

Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Ecole Normale Supérieure

Plan de la séance

1 – Lambda-calcul

2 – Catégories et 2-catégories

Première partie

Lambda-calcul

Le calcul des fonctions

Church 1935: invention syntaxique du λ -calcul

Le λ -calcul est le calcul **syntaxique** ou **formel** des fonctions.

Les expressions du λ -calcul sont appelés des **λ -termes**.

Le λ -calcul est un calcul **plutôt bizarre** où tout λ -terme P est à la fois:

- * une **fonction** qui s'applique à tous les λ -termes, **y compris lui-même**,
- * un **argument** de n'importe quel λ -terme, **y compris lui-même**.

On a longtemps cru que le λ -calcul n'était qu'**un jeu d'écriture**, auquel on ne saurait pas donner de sens mathématique — jusqu'au modèle dénotationnel de Dana Scott (1976).

Curry 1958: le λ -calcul simplement typé

Il est possible de **typer** certaines expressions du λ -calcul au moyen de types simples A, B construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle **contexte de typage** Γ une suite finie $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)$ où x_i est une variable et A_i est un type simple, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On appelle **séquent** un triplet:

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash P : B$$

où $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ est un contexte de typage, P est un λ -terme et B est un type simple.

Curry 1958: le λ -calcul simplement typé

| | |
|-----------------|--|
| Variable | $\frac{}{x:A \vdash x:A}$ |
| Abstraction | $\frac{\Gamma, x:A \vdash P:B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$ |
| Application | $\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$ |
| Affaiblissement | $\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x:A \vdash P : B}$ |
| Contraction | $\frac{\Gamma, x:A, y:A \vdash P : B}{\Gamma, z:A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$ |
| Permutation | $\frac{\Gamma, x:A, y:B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y:B, x:A, \Delta \vdash P : C}$ |

Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un λ -terme P est appelé **simplement typé** lorsqu'il existe un contexte de typage Γ et un type simple A tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des λ -termes simplement typés est clos par β -réduction:

Subject Reduction: Si $\Gamma \vdash P : A$ et $P \longrightarrow_{\beta} Q$, alors $\Gamma \vdash Q : A$.

Un λ -terme P est appelé **fortement normalisable** lorsque tous les chemins de β -réduction:

$$P \longrightarrow_{\beta} P_1 \longrightarrow_{\beta} P_2 \longrightarrow_{\beta} \cdots \longrightarrow_{\beta} P_n \longrightarrow_{\beta} \cdots$$

terminent.

Normalisation forte: Si P est simplement typé alors P est fortement normalisable.

En particulier, le λ -terme $\Delta\Delta$ qui boucle n'est pas simplement typé.

Curry-Howard (1)

Logique minimale intuitioniste

| | |
|-----------------|---|
| Variable | $\frac{}{A \vdash A}$ |
| Abstraction | $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ |
| Application | $\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$ |
| Affaiblissement | $\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$ |
| Contraction | $\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$ |
| Permutation | $\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$ |

Curry-Howard (1)

λ -calcul simplement typé

| | |
|-----------------|--|
| Variable | $\frac{}{x : A \vdash x : A}$ |
| Abstraction | $\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x. P : A \Rightarrow B}$ |
| Application | $\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$ |
| Affaiblissement | $\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$ |
| Contraction | $\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$ |
| Permutation | $\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$ |

Deuxième partie

Catégories et 2-catégories

Foncteurs et transformations naturelles

Catégories

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'un ensemble $\mathbf{Hom}(A, B)$ de **morphismes** pour tout couple d'objets (A, B) ,

— d'une **loi de composition** $\circ : \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$

— d'un morphisme **identité** $id_A \in \mathbf{Hom}(A, A)$ pour tout objet A ,

1— tel que \circ soit associative

$$\forall (f, g, h) \in \mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(C, D) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

2— tel que les morphismes id soient éléments neutre de \circ

$$\forall f \in \mathbf{Hom}(A, B) \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

Notation: on écrit $f : A \longrightarrow B$ quand $f \in \mathbf{Hom}(A, B)$.

Foncteurs

Un **foncteur** F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} est la donnée:

— d'un objet FA de \mathcal{D} pour tout objet A de \mathcal{C} ,

— d'une fonction $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ pour tout couple d'objets (A, B) de \mathcal{C} .

On demande que F préserve les identités:

$$FA \xrightarrow{Fid_A} FA \quad = \quad FA \xrightarrow{id_{FA}} FA$$

et préserve la composition:

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \quad = \quad FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FC$$

Exemple de catégorie et foncteur (1)

Tout ensemble ordonné (X, \leq) définit une catégorie dont les objets sont les éléments de X , et dans laquelle:

$$\mathbf{Hom}_c(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, il existe au plus un morphisme entre deux objets.

Exemple de catégorie et foncteur (2)

Un monoïde (M, \cdot, e) est un ensemble M muni d'une loi produit et d'un élément neutre, tels que:

$$\begin{array}{ll} \text{Associativité} & \forall x, y, z \in M, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ \text{Unité} & \forall x \in M, \quad x \cdot e = x = e \cdot x. \end{array}$$

Un homomorphisme f de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) est une fonction $f : M \rightarrow N$ qui préserve les identités:

$$f(e) = u,$$

et préserve les produits:

$$\forall x, y \in M, \quad f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exercice. Identifier tout monoïde (M, \cdot, e) à une catégorie $[M, \cdot, e]$ à un seul objet. Etablir une bijection entre les homomorphismes de (M, \cdot, e) dans (N, \bullet, u) et les foncteurs de $[M, \cdot, e]$ dans $[N, \bullet, u]$.

Exemple de catégorie et foncteur (3)

L'action d'un monoïde

$$(M, \cdot, e)$$

sur un ensemble

$$X$$

est la même chose qu'un foncteur

$$[M, \cdot, e] \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

La représentation d'un monoïde est la donnée d'un foncteur dans **Vect**.

Transformations

Une **transformation**

$$\theta : F \longrightarrow G$$

entre deux foncteurs

$$F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

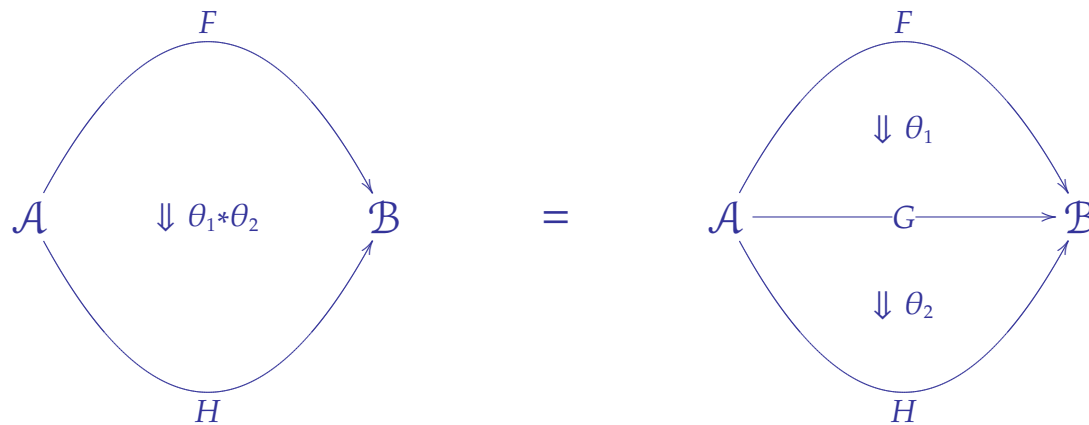
est une famille de morphismes

$$(\theta_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \text{Obj}(\mathcal{A})}$$

de la catégorie \mathcal{B} indexée par les objets de la catégorie \mathcal{A} .

Composition verticale de transformations

Les transformations se composent verticalement



et définissent ainsi une catégorie

Trans (\mathcal{A} , \mathcal{B})

pour toutes catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Action à gauche sur les transformations

Dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathcal{A} & & & & \mathcal{B} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & G & & \end{array}$$

$\Downarrow \theta$

on définit l'**action à gauche** du foncteur H sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

comme la transformation

$$H \circ_L \theta : H \circ F \longrightarrow H \circ G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$H \circ F(A) \xrightarrow{H(\theta_A)} H \circ G(A).$$

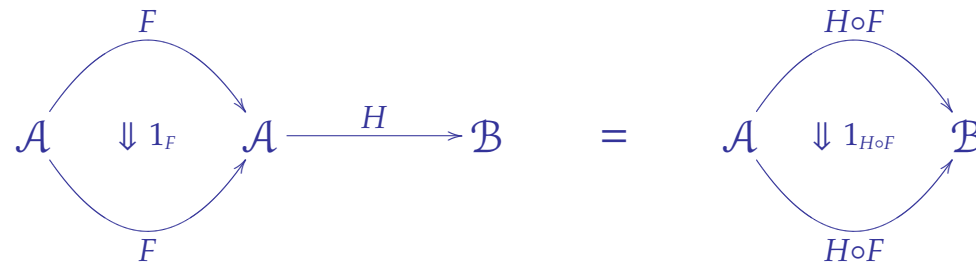
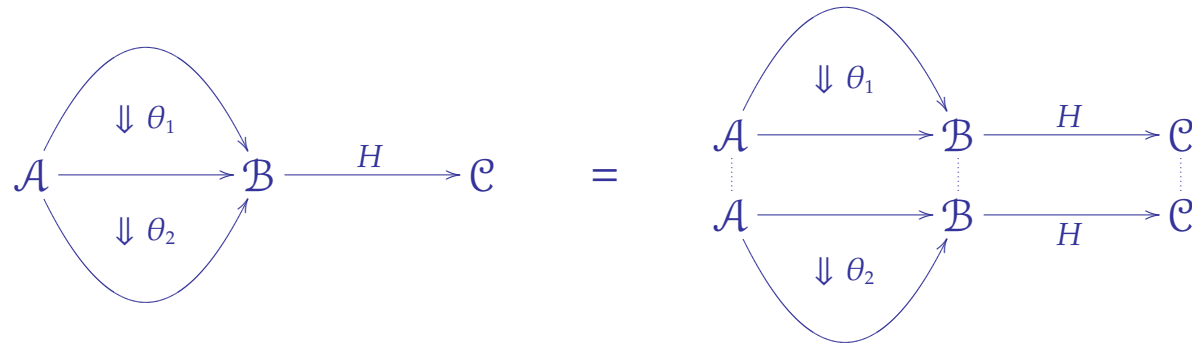
Propriétés de l'action à gauche (1)

Les deux équations

$$H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) = (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1)$$

$$H \circ_L 1_F = 1_{H \circ F}$$

signifient diagrammatiquement que



Propriétés de l'action à gauche (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{ccc} H \circ_L - & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & \theta & \mapsto H \circ_L \theta \end{array}$$

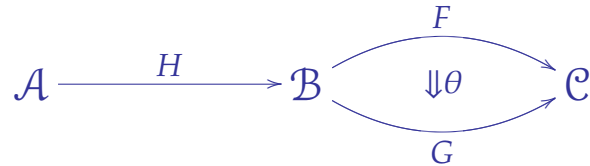
définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$(H_1 \circ H_2) \circ_L F = H_1 \circ_L (H_2 \circ_L F) \qquad id_{\mathcal{B}} \circ_L \theta = \theta$$

expriment le fait que \circ_L définit une action.

Action à droite sur les transformations

Dans la situation suivante



le foncteur H agit sur la transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et la transporte en la transformation:

$$\theta \circ_R H : F \circ H \longrightarrow G \circ H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dont l'instance en l'objet A est définie par le morphisme

$$F \circ H(A) \xrightarrow{\theta_{H(A)}} G \circ H(A).$$

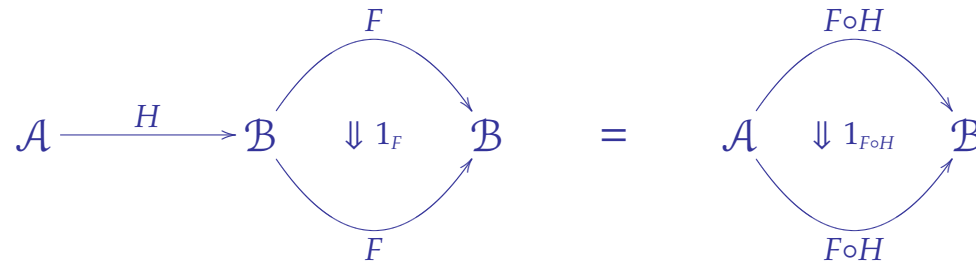
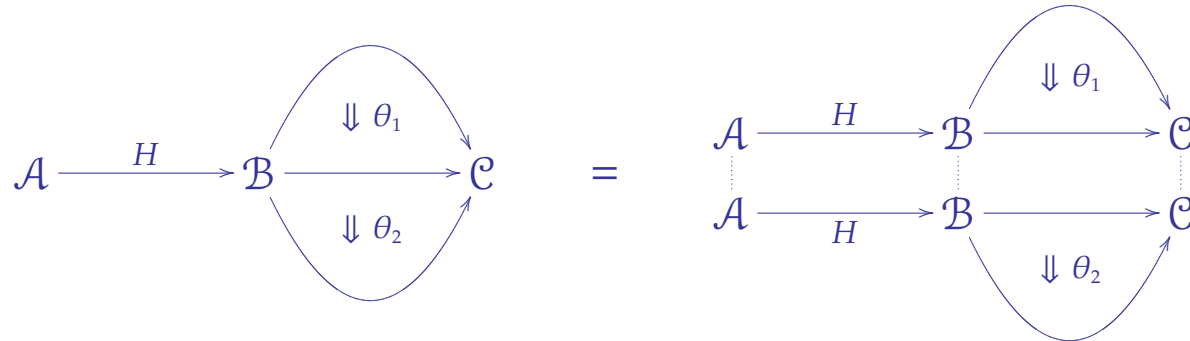
Propriétés de l'action à droite (1)

Les deux équations

$$(\theta_2 * \theta_1) \circ_R H = (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 \circ_R H)$$

$$1_F \circ_R H = 1_{F \circ H}$$

signifient diagrammatiquement que



Propriétés de l'action à droite (2)

Ces deux équations indiquent que

$$\begin{array}{ccc} - \circ_R H & : & \mathbf{Trans}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Trans}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ & & \theta \longmapsto \theta \circ_R H \end{array}$$

définit un foncteur, tandis que les deux équations

$$\theta \circ_R (H_2 \circ H_1) = (\theta \circ_R H_2) \circ_R H_1 \qquad \theta \circ_R id_{\mathcal{A}} = \theta$$

expriment le fait que \circ_R définit une action.

Compatibilité des actions à gauche et à droite

Dernière équation: dans la situation

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{H_1} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{H_2} \mathcal{B}'$$

l'ordre dans lequel on fait agir H_1 et H_2 sur la transformation θ ne compte pas:

$$(H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1 = H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1)$$

Sesqui-catégories

Une sesqui-catégorie \mathcal{D} est une catégorie munie d'une structure de catégorie

$$\mathcal{D}(A, B)$$

pour toute paire d'objets (A, B) de la catégorie, telle que

$$\text{les objets de } \mathcal{D}(A, B) = \text{les morphismes de } A \text{ dans } B$$

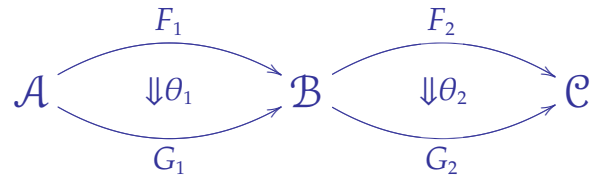
munie d'une paire d'actions \circ_L et \circ_R satisfaisant les neuf équations évoquées:

| | | | | | |
|-----------------------------------|-----|---|-----------------------|-----|------------------------------------|
| $h \circ_L (\theta_2 * \theta_1)$ | $=$ | $(h \circ_L \theta_2) * (h \circ_L \theta_1)$ | $h \circ_L 1_f$ | $=$ | 1_{hof} |
| $(h_1 \circ h_2) \circ_L f$ | $=$ | $h_1 \circ_L (h_2 \circ_L f)$ | $id_B \circ_L \theta$ | $=$ | θ |
| $(\theta_2 * \theta_1) \circ_R h$ | $=$ | $(\theta_2 \circ_R h) * (\theta_1 \circ_R h)$ | $1_f \circ_R h$ | $=$ | $1_{f \circ h}$ |
| $\theta \circ_R (h_2 \circ h_1)$ | $=$ | $(\theta \circ_R h_2) \circ_R h_1$ | $\theta \circ_R id_A$ | $=$ | θ |
| | | $(h_2 \circ_L \theta) \circ_R h_1$ | $=$ | | $h_2 \circ_L (\theta \circ_R h_1)$ |

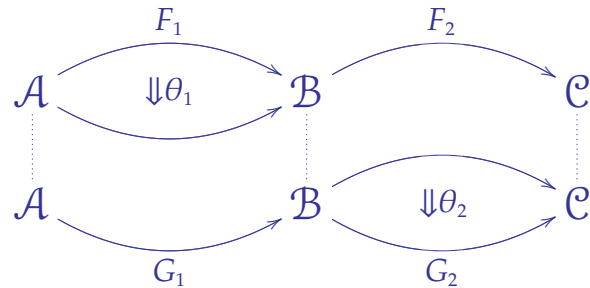
Les catégories, foncteurs et transformations forment une sesqui-catégorie.

La sesqui-catégorie des catégories et transformations

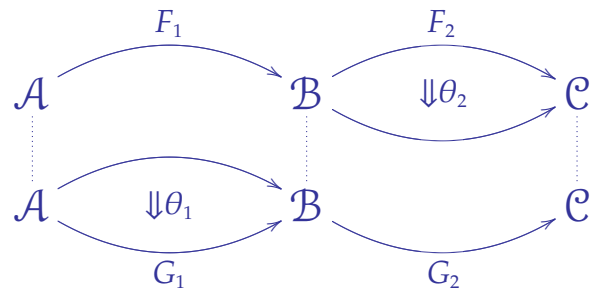
Soit deux transformations θ_1 et θ_2 dans la configuration suivante



La transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2



diffère en général de la transformation obtenue en appliquant θ_1 puis θ_2 .



Transformations naturelles

Une transformation

$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

est **naturelle** lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\theta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\theta_B} & GB \end{array}$$

commute pour tout morphisme

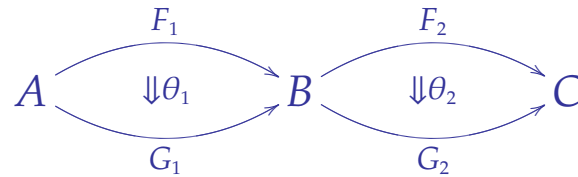
$$A \xrightarrow{f} B$$

On note $\mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie des foncteurs et transformations naturelles

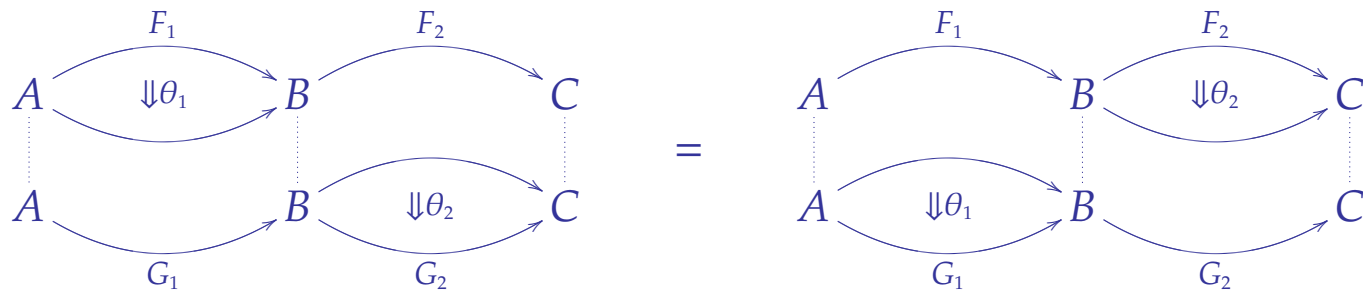
$$\theta : F \longrightarrow G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Loi d'échange

On dit qu'une paire de 2-cellules θ_1 et θ_2 dans une sesqui-catégorie \mathcal{D}



satisfait la loi d'échange lorsque l'égalité

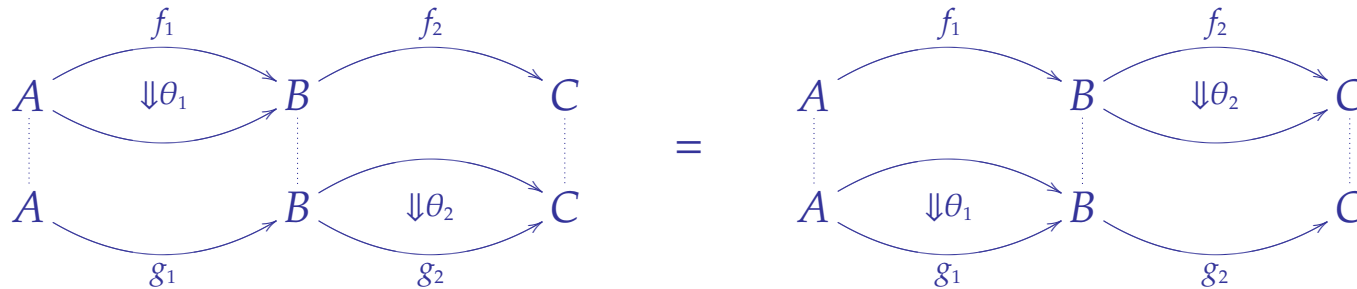


est satisfaite.

Autrement dit, l'ordre dans lequel on compose θ_1 et θ_2 est sans importance.

Exercice

Dans une sesqui-catégorie \mathcal{D} , on appelle **centrale à gauche** toute 2-cellule θ_2 telle que la loi d'échange



est satisfaite pour toute transformation θ_1 .

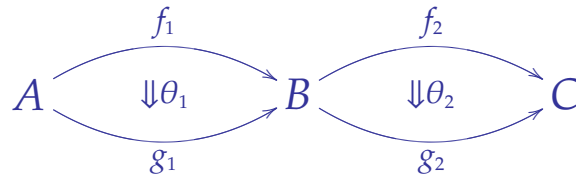
Montrer que les transformations naturelles coïncident avec les 2-cellules centrales à gauche, dans la sesqui-catégorie des catégories, foncteurs et transformations.

En déduire l'existence d'un foncteur:

$$\mathbf{Nat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

2-catégories

Une 2-catégorie \mathcal{D} est une sesqui-catégorie telle que **la loi d'échange** est satisfaite par toute paire de 2-cellules



2-catégories (définition alternative)

Une 2-catégorie \mathcal{D} est la donnée

— d'une classe d'**objets**,

— d'une catégorie $\mathcal{D}(A, B)$ pour tout couple d'objets (A, B) ,

— d'un **foncteur** de composition $\circ : \mathcal{D}(B, C) \times \mathcal{D}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(A, C)$

— d'une identité **identité** $id_A : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{D}(A, A)$ pour tout objet A ,

1— tel que \circ soit associative, au sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(C, D) \times \mathcal{D}(B, C) \times \mathcal{D}(A, B) & \xrightarrow{\circ \times \mathcal{D}(A, B)} & \mathcal{D}(B, D) \times \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \mathcal{D}(C, D) \times \circ & & \downarrow \circ \\
 \mathcal{D}(C, D) \times \mathcal{D}(A, C) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{D}(A, D)
 \end{array}$$

commute.

2— tel que id soit élément neutre de \circ au sens où les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(A, B) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \cong & & \uparrow \circ \\
 \mathcal{D}(A, B) \times \mathbb{1} & \xrightarrow{\mathcal{D}(A, B) \times id_A} & \mathcal{D}(A, B) \times \mathcal{D}(A, A)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(A, B) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{D}(A, B) \\
 \downarrow \cong & & \uparrow \circ \\
 \mathbb{1} \times \mathcal{D}(A, B) & \xrightarrow{id_B \times \mathcal{D}(A, B)} & \mathcal{D}(B, B) \times \mathcal{D}(A, B)
 \end{array}$$

commutent pour tout A et B .

Notation: on écrit

$$\theta : f \Rightarrow g : A \longrightarrow B$$

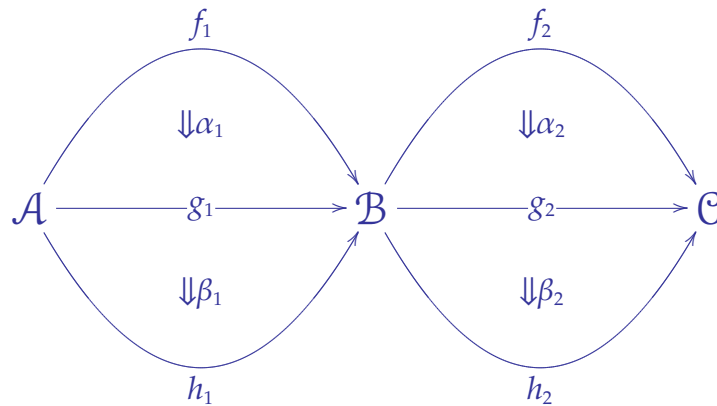
quand

$$\theta : f \longrightarrow g$$

est un morphisme de la catégorie $\mathcal{D}(A, B)$.

Loi d'échange de Godement

Dans une 2-catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, les deux manières canoniques de composer les 2-cellules



commutent:

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

Suspension

Nous verrons dans une prochaine séance la notion de catégorie monoïdale.

Toute catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} peut être vue comme la 2-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$

— qui ne contient qu'une seule 0-cellule,

— dont les 1-cellules sont les 0-cellules de \mathcal{C}

— dont les 2-cellules sont les 1-cellules de \mathcal{C}

avec les lois de composition induites.

Une sesqui-catégorie $\Sigma(\mathcal{C})$ à un objet définit une catégorie prémonoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$.

Exemple: la 2-catégorie des ensembles et des relations

La 2-catégorie \mathcal{Rel} est définie comme suit:

- ses 0-cellules (ou objets) sont les ensembles,
- ses 1-cellules (ou morphismes) sont les relations entre ensemble,

$$A \xrightarrow{f \cdot g} B = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

composées relationnellement:

$$a [f \cdot g] c \iff \exists b \in B, \quad a [f] b \text{ et } b [g] c.$$

- ses 2-cellules (ou cellules) sont données par inclusion:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ A & & B \\ & \Downarrow & \\ & \curvearrowleft & \\ & g & \end{array} \iff f \subseteq g$$

En particulier, les catégories $\mathcal{Rel}(A, B)$ sont des catégories de préordre.