\times V})^L \arrow[d, "A^{diag\times V}"] \\
(A^{L\times V})^V \arrow[rr, "A^{L\times diag}"'] & & A^{L\times V}
\end{tikzcd}$$

$$\mathtt{ecriture}_{loc,v}\,(\mathtt{lecture}_{loc}\,(v' \mapsto t[v'])) \quad = \quad \mathtt{ecriture}_{loc,v}\,(t[v])$$

Commutation 1

$$
\begin{tikzcd}
(A^V)^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}^V"] \arrow[ddd, "A^{\mathbf{swap}}"] & (A^L)^V \arrow[r, "\cong"] & (A^V)^L \arrow[r, "\mathtt{lecture}^L"] & (A^L)^L \arrow[d, "A^{\mathbf{swap}}"] \\
 & & & A^{L\times L} \arrow[d, "A^{\mathbf{different}}"] \\
 & & & A^{L_2} \\
(A^V)^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}^V"'] & (A^L)^V \arrow[r, "\cong"'] & (A^V)^L \arrow[r, "\mathtt{lecture}^L"'] & A^{L\times L} \arrow[u, "A^{\mathbf{different}}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto t[v,v'])) \ = \ \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto \mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto t[v,v']))$$

où $loc \neq loc'$

Commutation 2

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathtt{ecriture}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}"'] & A^{L\times V} \arrow[r, "\mathtt{ecriture}^{L\times V}"] & (A^{L\times V})^{L\times V} \arrow[r, "A^{swap}"] & (A^{L\times V})^{L\times V} \arrow[d] \\
A^{L\times V} \arrow[rr, "\mathtt{ecriture}^{L\times V}"] & & (A^{L\times V})^{L\times V} \arrow[r] & A^{L_2\times V\times V}
\end{tikzcd}$$

$$\mathtt{ecriture}_{loc,v}\ \mathtt{ecriture}_{loc',v'}\ x \quad = \quad \mathtt{ecriture}_{loc',v'}\ \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ x$$

où $loc \neq loc'$

Commutation 3

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}^V"'] & A^L \arrow[r, "\mathtt{ecriture}^L"] & (A^{L\times V})^L \arrow[r, "\cong"] & (A^L)^{L\times V}) \arrow[d] \\
(A^{L\times V})^V \arrow[r, "\cong"'] & (A^V)^{L\times V} \arrow[r, "\mathtt{lecture}^{L\times V}"'] & (A^L)^{L\times V} \arrow[r] & A^{L_2\times V}
\end{tikzcd}$$

$$\mathtt{ecriture}_{loc,v}\ \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto t[v']) \quad = \quad \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ t[v'])$$

où $loc \neq loc'$

La catégorie des objets avec états globaux

Soit la catégorie $GS(\mathcal{C})$

– dont les objets sont les objets avec état global,

– dont les morphismes sont les morphismes qui préservent la structure d'état global.

Théorème (Plotkin, Power)

La catégorie $GS(\mathcal{C})$ est équivalente à la catégorie des algèbres de la monade d'état.

Lemme préparatoire

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "A^{terminal}"] \arrow[dr, "A^{terminal}"'] & A^L \arrow[d, "\mathtt{lecture}"] \\ & A^V \end{tikzcd}$$

commute pour tout objet $(A, \mathtt{lecture}, \mathtt{ecriture})$ avec état global.

Lemme préparatoire

Pour tout objet X de la catégorie $\mathcal{C}$, on munit l'objet $(S \otimes X)^S$ des morphismes

$$\begin{array}{lcccc} \texttt{ecriture} & : & (S \otimes X)^S & \longrightarrow & ((S \otimes X)^S)^{L \times V} \\ \texttt{lecture} & : & ((S \otimes X)^S)^V & \longrightarrow & ((S \otimes X)^S)^L \end{array}$$

définis comme suit:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{ecriture}(loc, v, x) & : & \sigma \mapsto x(\sigma[v/loc]) \\ \texttt{lecture}(loc, v \mapsto x(v)) & : & \sigma \mapsto x(\sigma(loc))(\sigma) \end{array}$$

Cela définit une structure d'état global sur l'objet $(S \otimes X)^S$.

On rappelle les notations: $\sigma \in S = V^L$ et $x \in (S \otimes X)^S$.

Etapes de démonstration du théorème

1. Montrer que le foncteur d'oubli

$$GS(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

a un foncteur adjoint à gauche

$$X \mapsto (S \otimes X)^S$$

où l'objet $(S \otimes X)^S$ est muni de la structure d'état global définie plus haut.

2. Appliquer le théorème de caractérisation de Beck (non étudié en cours).

Présentation alternative

Idée: faire de la présentation précédente une théorie proprement algébrique.

Un objet avec mémoire globale est un objet muni de deux familles d'opérations:

– une opération V-aire pour chaque adresse loc de cellule mémoire:

$$\texttt{lecture}_{loc} \quad : \quad A^V \quad \longrightarrow \quad A$$

– une opération unaire pour chaque paire d'adresse loc et de valeur val:

$$\texttt{ecriture}_{loc,val} \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

qui vérifient les sept équations suivantes.

1. annihilation lecture - écriture

$$\begin{tikzcd} & A^V \arrow[dr, "\mathtt{lecture}_{loc}"] & \\ A \arrow[ur, "\mathtt{ecriture}_{loc,V}"] \arrow[rr, "id"] & & A \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathtt{lecture}_{loc}\ (val \mapsto \mathtt{ecriture}_{loc,val}(x)) \quad = \quad x}$$

Le morphisme $\texttt{ecriture}_{loc,V} : A \longrightarrow A^V$

$$\begin{tikzcd}
& A^V \arrow[dr, "A^{\mathbf{val}}"] & \\
A \arrow[ur, "\texttt{ecriture}_{loc,V}"] \arrow[rr, "\texttt{ecriture}_{loc,val}"] & & A
\end{tikzcd}$$

for every value $val \in V$, where $A^{\mathbf{val}} : A^V \longrightarrow A$ is the val-th projection of A^V over A.

2. interaction lecture - lecture

$$\begin{tikzcd} A^{V\times V} \arrow[r, "\mathtt{lecture}^{V}_{loc}"] \arrow[d, "A^{\mathbf{diag}}"'] & A^{V} \arrow[d, "\mathtt{lecture}_{loc}"] \\ A^{V} \arrow[r, "\mathtt{lecture}_{loc}"'] & A \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathtt{lecture}_{loc}\ (v' \mapsto \mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto t[v,v'])) \\ = \\ \mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto t[v,v]) \end{array}}$$

3. interaction écriture - écriture

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\texttt{ecriture}_{loc,val}"] & \\
A \arrow[ur, "\texttt{ecriture}_{loc,val'}"] \arrow[rr, "\texttt{ecriture}_{loc,val'}"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \texttt{ecriture}_{loc,val}\ (\texttt{ecriture}_{loc,val'}\ (x)) \\ = \\ \texttt{ecriture}_{loc,val'}(x) \end{array}}$$

4. interaction écriture - lecture

$$\begin{tikzcd}
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}_{loc}"] \arrow[d, "A^{\mathbf{val}}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{ecriture}_{loc,val}"] \\
A \arrow[r, "\mathtt{ecriture}_{loc,val}"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ (\mathtt{lecture}_{loc}\ (v' \mapsto t[v'])) \\ = \\ \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ (t[v]) \end{array}}$$

5. commutation lecture - lecture

$$
\begin{tikzcd}
(A^V)^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}^V"] \arrow[ddd, "A^{\mathbf{swap}}"] & (A^L)^V \arrow[r, "\cong"] & (A^V)^L \arrow[r, "\mathtt{lecture}^L"] & (A^L)^L \arrow[d, "A^{\mathbf{swap}}"] \\
 & & & A^{L\times L} \arrow[d, "A^{\mathbf{different}}"] \\
 & & & A^{L_2} \\
(A^V)^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}^V"'] & (A^L)^V \arrow[r, "\cong"'] & (A^V)^L \arrow[r, "\mathtt{lecture}^L"'] & A^{L\times L} \arrow[u, "A^{\mathbf{different}}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{c}
\mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto t[v,v'])) \\
= \\
\mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto \mathtt{lecture}_{loc}\ (v \mapsto t[v,v'])) \\
\\
\text{when } loc \neq loc'
\end{array}
}
$$

6. commutation écriture - écriture

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathtt{ecriture}_{loc,val}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}_{loc',val'}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{ecriture}_{loc',val'}"] \\
A \arrow[r, "\mathtt{ecriture}_{loc,val}"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ \mathtt{ecriture}_{loc',v'}\ x \\ = \\ \mathtt{ecriture}_{loc',v'}\ \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ x \\ \\ \text{when } loc \neq loc' \end{array}}$$

7. commutation écriture - lecture

$$\begin{tikzcd}
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}_{loc'}"] \arrow[d, "\mathtt{ecriture}^V_{loc,val}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{ecriture}_{loc,val}"] \\
A^V \arrow[r, "\mathtt{lecture}_{loc'}"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto t[v']) \\ = \\ \mathtt{lecture}_{loc'}\ (v' \mapsto \mathtt{ecriture}_{loc,v}\ t[v']) \\ \\ \text{when } loc \neq loc' \end{array}}$$

Part 4

Local states as a computational effect

Functorial algebraic theories at work

Functorial semantics

Every type is described as a functor

$$X \quad : \quad I \quad \longrightarrow \quad Set$$

where I is the category with

– natural numbers as objects

– injections as morphisms.

Functorial semantics

The intuition is that

$$X(n)$$

contains the programs with n locations. Every injection

$$f : p \longrightarrow q$$

defines a function

$$X(f) \quad : \quad X(p) \longrightarrow X(q)$$

which transports every program

$$P \quad \in \quad X(p)$$

to the program

$$P[loc \hookleftarrow f(loc)] \quad \in \quad X(q).$$

A cartesian closed category

The category $[I, Set]$ is cartesian

$$X \times Y \quad : \quad n \quad \mapsto \quad Xn \times Yn$$

and closed

$$X \Rightarrow Y \quad : \quad n \quad \mapsto \quad [I, Set]\,(\,X \;\times\; I(n, -)\,,\; Y\,)$$

Note that

$$(X \Rightarrow Y)(n) \quad = \quad \int_{p \in I} Set\,(\,Xp \;\times\; I(n, p)\,,\; Yp\,)$$

A monoidal closed category

The category $[I, Set]$ is symmetric monoidal

$$X \otimes Y \quad : \quad n \quad \mapsto \quad \int^{p,q \in I} Xp \times Yq \times I(p+q, n)$$

and closed

$$X \multimap Y \quad : \quad n \quad \mapsto \quad [I, Set](X, Y(n + -))$$

Note that

$$(X \multimap Y)(n) \quad = \quad \int_{p \in I} Set\;(\;Xp\;,\;Y(n+p)\;)$$

Local state monad

Define the contravariant functor

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} S & : & I^{op} & \longrightarrow & Set \\ & & n & \mapsto & V^n \end{array}}$$

The monad is then defined as:

$$\boxed{TX \quad : \quad n \quad \mapsto \quad \left(\int^{m \in (n/I)} (Sm \times Xm) \right)^{Sn}}$$

Local state monad

Define the covariant functor

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} L & : & I & \longrightarrow & Set \\ & & n & \mapsto & I(1,n) \end{array}}$$

Note that

$$\boxed{\partial X \quad = \quad L \multimap X \quad : \quad n \quad \mapsto \quad X(n+1)}$$

A distributivity law

A natural transformation

$$(X \times Y) \otimes Z \quad \longrightarrow \quad X \times (Y \otimes Z)$$

defined componentwise as

$$\begin{aligned} \int^{p,q \in I} (Xp \times Yp) \times Zq \times I(p+q,n) \quad &\longrightarrow \quad \int^{p,q \in I} Xn \times Yp \times Zq \times I(p+q,n) \\ &\longrightarrow \quad Xn \times \int^{p,q \in I} Yp \times Zq \times I(p+q,n) \end{aligned}$$

From this follows a distributivity law

$$Y \multimap Z^X \quad \longrightarrow \quad (Y \multimap Z)^X$$

An object with local state

An object A equipped with a **lookup** map

$$\texttt{lecture} \quad : \quad A^V \quad \longrightarrow \quad A^L$$

and an **update** map

$$\texttt{ecriture} \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A^{L \times V}$$

and a **block** map

$$\texttt{block} \quad : \quad L \multimap A \quad \longrightarrow \quad A^V$$

satisfying a series of coherence laws.

Interaction 5

$$
\begin{tikzcd}
L \multimap A \arrow[r, "L\multimap\mathtt{ecriture}"] \arrow[d, "\mathtt{block}"'] & L \multimap A^{L\times V} \arrow[r, "\cong"] & (L \multimap A^{L})^{V} \arrow[r] & ((L \times L) \multimap A)^{V} \arrow[d, "(diag\multimap A)^{V}"] \\
A^{V} \arrow[r, "(A^{terminal})^{V}"] & (A^{V})^{V} & & (L \multimap A)^{V} \arrow[ll, "\mathtt{block}^{V}"']
\end{tikzcd}
$$

Interaction 6

$$\begin{tikzcd}
L \multimap A^V \arrow[r, "L\multimap\texttt{lecture}"] \arrow[d, "\cong"'] & L \multimap A^L \arrow[r] & (L \times L) \multimap A \arrow[d, "diag\multimap A"] \\
(L \multimap A)^V \arrow[d, "\texttt{block}^V"'] & & L \multimap A \arrow[d, "\texttt{block}"] \\
(A^V)^V \arrow[r, "\cong"] & A^{V\times V} \arrow[r, "A^{diag}"] & A^V
\end{tikzcd}$$

Commutation 4

$$\begin{tikzcd}
L \multimap (L \multimap A) \arrow[r, "L\multimap\texttt{block}"] \arrow[d, "swap"'] & L \multimap A^V \arrow[r, "\cong"] & (L \multimap A)^V \arrow[d, "\texttt{block}^V"] \\
L \multimap (L \multimap A) \arrow[d, "L\multimap\texttt{block}"'] & & (A^V)^V \arrow[d, "swap"] \\
L \multimap A^V \arrow[r, "\cong"] & (L \multimap A)^V \arrow[r, "\texttt{block}^V"] & (A^V)^V
\end{tikzcd}$$

Commutation 5

$$\begin{tikzcd}
L \multimap A \arrow[r, "L\multimap\mathtt{ecriture}"] \arrow[d, "\mathtt{block}"'] & L \multimap A^{L\times V} \arrow[r] & (L \multimap A)^{L\times V} \arrow[d, "\mathtt{block}^{L\times V}"] \\
A^V \arrow[r, "\mathtt{ecriture}^V"] & (A^{L\times V})^V \arrow[r, "\cong"] & (A^V)^{L\times V}
\end{tikzcd}$$

Commutation 6

$$
\begin{tikzcd}
(L \multimap A)^V \arrow[r, "\mathtt{block}^V"] \arrow[d, "\cong"'] & (A^V)^V \arrow[r, "\mathit{swap}"] & (A^V)^V \arrow[d, "\mathtt{lecture}^V"] \\
L \multimap A^V \arrow[d, "L \multimap \mathtt{lecture}"'] & & (A^L)^V \arrow[d, "\cong"] \\
L \multimap A^L \arrow[r] & (L \multimap A)^L \arrow[r, "\mathtt{block}^L"] & (A^V)^L
\end{tikzcd}
$$

Monadicity for local stores

Let $LS(\mathcal{C})$ denote the category

– whose objects are the objects with local stores,

– whose morphisms are the structure preserving morphisms.

Theorem (Plotkin, Power)

The category $LS(\mathcal{C})$ is equivalent to the category of algebras of the local state monad.